

<論 文>

등온 수직 원통표면을 연하여 흐르는 자연대류 유동의 파형 불안정성

유정열* · 윤준원** · 노승탁*

(1988년 10월 26일 접수)

Instability Analysis of Natural Convection Flow along Isothermal Vertical Cylindrical Surfaces

Jung Yul Yoo, Jun Won Yun and Sung Tack Ro

Key Words : Wave Instability(파형 불안정성), Natural Convection(자연대류), Local Non-Similarity Solution(국소 비상사해), Linear Stability Analysis(선형 안정성해석)

Abstract

A stability problem on wave instability of natural convection flow along isothermal vertical cylindrical surfaces has been formulated, accounting for the non-parallelism of the basic flow and thermal fields. Then the problem is solved numerically under the simplifying assumption of the parallelism of the basic flow quantities. It is shown that the flow corresponding to the same characteristic boundary layer thickness becomes more stable as the value of the curvature parameter increases. The stability characteristics for $Pr=0.7$ appear to be more sensitive to the curvature parameter than those for $Pr=7$.

기 호 설 명

C_2, C_3 : 복소수 상수, 식 (33)
 D^n : 미분 연산자, $d^n/d\eta^n$
 F : 변형된(무차원) 유동함수, 식 (7)
 Gr_x : 국소 Grashof 수 = $g\beta^*(T_w - T)x^3/\nu^2$
 g : 중력가속도
 K_0, K_1 : 0차와 1차의 2종의 수정된 Bessel 함수
 Pr : Prandtl 수
 β, β' : 섭동 압력과 압력 교란
 R : 무차원화된 반경방향 좌표, $r/r_0 = (1 + \xi\eta)^{1/2}$
 r : 반경방향 좌표
 r_0 : 원통 반경
 s : 무차원 온도교란 진폭함수

s' : 온도교란 진폭함수
 s_1, s_2, s_3 : s 의 1차 독립해
 T, \hat{T}, T' : 기본 온도, 섭동 온도 및 온도교란
 T_w, T_∞ : 벽 온도와 주위 온도
 U, V : 무차원 기본 축방향과 반경방향 속도성분
 u, \hat{u}, u' : 기본 축방향 속도 성분, 섭동된 축방향 속도성분 및 축방향 속도 교란성분
 u_0 : 특성속도, 식 (22)
 v, \hat{v}, v' : 기본 반경방향 속도 성분, 섭동된 반경방향 속도성분 및 반경방향 속도교란성분
 x : 축방향 좌표
 α : 무차원 파수
 α_r, α_i : α 의 실수와 허수부
 α^* : 파수
 α_r^*, α_i^* : α^* 의 실수부와 허수부
 β : $(\alpha^2 - i\omega\Gamma)^{1/2}$, 식 (35)

* 정회원, 서울대학교 공과대학 기계공학과

** 정회원, 서울대학교 대학원

- β^* : 열체적 팽창계수
- Γ : 수정된 Grashof 수 = $4(Gr_x/4)^{1/4}$
- γ : $(\alpha^2 - i\omega Pr\Gamma)^{1/2}$, 식 (35)
- δ : 특성길이 또는 특성 경계층두께, 식 (21)
- η : 의사상변수, 식 (5)
- θ : 무차원 온도
- k : 열 확산계수
- ν : 동 점성계수
- ξ : 확장된 x 좌표 또는 곡률변수, 식 (5)와 (23)
- ϕ : 무차원 속도교란 진폭함수
- ϕ' : 속도교란 진폭함수
- ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 : ϕ 의 선형 독립해
- Ψ : 기본유동의 유동함수
- Ψ' : 유동교란의 유동함수
- ω : 무차원 파 주파수
- ω^* : 파 주파수

1. 서 론

수직, 경사 및 수평 평판에 인접한 자연대류 또는 혼합대류의 파형 안정성문제는 오랜동안 많은 연구의 대상이 되어왔다. 이 분야에 있어서 최근의 대표적인 연구를 몇 가지만 예를 들더라도 Tzuoo 등⁽¹⁾과 Lee 등⁽²⁾이 있다. Tzuoo 등은 수평으로부터 수직 방향으로 경사각을 변화시키면서 경사 등은 평판에서의 상향 자연대류의 파형 안정성문제를 해석하였다. Lee 등은 등온의 수직 평판을 연하여 발생하는 순수한 자연대류를 포함한 혼합대류의 전체 범위에 걸쳐서 혼합대류의 파형 안정성문제를 해석하였다. 이와는 대조적으로 가열된 수직 원통을 연하는 자연대류 또는 혼합대류의 파형 안정성 해석은 이 문제의 공학적 중요성에도 불구하고 현재까지 거의 관심의 대상이 되지 못했다. 가열된 수직 원통을 연하는 유동 그 자체에 대하여는 오히려 많은 연구가 수행된 것을 고려하면 이는 더욱 주목할만한 사실이다. 예를 들면 Minkowycz와 Sparrow⁽³⁾는 국소 비상사해(local nonsimilarity solution) 방법을 적용함으로써 등은 수직 원통에서의 자연대류 유동을 해석하였다. 최근에 Lee 등⁽⁴⁾은 전체 혼합대류 영역에 대해 수직 원통과 니들(needle)을 연하는 혼합대류 유동을 연구하였다. 그리고 Lee 등⁽⁵⁾은 벽온도가 축방향으로 임의적으로 변하는 얇은 수직 원통을 연하는 자연대류를 해석

하였다. 저자가 알고 있는 범위에서는 가열된 수직 원통 바깥에서의 대류유동에 대한 안정성해석은 연구된 바가 없다. 본 연구와 얼마간 연관된 연구로서는 가열된 수직 파이프 안에서 완전히 발달된 유동에 대한 선형 안정성해석의 결과를 제시한 Yao 등^(6,7) 들 수 있을 뿐이다. 본 연구의 목적의 하나는 기본 유동장과 온도장의 비평행성을 고려함으로써 등은 수직 원통표면 바깥에서의 자연대류 유동의 파형 불안정성에 대한 안정성 문제를 구성하는 것이다. 다음에는 기본 유동장들의 평행성을 고려한 단순화 가정하에 수치해석을 수행하여 안정성 특성에 대한 원통 곡률의 영향을 정성적으로 검토하는 것이다.

2. 지배방정식

온도 T_∞ 의 무한 유체속에 위치한 반경이 r_0 이고 벽 온도가 T_w 인 수직 등은 원통을 고려한다. 반경방향 좌표 r 은 원통축으로부터 측정된 것이며 축방향 좌표 x 는 원통의 선단(leading edge)으로부터 측정된다. 불안정성 해석을 위해 필요한 기본 유동장 및 온도장은 Boussinesq 근사를 적용한 자연대류 경계층방정식에 의해 나타낼 수 있다:

$$\frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial r} = 0, \tag{1}$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + g\beta^*(T - T_\infty), \tag{2}$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\alpha}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right), \tag{3}$$

경계조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u(x, r_0) = v(x, r_0) = 0, \quad T(x, r_0) = T_w, \\ u(x, \infty) = 0, \quad T(x, \infty) = T_\infty. \end{aligned} \tag{4}$$

Minkowycz와 Sparrow⁽³⁾는 위 문제에 대한 국소 비상사해를 지배방정식의 세 단계의 truncation 오차에 대해 구하였다. 이들의 연구에서는 다음과 같은 의 상사변수 η 와 확장된 x 좌표인 ξ 를 채택하였다.

$$\eta = \left(\frac{Gr_x}{4} \right)^{1/4} \frac{r^2 - r_0^2}{2r_0\alpha}, \tag{5}$$

$$\xi = \left(\frac{4}{Gr_x} \right)^{1/4} \frac{2x}{r_0},$$

여기서 Gr_x 는 국소 Grashof 수로서 다음과 같이 정의된다.

$$Gr_x = g\beta^*(T_w - T_\infty)x^3/\nu^2 \tag{6}$$

그들은 또한 다음과 같은 형태의 변형된 유동함수 $F(\xi, \eta)$ 와 무차원 온도 $\theta(\xi, \eta)$ 를 도입하였다.

$$F(\xi, \eta) = \Psi(x, r) [4\nu r_0 (Gr_x/4)^{1/4}], \quad (7)$$

$$\theta(\xi, \eta) = [T(x, r) - T_\infty] / (T_w - T_\infty), \quad (8)$$

여기서 유동함수 $\Psi(x, r)$ 는 다음의 관계에 의해 연속방정식 (1)를 만족한다.

$$ru = \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad rv = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (9)$$

본 연구에서는 그들의 과정을 따라 기본 유동값들을 구한다.

선형 안정성이론에 근거하여 섭동된 유동양들은 기본 유동양들에 무한소의 교란양들을 중첩시킴으로써 표시된다. 수직 원통 주위의 자연대류 유동의 경우에도 Squire의 정리, 즉 3차원 안정성문제는 등가의 2차원 안정성문제로 축소될 수 있다는 사실이 성립되는지의 여부는 아직 밝혀져 있지 않으나, 여기서는 어쨌든 2차원 축대칭 교란만을 고찰하기로 한다. 이는 큰 제한조건이라고는 생각되지 않는다. 왜냐하면, 원통의 반경에 비해 경계층의 두께가 훨씬 작은 경우에는 수직 평판을 연하여 흐르는 자연대류 유동의 경우에 가깝다고 볼 수 있는데, 이에 대한 실험적인 연구들에서는 단지 축방향으로 진행되는 교란만이 관찰될 뿐 횡방향(spanwise direction)으로의 교란의 전파는 관찰되지 않기 때문이다. 또한 McFadden 등⁽⁶⁾의 연구에서와 같이 수직 등은 원통사이의 부력으로 인한 유동에서 내부반경 대 외부반경 비가 큰 값을 가질 경우에도 2차원 교란이 더 지배적임이 수치해석적으로 증명되었는데, 비록 본 문제와는 경계조건이 다를지라도 이같은 사실을 간접적으로 뒷받침해주는 것이다. 따라서 다음과 같이 섭동된 유동양들을 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= u(x, r) + u'(x, r, t), \\ \tilde{v} &= v(x, r) + v'(x, r, t), \\ \tilde{p} &= p(x, r) + p'(x, r, t), \\ \tilde{T} &= T(x, r) + T'(x, r, t). \end{aligned} \quad (10)$$

식 (10)을 비정상, 비압축성, 2차원 유동에 대한 Navier-Stokes 방정식과 에너지 방정식에 대입한 후 교란양들을 선형화하고, 기본 유동양들에 의해 만족되는 부분을 소거하면 다음과 같은 교란방정식을 얻는다 :

$$\frac{\partial(ru')}{\partial x} + \frac{\partial(rv')}{\partial r} = 0, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u'}{\partial t} + u \frac{\partial u'}{\partial x} + u' \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u'}{\partial r} + v' \frac{\partial u}{\partial r} \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u'}{\partial r} + \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} \right) \\ &+ g\beta^* T', \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v'}{\partial t} + u \frac{\partial v'}{\partial x} + u' \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v'}{\partial r} + v' \frac{\partial v}{\partial r} \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v'}{\partial r} + \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} - \frac{v'}{r^2} \right), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial T'}{\partial t} + u \frac{\partial T'}{\partial x} + u' \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T'}{\partial r} + v' \frac{\partial T}{\partial r} \\ &= \alpha \left(\frac{\partial^2 T'}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T'}{\partial r} + \frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

다음에 식 (12)와 (13)에 있는 압력항들은 교차 미분을 한 후 소거하여 없앤다. 결과적으로 얻어지는 방정식은 연속방정식 (1)과 (11)을 고려하여 다음과 같이 쓰여진다.

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u'}{\partial r \partial t} - \frac{\partial^2 v'}{\partial x \partial t} + u \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial r \partial x} - \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} \right) \\ &+ v \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 v'}{\partial r \partial x} \right) - \frac{v}{r} \left(\frac{\partial u'}{\partial r} - \frac{\partial v'}{\partial x} \right) \\ &- \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right) u' + \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right. \\ &+ \left. \frac{2}{r} \frac{\partial v}{\partial x} \right) v' \\ &= \nu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u'}{\partial r} \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{1}{r} \frac{\partial v'}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} \right) \right] + g\beta^* \frac{\partial T'}{\partial r} \end{aligned} \quad (15)$$

이 식은 아래와 같은 관계에 의해 연속방정식 (11)를 만족하는 교란 유동함수 $\Psi'(x, r, t)$ 를 도입함으로써 더 간단하게 표시된다.

$$u' = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi'}{\partial r}, \quad v' = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi'}{\partial x} \quad (16)$$

기본 유동양들을 평행류(즉, $u = u(r), v = 0$) 그리고 $T = T(r)$ 로 취급하는 경우에는 식 (13)에서 v 와 $\partial T / \partial x$ 를 포함하는 항들과 식 (14)에서 $v, \partial v / \partial r, \partial^2 v / \partial r^2$ 그리고 $\partial v / \partial x$ 를 포함하는 항들은 사라진다. 그렇지만, 본 연구에서는 기본 유동장과 온도장의 비평행성에 근거한 완전한 안정성문제를 명백히 언급한 후에만 이 문제를 취급할 것이다.

교란은 식 (10)의 위에 주어진 논의를 근거로 하여 그것의 진폭함수가 r 에만 의존하고 유선방향 x 를 따라 이동하는 축대칭 파의 형태를 가진다고 가정한다 :

$$\Psi'(x, r, t) = \phi'(r) e^{i\alpha^*x - i\omega^*t}, \quad (17)$$

$$T'(x, r, t) = s'(r) e^{i\alpha^*x - i\omega^*t}, \quad (18)$$

여기서 파 주파수 ω^* 는 실수이며 파수 α^* 는 복소수 ($\alpha^* = \alpha_r^* + i\alpha_i^*$)로서 α_r^* 는 공간적 파수이고 α_i^* 는 교란의 증폭 또는 감쇠를 결정한다.

식(16)~(18)를 식(15)과(14)에 대입하면 다음과 같은 식들이 얻어진다.

$$\begin{aligned} & i(\alpha^*u - \omega^*) \left(\frac{1}{r} \frac{d^2\phi'}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d\phi'}{dr} - \frac{\alpha^{*2}}{r} \phi' \right) \\ & + v \left(\frac{1}{r} \frac{d^3\phi'}{dr^3} - \frac{3}{r^2} \frac{d_2\phi'}{dr^2} + \frac{4}{r^3} \frac{d\phi'}{dr} \right. \\ & \left. - \frac{\alpha^{*2}}{r} \frac{d\phi'}{dr} + \frac{2\alpha^{*2}}{r^2} \phi' \right) \\ & - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right) \frac{d\phi'}{dr} \\ & - \frac{i\alpha^*}{r} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2}{r} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \phi' \\ & = v \left(\frac{1}{r} \frac{d^4\phi'}{dr^4} - \frac{2}{r^2} \frac{d^3\phi'}{dr^3} + \frac{3}{r^3} \frac{d^2\phi'}{dr^2} \right. \\ & \left. - \frac{3}{r^4} \frac{d\phi'}{dr} \right. \\ & \left. - \frac{2\alpha^{*2}}{r} \frac{d^2\phi'}{dr^2} + \frac{2\alpha^{*2}}{r^2} \frac{d\phi'}{dr} + \frac{\alpha^{*4}}{r} \phi' \right) \\ & + g\beta^* \frac{ds'}{dr}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & i(\alpha^*u - \omega^*)s' + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial x} \frac{d\phi'}{dr} + v \frac{ds'}{dr} \\ & - \frac{i\alpha^*}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \phi' \\ & = x \left(\frac{d^2s'}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{ds'}{dr} - \alpha^{*2} s' \right). \end{aligned} \quad (20)$$

식(19)와(20)은 식(5)~(8)에 의해 무차원화된 식으로 여기서 특성길이 δ 와 특성속도 u_0 는 다음과 같이 채택되었으며,

$$\delta = x(4/Gr_x)^{1/4}, \quad (21)$$

$$u_0 = 4\nu(Gr_x/4)^{1/4}/x, \quad (22)$$

그리고 다음과 같은 무차원 양들이 도입되었다.

$$\eta = \frac{r^2 - r_0^2}{2r_0\delta}, \quad \xi = \frac{2\delta}{r_0},$$

$$U(\xi, \eta) = \frac{u(x, r)}{u_0}, \quad V(\xi, \eta) = \frac{v(x, r)}{u_0},$$

$$\theta(\xi, \eta) = \frac{T(x, r) - T_\infty}{T_w - T_\infty}, \quad (23)$$

$$\phi(\eta) = \frac{\phi'(r)}{u_0 r_0 \delta}, \quad s(\eta) = \frac{s'(r)}{T_w - T_\infty},$$

$$\omega = \omega^* \delta / u_0,$$

$$\alpha = \alpha^* \delta = (\alpha_r^* + i\alpha_i^*) \delta = \alpha_r + i\alpha_i,$$

여기서 ξ 는 원통반경 r_0 에 대한 특성 경계층 두께 δ 의 비에 비례함을 알 수 있다. 식을 간단히 하기 위해서 다음과 같이 정의하면,

$$R = \frac{r}{r_0} = (1 + \xi\eta)^{1/2}, \quad (24)$$

$$\Gamma = 4(Gr_x/4)^{1/4}, \quad (25)$$

결과적인 방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} & i(\alpha U - \omega) \left(D^2\phi - \frac{\alpha^2}{R^2}\phi \right) - i\alpha \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \phi \\ & + V \left(RD^3\phi + \frac{\xi^2}{4R^3} D\phi - \frac{\alpha^2}{R} D\phi + \frac{\xi}{R^3} \alpha^2 \phi \right) \\ & + \frac{i\alpha}{\Gamma} \frac{\xi}{R^3} \left(\eta \frac{\partial V}{\partial \eta} - \xi \frac{\partial V}{\partial \xi} - 2V \right) \phi \\ & - \left(R \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} + \frac{\xi}{R} \frac{\partial V}{\partial \eta} \right) D\phi \\ & = \frac{1}{\Gamma} \left(R^2 D^4\phi + 2\xi D^3\phi - 2\alpha^2 D^2\phi + \frac{\alpha^4}{R^2}\phi \right) \\ & + \frac{1}{\Gamma} Ds, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} & i(\alpha U - \omega)s + VRDs - \frac{1}{\Gamma} \left(\eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - \xi \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) D\phi \\ & - i\alpha \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \phi = \frac{1}{Pr\Gamma} (R^2 D^2s + \xi Ds - \alpha^2 s), \end{aligned} \quad (27)$$

여기서 $D^n = d^n/d\eta^n$ 이고 $Pr = \nu/x$ 는 Prandtl 수이다. 식(27)을 유도하는 데 있어서 아래와 같은 항들에 대해 미분의 연쇄법칙이 신중하게 처리되었다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial r} &= \frac{R}{\delta}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\eta}{\delta} \frac{d\delta}{dx} = -\frac{\eta}{\delta \Gamma}, \\ \frac{\partial \xi}{\partial r} &= 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\xi}{\delta \Gamma}, \\ \frac{d\phi'}{dr} &= u_0 \frac{2\delta}{\xi} RD\phi, \quad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{u_0}{\delta} R \frac{\partial U}{\partial \eta}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial(u_0(x)V(\xi, \eta))}{\partial x} \\ &= \frac{u_0}{\delta \Gamma} \left[2V - \left(\eta \frac{\partial V}{\partial \eta} - \xi \frac{\partial V}{\partial \xi} \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= (T_w - T_\infty) \frac{\partial \theta(\xi, \eta)}{\partial x} \\ &= (T_w - T_\infty) \left(-\frac{1}{\delta \Gamma} \right) \left(\eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - \xi \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) \end{aligned}$$

식(26)과(27)에 나타나는 무차원 기본 유동양들 U, V, θ 및 그들의 미분들은 위에서 언급한 것과 유사한 미분연쇄법칙 및 아래와 같은 관계를 이용하여 식(7)~(9)로부터 얻을 수 있다.

$$\frac{d\Gamma}{d\xi} = \frac{3\Gamma}{\xi}. \quad (29)$$

특히, 다음과 같은 관계를 보일 수 있다.

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{\partial F}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^3 F}{\partial \eta^3}, \\
 V &= -\frac{1}{\Gamma R} \left(3F - \eta \frac{\partial F}{\partial \eta} + \xi \frac{\partial F}{\partial \xi} \right), \\
 \frac{\partial V}{\partial \eta} &= \frac{1}{\Gamma R} \left(\eta \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial F}{\partial \eta} - \xi \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} \right) \\
 &+ \frac{1}{2\Gamma R^3} \left(3\xi F - \eta \xi \frac{\partial F}{\partial \eta} + \xi^2 \frac{\partial F}{\partial \xi} \right), \\
 \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} &= \frac{1}{\Gamma R} \left(\eta \frac{\partial^3 F}{\partial \eta^3} - \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} - \xi \frac{\partial^3 F}{\partial \eta^2 \partial \xi} \right) \\
 &+ \frac{1}{\Gamma R^3} \left(-\xi \eta \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + 2\xi \frac{\partial F}{\partial \eta} + \xi^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \eta \partial \xi} \right) \\
 &+ \frac{1}{4\Gamma R^5} \left(3\eta \xi^2 \frac{\partial F}{\partial \eta} - 9\xi^2 F - 3\xi^3 \frac{\partial F}{\partial \xi} \right), \quad (30) \\
 \frac{\partial V}{\partial \xi} &= \frac{1}{\Gamma R} \left(\eta \frac{\partial^2 F}{\partial \eta \partial \xi} - \frac{\partial F}{\partial \xi} - \xi \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} \right) \\
 &+ \frac{1}{\Gamma \xi R} \left(9F - 3\eta \frac{\partial F}{\partial \eta} \right) \\
 &+ \frac{1}{2\Gamma R^3} \left(-\eta^2 \frac{\partial F}{\partial \eta} + 3\eta F + \eta \xi \frac{\partial F}{\partial \xi} \right).
 \end{aligned}$$

안정성 방정식 (26)과 (27)의 계수들은 $\partial\theta/\partial\xi$ 와 $\partial^2 F/\partial\xi^2$ 까지 포함하는 기본 유동양들의 미분들로 구성되어 있음을 알 수 있다. 그러므로 기본 유동장과 온도장의 비평행성을 완벽하게 고려하기 위해서는 경계조건 (4)를 가지는 지배방정식 (1)~(3)에 대한 truncation의 3 단계에 해당하는 6개의 연성된 식들을 풀어야 한다. 이 문제의 해에 관하여는 이 방정식들의 집합을 주어진 매개변수 ξ 에 대한 상미분 방정식들로 취급한 Minkowycz와 Sparrow⁽³⁾를 참조할 수 있다.

식 (26)과 (27)에 대한 경계조건은 원통벽 $r=r_0$ 와 $r=\infty$ 에서 u', v' 및 T' 이 0이 되는 것이므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\phi(0) = D\phi(0) = s(0) = 0, \quad (31a)$$

$$\phi(\infty) = D\phi(\infty) = s(\infty) = 0. \quad (31b)$$

ξ 가 단지 곡률효과를 표현하는 변수로 보여지는 한 경계조건 (31) 및 연성된 미분방정식 (26)과 (27)로 구성되는 고유치 문제는 다음과 같은 형태를 가진다.

$$E(\Gamma, \alpha_r, a_i, \omega; \xi, Pr) = 0. \quad (32)$$

ξ 및 Pr 수의 미리 설정된 값에 대해 식 (32)의 해는 Γ, α_r, a_i 및 ω 사이의 관계를 제공한다. 중립 안정성곡선을 구하는데 있어서 식 (32)를 만족하는 α_r 의 값과 $\alpha_i=0$ 이 Γ 와 ω 의 주어진 값에 대한 고유치로서 구해진다.

3. 해석방법

식 (26), (27)과 (31)로 구성된 안정성 문제에 대한 수학적 계를 풀기 위한 적분을 시작하기 위해서 먼저 식 (31b)로 표현되는 경계조건을 원통으로부터 유한한 거리만큼 떨어져 있는 η_∞ 에서 만족되는 적절한 조건으로 대체할 필요가 있다. Minkowycz와 Sparrow⁽³⁾의 Fig. 3~5와 식 (30)에서 기본 유동양들의 특성을 살펴보면, U, V 와 그들의 미분들은 $\eta \rightarrow \infty$, 즉 $R \rightarrow \infty$ 에 따라 모두 0으로 간다는 것을 바로 알 수 있다. 그러므로 안정성 문제의 영역을 두개의 부영역 $0 < \eta < \eta_\infty$ 및 $\eta_\infty < \eta < \infty$ 로 나눌 수 있는데, 여기서 질량보존에 의해 $\eta \rightarrow \infty$ 에 따라 $V \rightarrow 0$ 이 된다는 사실에 특별히 주목할 필요가 있다. 이것은 가열된 수직평판을 따른 자연대류의 경우와는 대조적인데, 평판의 경우에는 $\eta \rightarrow \infty$ 따라 반경방향 속도 V 가 일정한 값으로 간다(Lee 등⁽²⁾). η_∞ 는 U 로 특징지어지는 경계층 가장자리보다 원통벽으로부터 훨씬 더 먼 거리에 떨어져 위치한다. 따라서 부록에 보여진 바와 같이 후자의 부영역 $\eta_\infty < \eta < \infty$ 에서, 안정성 방정식 (26)과 (27)은 U, V 및 이들의 미분들에 무관한 식으로 표현된다. 그러므로 부록의 토의내용에 따라 $\eta_\infty < \eta < \infty$ 에서 다음과 같이 나타낼 수 있는데,

$$\phi(\eta) = \phi_1(\eta) + C_2\phi_2(\eta) + C_3\phi_3(\eta), \quad (33)$$

$$s(\eta) = s_1(\eta) + C_2s_2(\eta) + C_3s_3(\eta),$$

여기서 C_2 와 C_3 은 복소수 상수들이고,

$$\phi_1(\eta) = RK_1 \left(\frac{2\alpha}{\xi} R \right), \quad s_1(\eta) = 0, \quad (34a)$$

$$\phi_2(\eta) = RK_1 \left(\frac{2\beta}{\xi} R \right), \quad s_2(\eta) = 0, \quad (34b)$$

$$\phi_3(\eta) = RK_1 \left(\frac{2\gamma}{\xi} R \right), \quad s_3(\eta) = K_0 \left(\frac{2\gamma}{\xi} R \right), \quad (34c)$$

K_0 와 K_1 은 각각 0 및 1차의 2종의 수정된 Bessel 함수이고

$$\begin{aligned}
 \beta &= (\alpha^2 - i\omega\Gamma)^{1/2}, \\
 \gamma &= (\alpha^2 - i\omega Pr\Gamma)^{1/2}, \quad (35)
 \end{aligned}$$

수치해법에 의해 취급되는 고유치 문제는 이제 식 (26), (27), (31a)와 $\eta=\eta_\infty$ 에서의 식 (33)으로 구성된다. 그러나, 어떤 수치방법을 검토하기 전에, 이 절의 첫 문장의 후반부에서 제기된 논의의 확장을 위해 η_∞ 를 위치시킬 곳에 대해 검토할 필

요가 있다. 기본 유동장과 온도장의 비평행성을 있는 그대로 채택한다면, 경계층 가장자리보다 원통벽으로부터 훨씬 더 먼 곳에 η_∞ 를 위치시켜야 할 것이다. 다시 말해서 기본 유동양들에 대한 적절한 경계조건을 가지고 총 6개의 연성된 방정식들을 여기까지 풀어야 하는데, 이 방정식들은 Minkowycz와 Sparrow⁽³⁾에 의해 논의되었던 바와 같이 식 (5)~(9)를 이용하여 변형된 식 (1)~(4)로부터 얻어지는 truncation의 3단계에 해당한다. 이러한 기본 유동양들에 대한 해석이 고유치 문제를 풀기 위한 수치방법과 결합될 때에는 많은 컴퓨터 용량을 필요로 한다. 이러한 이유로 기본 유동장과 온도장의 비평행성을 고려한 안정성 해석은 현재 수행되고 있는 중이다. 본 연구의 나머지 부분에서는 기본 유동양들의 평행성을 가정하는데 이것은 더 완전한 해석을 위한 기본적인 단계로 생각될 수 있으며, 또한 안정성 문제의 일부 물리적인 측면과 문제해석을 위한 수치해석의 기본적인 요소를 모두 포함한다.

기본 유동양들의 평행성을 가정한다면 (식 (16) 이하의 본문 참조), 식 (26)과 (27)은 아래와 같이 아주 간단하게 표시된다.

$$\begin{aligned} & i(\alpha U - \omega) \left(D^2 \phi - \frac{\alpha^2}{R^2} \phi \right) - i\alpha \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \phi \\ &= \frac{1}{\Gamma} \left(R^2 D^4 \phi + 2\xi D^3 \phi - 2\alpha^2 D^2 \phi + \frac{\alpha^4}{R^2} \phi \right) \\ &+ \frac{1}{\Gamma} Ds \end{aligned} \quad (26)^*$$

$$\begin{aligned} & i(\alpha U - \omega) s - i\alpha \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \phi = \frac{1}{Pr\Gamma} (R^2 D^2 s \\ &+ \xi Ds - \alpha^2 s) \end{aligned} \quad (27)^*$$

그리고 기본속도 U 의 경계층 가장자리에 η_∞ 를 위치시킬 수 있다. 따라서 안정성 문제(즉, $\eta = \eta_\infty$ 로 주어진 식 (26)*, (27)*, (31a) 및 (33)에 대한 수학적 계를 풀기 위한 수치방법은 Hieber와 Gebhart⁽⁹⁾, 또는 Chen과 Mucoglu⁽¹⁰⁾의 방법과 매우 유사한데, 단지 본 연구에서는 수치적분에 내재해 있는 parasitic error의 성장을 억제하기 위해 4차의 Runge-Kutta 방법을 이용한 적분의 매 구간마다 Gram-Schmidt orthonormalization 절차(Wazzan 등⁽¹¹⁾; Tzuoo 등⁽¹¹⁾)를 적용한 것만이 다를 뿐이다. 고유치를 계산하기 위한 수치방법을 좀더 구체적으로 살펴보면 다음과 같다. 주어진 Prandtl 수, Pr 과 곡률효과 ξ 에 대해 두개의 변수 Γ 와 ω 가 미리 설정되고 남은 두개의 변수 α_r 과

α_i 는 추정된다. 다음에, (ϕ_1, s_1) , (ϕ_2, s_2) 및 (ϕ_3, s_3) 의 개개의 선형 독립해들은 $\eta = \eta_\infty$ 로부터 시작하여 $\eta = 0$ 인 원통벽으로 적분된다. 원통벽에서 두개의 경계조건 (31a) (즉, $\phi(0) = D\phi(0) = 0$)가 C_2 와 C_3 를 결정하기 위해 사용되고 결정된 C_2 와 C_3 를 다음 식에 대입시킴으로써

$$s(0) = s_1(0) + C_2 s_2(0) + C_3 s_3(0)$$

남아 있는 경계조건 $s(0) = 0$ 이 만족되는가를 검사한다. 만족되지 않은 경우에는 추정된 변수 α_r 와 α_i 를 Newton-Raphson 방법을 이용하여 개선한다. α_r 과 α_i 의 새로운 값을 가지고 선형 독립해를 적분하고 C_2 와 C_3 를 결정하는 과정은 $s(0) = 0$ 의 조건이 미리 설정된 수렴한계 $|s(0)| < 10^{-4}$ 의 내에서 만족될 때까지 반복된다. 중립 안정성 곡선을 얻기 위하여는 $\alpha_i = 0$ 의 위치가 $|s(0)| < 10^{-4}$ 의 수렴한계내에서 결정될 때까지 새로 설정되는 ω 의 값을 가지고 전 과정이 반복된다. 곡률효과 ξ 가 0.2에서 5.0까지 변함에 따라 기본 유동과 교란된 양들 모두의 수치적분에서 η_∞ 의 값(이 경우에는 경계층 두께)은 12에서 60까지의 범위에 있다. 안정성 방정식 각각의 수치적분에 있어서 600개의 구간까지 취해졌다. 모든 계산은 복소수 2중 정확도를 이용하여 MV 8000 미니 컴퓨터에서 수행되었다.

4. 결과 및 검토

가열된 수직 원통주위의 자연대류에 대한 파형 안정성해석은 본 연구에서 최초로 수행되었으므로 먼저 안정성 방정식의 형태를 평판의 경우와 비교함으로써 타당성을 확인할 수 있는데, 평판의 경우는 곡률효과 $\xi = 0$ 인 한계경우로 취급할 수 있다. 사실상, 식 (24)와 (30)을 고려하여 안정성 방정식 (26)과 (27)에 $\xi = 0$ 를 대입할 때, 결과하는 식은 기본 유동양들의 비평행성을 고려하여 경사진 등은 평판주위의 파형 불안정성을 연구한 Tzuoo 등⁽¹¹⁾이 유도한 안정성 방정식계 중의 하나에 대응함을 바로 알 수 있다. 식 (26)*과 (27)*에 $\xi = 0$ 를 대입함으로써 얻어지는 식은 기본 유동양들에 대해 평행류 가정을 사용하여 일정 열유속의 수직 평판을 연하는 자연대류 경계층의 파형 불안정성을 연구한 Hieber와 Gebhart⁽⁹⁾가 유도한 것과 정확히 일치하는 방정식의 계를 보여준다.

식 (26)*과 (27)*이 기본 유동양들에 대한 평행성 가정아래 식 (26)과 (27)로부터 유도되었지만,

계수들 U , $\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}$ 및 $\frac{\partial \theta}{\partial \eta}$ 는 식 (5)~(9)를 이용하여 변형된 식 (1)~(4)로부터 얻어지는 식들의 truncation의 1단계에 대응하는 적절한 경계조건을 가지는 국소 상사방정식의 해로부터 구해진다. Fig. 1과 2에서는 $Pr=7$ 에 있어서 곡률효과 ξ 의 여러 값에 대한 기본온도 분포 θ 와 기본속도 분포 $U = \frac{\partial F}{\partial \eta}$ 를 보여준다. $Pr=0.7$ 에 대한 기본 유동 값들은 Minkowycz와 Sparrow⁽³⁾의 결과를 재현하는 것이므로 지면을 절약하기 위해 여기서는 생략한다. 이런 기본 유동값들은 η_∞ 의 위치를 결정하는 기초자료와 상미분 방정식 (26)*과 (27)*의 계수값으로 제공된다.

Fig. 3에서는 $Pr=0.7$ 에 있어서 곡률효과 ξ 의 여러 값에 대한 중립 안정성 곡선을 $\alpha_r - \Gamma$ 평면에 나타내었다. 수정된 Bessel 함수의 형태로 나타낸 점근적 표현식은 분모에 ξ 를 포함하고 있기 때문

에, $\xi=0$ 인 곡선은 기본 유동양들에 대한 평행성 가정하에 등온 수직평판을 연하는 자연대류 유동의 파형 불안정성 해석을 다시 수행함으로써 개별적으로 얻어야 한다. 이 곡선은 Nachtsheim⁽¹²⁾에 의해 얻어졌고 Haaland와 Sparrow⁽¹³⁾에 의해 재현된 곡선과 정확히 일치한다. ξ 가 아주 작은 값을 갖는 경우에는, 즉 $\xi=0.2$ 일 때는 곡선은 $\xi=0$ 인 경우보다 조금 더 낮은 수정된 임계 국소 Grashof 수 Γ_{crit} 를 예측한다. 그 값들은 Table 1에 주어져 있는데 Fig. 3의 척도안에서는 그 차이를 식별할 수 없다. 이것은 변형된 식의 낮은 truncation 단계에 주로 기인한다고 생각되지만, 중대한 문제는 야기시키지는 않는다고 판단된다.

계산은 ξ 의 작은 값부터, 즉 $\xi=0.2$ 부터 점진적으로 ξ 의 더 큰 값에 대해 수행하였다. 곡률효과 변수 ξ 가 증가함에 따라 Γ_{crit} 의 값이 증가하는 것은 매우 주목할 만하다. 이것은 같은 특성 경계층 두께 $\delta(x)$ 에 대응하는 유동은 원통반경 r_0 가 평판

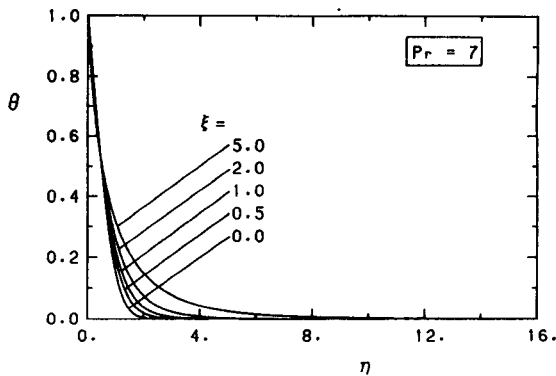


Fig. 1 Basic temperature profiles for $Pr=7$

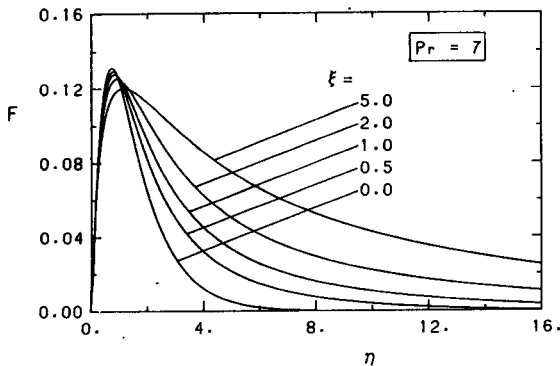


Fig. 2 Basic velocity profiles for $Pr=7$

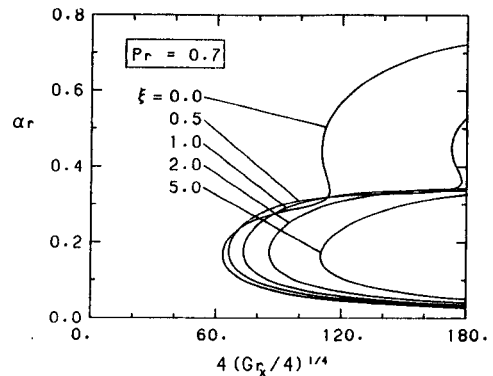


Fig. 3 Representative neutral stability curves for $Pr=0.7$ in the $\alpha_r - \Gamma$ plane

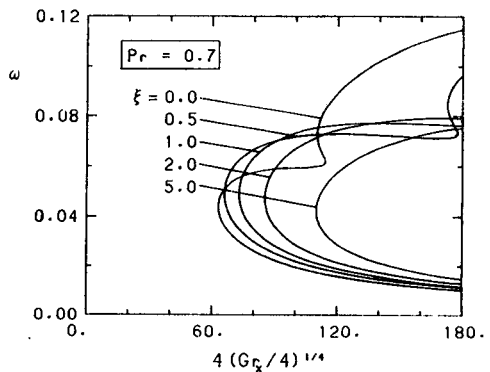


Fig. 4 Representative neutral stability curves for $Pr=0.7$ in the $\omega - \Gamma$ plane

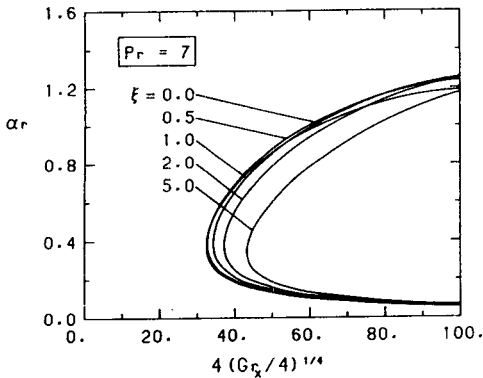


Fig. 5 Representative neutral stability curves for $Pr = 7$ in the $\alpha_r - \Gamma$ plane

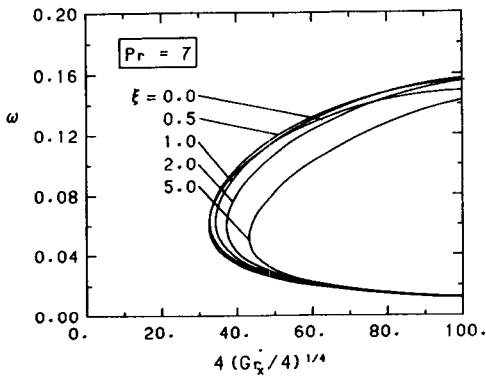


Fig. 6 Representative neutral stability curves for $Pr = 7$ in the $\omega - \Gamma$ plane

으로부터 더 작아짐에 따라 더 안정해지는 것을 의미 한다고 이해될 수 있다. 다시 말해서, 같은 경계층 두께에 대해 원통반경이 작아짐에 따라 경계층안으로 침투하기 보다는 유동방향으로 이동되려는 축대칭 교란의 경향이 강해진다.

다음에는 임계 파수 $\alpha_{r,crit}$ 이 ξ 의 값에 무관하며 중립 안정성곡선의 윗 가지는 ξ 가 증가함에 따라 서로 교차되는 것을 알 수 있다. 이것은 Fig. 4에서 보여지는 $\omega - \Gamma$ 평면에서의 중립 안정성곡선과는 대조적인데, 즉 임계 파수 ω_{crit} 는 어느 정도 ξ 에 의존하여 변하고 $\omega - \Gamma$ 곡선의 교차는 더욱 현저하다.

안정성 특성에 대한 기본 유동과 온도장의 비평행성 효과에 대하여는 아직도 해석의 여지가 남아 있다. 그렇지만, Haaland와 Sparrow⁽¹³⁾에 의해 수행된 등온의 수직평판에 대한 이전의 연구에서 본 바와 같이 안정성 곡선이 더 높은 Grashof 수 쪽으로 이동되면서 안정성 특성의 대부분은 같은

Table 1 Critical values for $Pr=0.7$ and 7

Pr	ξ	$4(Gr_x/4)^{1/4}$	α_r	ω
0.7	0.0	63.2	0.169	0.0441
	0.2	62.4	0.174	0.0478
	0.5	66.2	0.177	0.0493
	1.0	73.2	0.176	0.0494
	2.0	85.5	0.173	0.0474
	5.0	110.1	0.161	0.0421
7.0	0.0	32.5	0.374	0.0600
	0.2	32.2	0.380	0.0614
	0.5	32.8	0.383	0.0621
	1.0	34.4	0.383	0.0618
	2.0	37.3	0.375	0.0592
	5.0	43.3	0.338	0.0510

것으로 예상된다.

Fig. 5와 Fig. 6에서는 ξ 의 여러 값에 있어서 $Pr = 7$ 인 경우의 안정성 곡선을 $\alpha_r - \Gamma$ 평면 그리고 $\omega - \Gamma$ 평면에 각각 나타내었다. 일반적인 경향은 $Pr = 0.7$ 인 경우와 유사하지만 여기서는 Γ_{crit} 의 값이 ξ 의 값에 따라 그다지 변하는 것 같지 않다. 즉, $Pr = 7$ 인 경우의 안정성 특성은 $Pr = 0.7$ 인 경우처럼 원통의 곡률에 민감하게 영향을 받지 않는다.

이상에서 얻어진 결과가 Table 1에 요약되어 있는데, $Pr = 0.7$ 과 7인 경우의 임계값들이 주어져 있다. 불행히도, 현재의 이론적인 예측을 입증할 만한 유용한 실험자료가 없다. 그렇지만, 공학적인 관점에서 수직평판의 경우와 마찬가지로 중요한 비중을 차지하는 수직 등온이나 수직 일정 열유속의 원통을 연하는 자연대류의 파형 불안정성 특성을 연구하는 데 대한 많은 관심이 요구된다. 현재의 연구가 이 분야에 대한 앞으로의 실험적 또는 수치적 연구에 기초로서 기여되기를 바란다.

5. 결 론

수직 등온의 원통면을 연하는 자연대류 유동의 파형 불안정성에 대한 안정성 문제가 기본 유동과 온도장의 비평행성에 근거하여 구성되었다. 이 문제는 기본 유동양들의 평행성 가정을 써서 단순화

되었고 $Pr=0.7$ 과 7에 대해 해석되었다. 동일한 특성 경계층두께에 대응하는 유동은 곡률변수 ξ 의 값이 증가함에 따라 더욱 안정해진다는 것이 보여진다. $Pr=7$ 에 대한 안정성 특성은 $Pr=0.7$ 에 대한 경우만큼 민감하게 곡률변수의 영향을 받지 않는다.

후 기

본 연구는 한국과학재단에 의해 연구비 지원을 받았으므로 이에 심심한 감사의 뜻을 포함합니다.

참 고 문 헌

- (1) Tzuoo, K.L., Chen, T.S., and Armaly, B.F., 1985 "Wave Instability of Natural Convection Flow on Inclined Surfaces", J. Heat Transfer, Vol. 107, pp. 107~111.
- (2) Lee, S.L., Chen, T.S., and Armaly, B.F., 1987, "Wave Instability Characterisitcs for the Entire Regime of Mixed Convection Flow along Vertical Flat Plates", Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 30, No. 8, pp. 1743~1751.
- (3) Minkowycz, W.J., and Sparrow, E.M., 1974, "Local Nonsimilar Solutions for Natural Convection on a Vertical Cylinder", J. Heat Transfer, Vol. 96, p. 178.
- (4) Lee, S.L., Chen, T.S., and Armaly, B.F., 1987, "Mixed Convection along Vertical Cylinders and Needles with Uniform Surface Heat Flux", J. Heat Tranfer, Vol. 109, pp. 711~716.
- (5) Lee, H.R., Chen, T.S., and Armaly, B.F., 1988, "Natural Convection along Slender Vertical Cylinders with Variable Surface Temperature", J. Heat Trasfer, Vol. 110, pp. 103~108.
- (6) Yao, L.S., 1987, "Is a Fully-developed and Non-isothermal Flow Possible in a Vertical Pipe", Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 30, No.4, pp. 707~716.
- (7) Yao, L.S., 1987, "Linear Stability Analysis for Opposing Mixed Convection in a Vertical Pipe", Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 30, No. 4, pp. 810~811.
- (8) McFadden, G.B., Coriell, S.R., and Boisvert, R.F., 1984, "Asymmetric Instabilities in Buoyancy Driven Flow in a Tall Vertical Annulus", Phys. Fluids, Vol. 27, No.6, pp. 1359~1361.
- (9) Hieber, C.A., and Gebhart, B., 1971, "Stability of Vertical Natural Convection Boundary Layers : Some Numerical Solutions", J. Fluid Mech., Vol. 48, Part 4, pp. 625~646.

- (10) Chen, T.S., and Mucoglu, A., 1979, "Wave Instability of Mixed Convection Flow over a Horizontal Flat Plate", Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 22, pp. 185~196.
- (11) Wazzan, A.R., Okamura, T.T., and Smith, H.M. O., 1967, "Stability of Laminar Boundary Layer at Separation", Physics of Fluids, Vol. 190, p. 2540.
- (12) Nachtsheim, P.R., 1963, "Stability of Free Convection Boundary Layer Flows", NASA TN D-2089.
- (13) Haaland, S.E., and Sparrow, E.M., 1973, "Wave Instability of Natural Convection on Inclined Surfaces Accounting for Nonparallelism of the Basic Flow", J. Heat Transfter, Vol. 96, pp. 405~407.

부 록

- ϕ 와 s 의 점근해-

$\eta > \eta_{\infty}$ 의 부영역에서 기본 유동양들은 해석 방법의 전반부에서 논의되었던 바와 같이 점근적으로 소멸되고 식 (26)과 (27)은 다음과 같이 단순화된다.

$$-i\omega\Gamma(D^2\phi - \frac{\alpha^2}{R^2}\phi) + Ds = R^2D^4\phi + 2\xi D^3\phi - 2\alpha^2D^2\phi + \frac{\alpha^4}{R^2}\phi, \quad (A1)$$

$$-i\omega Pr\Gamma s = R^2D^2s + \xi Ds - \alpha^2s. \quad (A2)$$

$\xi = \delta(x)/r_0$ 를 곡률변수로 고려하는 한, 변수들의 변형 $R = r/r_0 = (1 + \xi\eta)^{1/2}$ 을 미분 연산자에 도입함으로써 다음과 같이 쓴다.

$$D(\) = \frac{d(\)}{d\eta} = \frac{\xi}{2R} \frac{d(\)}{dR},$$

$$D^2(\) = \frac{d^2(\)}{d\eta^2} = \left(\frac{\xi}{2}\right)^2 \frac{1}{R^2} \frac{d^2(\)}{dR^2} - \frac{1}{R^3} \frac{d(\)}{dR},$$

etc.

따라서, 식 (A1)과 (A2)는 다음과 같이 다시 쓰여진다.

$$\left(\frac{d^2}{dR^2} - \frac{1}{R} \frac{d}{dR} - \frac{4\beta^2}{\xi^2}\right) \left(\frac{d^2}{dR^2} - \frac{1}{R} \frac{d}{dR} - \frac{4\alpha^2}{\xi^2}\right)\phi - \frac{8}{\xi^3}R \frac{ds}{dR} = 0, \quad (A3)$$

$$\left(\frac{d^2}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{d}{dR} - \frac{4\gamma^2}{\xi^2}\right)s = 0 \quad (A4)$$

여기서 β 와 γ 는 식 (35)에 정의된 바와 같다. 세 쌍의 선형 독립해 (ϕ_1, s_1) , (ϕ_2, s_2) 와 (ϕ_3, s_3) 는 Chen과 Mucoglu⁽¹⁰⁾에 의해 설명된 바와 같은 절차를 따라 구해진다. 먼저, 위의 방정식의 계의 비연성 해는 식 (A3)에 $s=0$ 를 대입함으로써 찾아진다. 결과적으로 얻어지는 방정식의 해는 $\eta \rightarrow \infty$ 에 따라 점근적으로 소멸하며 식 (34a)와 (34b)에 이미 주어져 있다. 다음에 식 (A4)의 해가 구해지고, 이것이 식 (A3)에 대입되어 얻어진 해가 구해지도록 하는데, 이는 식 (34c)에 대응된다.