

〈論 文〉

수정된 선형계획법을 이용한 다물체 탄성 접촉 문제 해석

이대희* · 전범준** · 최동훈*** · 임장근**** · 윤갑영***

(1988년 10월 5일 접수)

Multibody Elastic Contact Analysis by Modified Linear Programming

Dae-Hee Lee, Bum-Joon Chun, Dong-Hoon Choi, Jang-Keun Lim
and Gab-Young Yoon

Key Words : Multibody(다물체), Elastic Contact Analysis(탄성 접촉 해석) Modified Linear Programming(수정된 선형 계획법), Finite Element Method(유한 요소법)

Abstract

A general and efficient algorithm is proposed for the analyses of multibody elastic contact problems. It is presumed that there exists negligible friction between the bodies. It utilizes a simplex type algorithm with a modified entry rule and incorporates finite element method to obtain flexibility matrices for arbitrarily shaped bodies. The multibody contact problem of a vehicle support on an elastic foundation is considered first to show the effectiveness of the suggested algorithm. Its solution is compared favorably with the existing solution. A contact problem among inner race, rollers and outer race is analyzed and the distribution of load, rigid body movements and contact pressure distributions are obtained. The trend of contact characteristics is compared with that of the idealized Hertzian solutions for two separate two-body contact problems. The numerical results obtained by directly treating a multibody contact are believed to be more exact than the Hertzian solution for the idealized two separate two-body contact problems.

기 호 설 명

\mathbf{a}	: 초기 간격 벡터와 외력에 대한 탄성 변형 벡터의 합	$\underline{H}, \underline{H}^i$: 외력에 대한 운동학적 변환 행렬
$\underline{A}, \underline{A}^{ij}$: 탄성 변위에 대한 운동학적 변환 행렬 (kinematic transformation matrix)	$\underline{I}_N, \underline{I}_R$: 단위 행렬 (Identity matrix)
\underline{B}	: 연성 행렬 (flexibility matrix)	n, N	: 예상 접촉점의 수
\mathbf{d}^{ij}	: 초기 간격 벡터	p_k^{ij}, p_k^{ji}	: 임의의 예상 접촉점
\underline{F}^{ij}	: 영양 계수 행렬	\mathbf{q}, \mathbf{q}^i	: 강제 운동 변위 벡터
\underline{F}_k^{ij}	: \mathbf{s}^{ik} 가 Γ^{ij} 의 모든 접촉점에서 변형에	R	: 강제 운동 변위의 자유도
		$\mathbf{s}, \mathbf{s}^{ij}$: 각 물체의 접촉력 벡터
		s_n, s_n^{ij}	: 임의의 k 점에서의 접촉력
		\mathbf{t}, \mathbf{t}^i	: 외력 벡터
		$\mathbf{u}^{ij}, \mathbf{u}^{ji}$: 수직 변위 벡터
		\mathbf{u}_e^{ij}	: 탄성 변형 벡터
		\mathbf{v}_e^{ij}	: 외력에 의한 탄성변형 벡터

* 정회원, 한양대학교 대학원

** 한양대학교 대학원

*** 정회원, 한양대학교 공과대학 기계설계학과

**** 정회원, 한양대학교 공과대학 기계공학과

δw	: 가상일
Z_j	: 임의 변수
Z_N	: 임의 변수 벡터
ϵ, ϵ^{ij}	: 변형후의 간격 벡터
ϵ_k	: 임의의 k 점에서의 변형후의 간격
Γ^{ij}, Γ^{ji}	: 임의의 예상 접촉 영역

1. 서 론

3개 이상의 물체가 접촉하는 기계 부품이나 구조물등에 있어서는 각각의 기계 부품과 구조물의 하중 분담 능력이 외부 하중이 변함에 따라 달라지기 때문에 보다 나은 기계나 구조물의 설계를 하기 위해서는 하중의 분담 상태를 알고 분담 하중에 의한 접촉 영역의 크기, 접촉 압력의 분포 형태 및 강체 운동 변위를 알 필요가 있고 이를 위해서는 3개 이상의 물체가 접촉하고 있는 경우에서의 접촉 문제 해석이 요구된다.

두 물체의 접촉 문제는 1882년 Hertz⁽¹⁾에 의해 연구가 이루어진 이래 탄성론을 이용한 많은 연구가 이루어져 Hertz 이론을 연장 발전시켰다^(2~4). Hertz의 이론은 반무한체에 대한 탄성론을 이용하여 해석하였기 때문에 접촉 영역의 크기가 접촉 물체의 크기에 비해 매우 작은 경우에만 적용이 가능하였다. 그러나 일반적으로 접촉 영역은 기계 부품이나 구조물의 형상에 따라 Hertz의 가정이 적용될 수 없는 경우가 많으며 이러한 접촉 문제를 해석하기 위한 수치적 방법들이 제안되었다. 1971년 Conry와 Seireg⁽⁵⁾가 Hertz의 가정이 적용될 수 없는 경우의 접촉 문제를 효율적으로 해석할 수 있는 산법을 개발하였으나 이들의 산법에는 임의 형상의 물체사이의 접촉 문제 해석에 필요한 영향 계수를 효과적으로 계산할 수 있는 일반적인 방법이 포함되어 있지 않다. 요구되는 영향 계수들을 효과적으로 구하기 위하여 프론타법(frontal method)을 사용한 유한 요소법을 적용한 연구가 1977년 Francavilla와 Zienkiewicz⁽⁶⁾, 1981년 Sachdeva, Natarajan 및 Ramakrishnan⁽⁷⁾에 의해 이루어졌다. 그러나 Conry와 Seireg가 최적화 기법을 적용하여 한번에 해를 구하는 반면 이들의 기법은 반복법을 사용해야하는 단점이었다.

3개 이상의 물체가 접촉하고 있는 다물체 접촉 문제에 대한 해석법으로 1977년 Haug, Chand 및 pan⁽⁸⁾은 2차계획법을 이용한 수치 해석법을 제안하

였다. 그러나 이들의 산법은 마찰을 무시할 수 있고 탄성 변형만을 하는 보존계의 해석에만 적용할 수 있는 제한이 있으며 필요한 영향 계수들을 이론적으로 구할 수 있는 예제만을 다루었다. 또한 1987년 Joo⁽⁹⁾는 3점 굽힘 시험 문제에만 적용될 수 있도록 다물체 접촉 문제를 수식화하여 편치, 지지대, 굽힘 변형만을 하는 물체사이의 접촉 문제를 해석하였다.

본 연구에서는 마찰을 무시할 수 있는 경우의 일반적인 다물체 탄성 접촉 문제를 수식화하고 이를 최적화 문제로 변환한 후 수정된 선형 계획법을 이용하여 임의 형상의 다물체간의 접촉 문제를 해석할 수 있는 산법을 제시하였다. 임의 형상을 가진 탄성체의 접촉 영역에서의 영향 계수를 구하기 위하여 프론타법을 사용한 유한 요소법을 적용하여 비교적 적은 컴퓨터 기억 용량으로 필요한 영향 계수를 효과적으로 구하였다. 제안된 산법을 기존에 수치적으로 해석되었던 바퀴, 보와 탄성 지지대 사이의 접촉 문제⁽⁸⁾에 적용하여 기존의 결과와 잘 일치함을 보임으로써 제안된 산법의 정확성과 유효성을 보였고 원통형 로울러 베어링에 적용하여 내륜, 로울러와 외륜사이의 다접촉 문제를 해석하여 각 로울러들의 하중 분담 상태, 강체 변위, 접촉 압력 분포를 구하여 두 물체 접촉 문제로 이상화하여 Hertz 이론은 적용한 결과보다 최대 접촉 압력은 크며 접촉 영역은 줄어들음을 알 수 있었다.

2. 다물체 접촉 문제의 수식화

본 연구에서 다물체 접촉 문제를 해석하기 위하여 가정된 사항은 다음과 같다.

- (1) 접촉부의 마찰은 무시할 수 있다.
- (2) 변형은 선형 탄성론을 따른다.

Fig. 1에서와 같이 물체 i 와 물체 j 사이의 접촉으로 인하여 생기는 물체 i 의 예상 접촉 영역을 Γ^{ij} 라 하고 물체 j 의 예상 접촉 영역을 Γ^{ji} 라 하

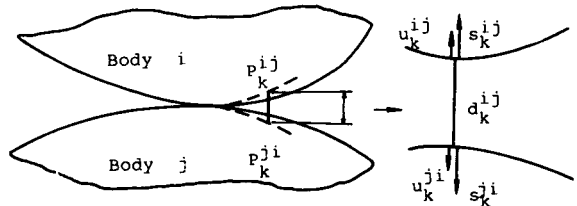


Fig. 1 Surface loads and displacements

며, 각 물체에 속한 임의의 한 쌍의 예상 접촉점을 p_k^{ij} , p_k^{ji} 로 표기한다. 또한 u_k^{ij} , u_k^{ji} 는 한 쌍의 예상 접촉점에서의 탄성변위와 강체 운동 변위에 의한 법선 변위를, s_k^{ij} , s_k^{ji} 는 법선 접촉력을, 그리고 d_k^{ij} 는 그 점에서의 초기 간격을 나타낸다. 이때 위의 첫번째 상점자는 접촉점이 위치한 물체를 나타내고 두번째 상점자는 접촉하는 상대 물체를 나타내며 하점자는 임의의 접촉점을 나타낸다.

임의의 한 쌍의 예상 접촉점에서의 접촉력은 같아야 하므로

$$s_k^{ij} = s_k^{ji} \quad (1)$$

이 된다. 물체 i 와 물체 j 의 접촉으로 인한 n 개의 예상 접촉점에서의 접촉력과 변위를 아래와 같이 벡터로 나타낸다.

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^{ij} &= [s_1^{ij}, s_2^{ij}, \dots, s_n^{ij}]^T \\ \mathbf{u}^{ij} &= [u_1^{ij}, u_2^{ij}, \dots, u_n^{ij}]^T \end{aligned} \quad (2)$$

2.1 변형에 대한 적합 조건식

물체 i 와 물체 j 의 접촉으로 인한 모든 예상 접촉점 사이의 변형 후 간격은 탄성 변형 및 강체 변위로 인한 법선 변위와 초기 간격의 합이므로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{e}^{ij} = \mathbf{u}^{ij} + \mathbf{u}^{ji} + \mathbf{d}^{ij} \quad (3)$$

여기서 \mathbf{e}^{ij} 은 예상 접촉점에서의 변형 후 간격 벡터이다.

접촉영역 Γ^{ij} 에 속해있는 모든 예상 접촉점에서의 탄성 변위 벡터 \mathbf{u}^{ij} 는 물체 i 와 접촉하고 있는 모든 물체와의 접촉 영역에서 발생하는 접촉력에 의한 변위와 물체 i 에 가해진 외력 벡터 \mathbf{t}^i 에 의한 변위의 합이므로 다음 식과 같이 표현될 수 있다.

$$\mathbf{u}_e^{ij} = \sum_k \mathbf{F}_k^{ij} \mathbf{s}^{ik} + \mathbf{v}_e^{ij} \quad (4)$$

여기서 \mathbf{F}_k^{ij} 는 물체 i 와 임의의 물체 k 의 접촉영역 Γ^{ik} 에 작용하는 접촉력 벡터 \mathbf{s}^{ik} 가 Γ^{ij} 에 속해 있는 모든 예상 접촉점에서의 법선변위에 미치는 영향을 나타낸 영향계수행렬이고, \mathbf{v}_e^{ij} 는 외력 \mathbf{t}^i 에 의한 Γ^{ij} 상의 예상 접촉점에서의 법선 변위 벡터이다.

이제 모든 예상 접촉점 사이의 법선 변위는 식 (4)의 탄성 변위와 강체 변위로 인한 법선 변위의 합이므로 다음 식과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{u}^{ij} = \sum_k \mathbf{F}_k^{ij} \mathbf{s}^{ik} + \mathbf{v}_e^{ij} + \mathbf{A}^{ij} \mathbf{q}^i \quad (5)$$

여기서 \mathbf{q}^i 는 물체 i 의 강체 변위 벡터이고, \mathbf{A}^{ij} 는 Γ^{ij} 에서의 \mathbf{q}^i 에 대한 법선 방향으로의 운동학

적 변환 행렬(kinematic transformation matrix)이다. 식(5)를 식(3)에 대입하여 정리하면 다음 식이 된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{ij} &= (\sum_k \mathbf{F}_k^{ij} \mathbf{s}^{ik} + \mathbf{A}^{ij} \mathbf{q}^i + \mathbf{v}_e^{ij}) + \\ &(\sum_l \mathbf{F}_l^{ji} \mathbf{s}^{jl} + \mathbf{A}^{ji} \mathbf{q}^j + \mathbf{v}_e^{ji}) + \mathbf{d}^{ij} \end{aligned} \quad (6)$$

다물체 접촉에 의해 생기는 모든 접촉 영역에서의 접촉력과 변형 후 간격을 아래와 같이 표기하고

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= [\mathbf{s}^{12T}, \mathbf{s}^{13T}, \dots, \mathbf{s}^{23T}, \mathbf{s}^{24T}, \dots]^T \\ \mathbf{e} &= [\mathbf{e}^{12T}, \mathbf{e}^{13T}, \dots, \mathbf{e}^{23T}, \mathbf{e}^{24T}, \dots]^T \end{aligned} \quad (7)$$

모든 물체의 강체 변위를 다음과 같이 표기한다.

$$\mathbf{q} = [\mathbf{q}^{1T}, \mathbf{q}^{2T}, \dots]^T \quad (8)$$

이제 Γ^{ij} 에서의 변형 적합조건식 식(6)을 구한 것과 같은 방법으로 다물체 접촉으로 인한 각 접촉영역에 대한 변형 적합 조건식을 세워 연립시키면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{e} = \mathbf{B}\mathbf{s} + \mathbf{A}\mathbf{q} + \mathbf{a} \quad (9)$$

여기서 \mathbf{a} 는 계산될 수 있는 상수 벡터로

$$\mathbf{a} = [\mathbf{a}^{12T}, \mathbf{a}^{13T}, \dots, \mathbf{a}^{23T}, \mathbf{a}^{24T}, \dots]^T \quad (10)$$

이며

$$\mathbf{a}^{ij} = \mathbf{v}_e^{ij} + \mathbf{v}_e^{ji} + \mathbf{d}^{ij} \quad (11)$$

이다.

2.2 평형 방정식

가상 일의 원리를 적용하여 물체 i 에 대한 평형 방정식을 구한다.

가상 강체 변위 $\delta \mathbf{q}^i$ 로 인한 물체 i 에 작용하는 모든 힘에 의한 가상 일은 아래 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\delta w^i = \sum_j \mathbf{s}^{ijT} \mathbf{A}^{ij} \delta \mathbf{q}^j + \mathbf{t}^{iT} \mathbf{H}^i \delta \mathbf{q}^i \quad (12)$$

여기서 \mathbf{H}^i 는 $\delta \mathbf{q}^i$ 에 대한 외력 방향으로의 변환 행렬이다.

가상 일의 원리에 의하면 임의의 $\delta \mathbf{q}^i$ 에 대해 δw^i 는 0이므로 물체 i 에 대하여 다음의 평형 방정식을 얻을 수 있다.

$$\sum_j \mathbf{A}^{ijT} \mathbf{s}^{ij} + \mathbf{H}^{iT} \mathbf{t}^i = 0 \quad (13)$$

여기서 합은 물체 i 와 접촉하고 있는 모든 물체에 행한다.

다물체 접촉체에 속한 모든 물체에 위와 같은 방법으로 평형 방정식을 세우고, 이들을 연립시키면 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{A}^T \mathbf{s} + \mathbf{H}^T \mathbf{t} = 0 \quad (14)$$

여기서 $\mathbf{t} = [\mathbf{t}^{1T}, \mathbf{t}^{2T}, \dots]^T$ 이다.

2.3 접촉 조건

다물체 접촉계에 속한 각 예상 접촉점은 접촉하고 있거나 ($\epsilon_k=0$), 또는 분리되어 있어야 한다 ($s_k=0$). 이와 같은 접촉 조건은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\epsilon_k=0 \text{ or } s_k=0 \quad k=1, 2, \dots, N \quad (15)$$

여기서 N 은 다물체 접촉계에 속한 모든 예상 접촉점의 수이다.

2.4 Nonnegativity

각 예상 접촉 점에서의 접촉력과 변형 후 간격은 음의 값을 가질 수 없으므로 아래의 부등식을 만족하여야 한다.

$$\epsilon_k \geq 0, \quad s_k \geq 0 \quad k=1, 2, \dots, N \quad (16)$$

이제 다물체 접촉 문제는 다음의 연립 방정식과 부등식을 만족하는 \mathbf{s} , \mathbf{q} , $\boldsymbol{\epsilon}$ 을 구하는 문제로 수식화될 수 있다.

$$\underline{B}\mathbf{s} + \underline{A}\mathbf{q} - \boldsymbol{\epsilon} = -\mathbf{a} \quad (9')$$

$$\underline{A}^T \mathbf{s} = -\underline{H}^T \mathbf{t} \quad (14')$$

$$\epsilon_k = 0 \text{ or } s_k = 0 \quad k=1, 2, \dots, N \quad (15)$$

$$s_k \geq 0, \quad \epsilon_k \geq 0 \quad k=1, 2, \dots, N \quad (16)$$

3. 유한 요소법을 이용한 영향 계수의 계산

임의 형상의 탄성 접촉에 대한 영향 계수 행렬 \underline{B} 를 구하기 위하여 유한 요소법을 적용한다. 해석하고자 하는 모델을 유한 요소화하여 강성 행렬 \underline{K} 는 구하고 이것의 역행렬을 구해 모든 절점에 대한 영향 계수 행렬을 구할 수 있다. 그러나 변형 적합 조건식에서 필요로 하는 영향 계수 행렬 \underline{B} 는 예상 접촉 영역에 속한 극히 일부의 절점에 대한 것이므로 이와같은 경우에는 프론탈법⁽¹⁰⁾을 사용하는 것이 효율적이다.

유한 요소의 각 절점에 대한 강성 행렬은 그 절점을 공유하는 요소에 의해서만 영향을 받는다는 점을 이용하여 예상 접촉 영역에 속한 절점에서의 강성 행렬 만을 남기고 조합 과정에서 예상 접촉 영역에 속하지 않은 절점을 위한 강성 행렬은 소거된다. 이렇게 하여 필요한 절점에서의 응축된 강성 행렬을 구할 수 있다.

본 연구에서는 일반적인 프론탈법을 수정하여 필요한 부분의 영향 계수를 구하였고 그 과정은 다음과 같다.

(1) 접촉 물체를 유한 요소화하고 예상되는 접촉 영역에 포함된 절점을 기억시킨다.

(2) 경계 조건을 적용시킨 후, 유한 요소화된 전체 요소에 대해 조합과 소거 과정을 반복한다. 이때 기억된 절점들은 소거시키지 않는다.

(3) 조합과 소거의 반복이 끝난 후, 기억된 절점에서의 응축된 강성 행렬을 구한다.

(4) 위와 같이하여 얻어진 응축된 강성 행렬의 역행렬을 구해 영향 계수 행렬을 얻는다.

(5) 마찰을 무시할 수 있는 접촉 문제를 해석하기 위해 접촉 면에 수직 방향으로의 힘과 변위만이 필요하므로 위에서 얻어진 영향 계수 행렬에서 접촉 면에 수직인 방향으로의 힘과 변위에 관계되는 열과 행만을 취한다.

4. 최적화 문제로의 변환 및 해법

2절에서 수식화된 접촉 문제는 변수에 제한 조건이 있는 비선형 연립 방정식의 해를 구하는 문제이나 해를 직접 구하기는 매우 어렵다. 본 연구에서 다루고 있는 접촉 문제의 해를 효율적으로 구하기 위해 음의 값을 가질 수 없는 임의의 변수 Z_j 를 도입하여 다음과 같이 동등한 최적화 문제로 변환한다.

$$\text{Minimize } \sum_{j=1}^{N+R} Z_j \quad (17-1)$$

Subject to

$$-\underline{B}\mathbf{s} - \underline{A}\mathbf{q} + \underline{I}_N \boldsymbol{\epsilon} + \underline{I}_R \mathbf{Z}_N = \mathbf{a} \quad (17-2)$$

$$\underline{A}^T \mathbf{s} + \underline{I}_R \mathbf{Z}_R = -\underline{H}^T \mathbf{t} \quad (17-3)$$

$$s_k = 0 \text{ or } \epsilon_k = 0 \quad k=1, 2, \dots, N \quad (17-4)$$

$$s_k \geq 0, \quad \epsilon_k \geq 0 \quad k=1, 2, \dots, N \quad (17-5)$$

$$z_j \geq 0 \quad j=1, 2, \dots, N+R \quad (17-6)$$

여기서 N 은 다물체 접촉계의 모든 예상 접촉점의 수이며 R 은 모든 평형 방정식의 수이다. 또한 $\mathbf{Z}_N = [Z_1, Z_2, \dots, Z_N]$ 이고 $\mathbf{Z}_R = [Z_{N+1}, Z_{N+2}, \dots, Z_{N+R}]$ 이며 \underline{I}_N 과 \underline{I}_R 은 크기 N 과 R 의 단위 행렬을 각각 표시한다.

상기 최적화 문제에서 식(17-4)을 제외한 모든 조건식과 목적 함수가 선형이며 식(17-4)은 선형 계획법의 entry rule을 수정하여 처리할 수 있으므로 다물체 접촉 문제는 수정된 선형 계획법⁽⁵⁾을 적용하여 효율적으로 해석할 수 있다.

마찰을 무시할 수 있는 다물체 접촉 문제 해석을 위한 프로그램을 구조를 Fig. 2에 도시하였다.

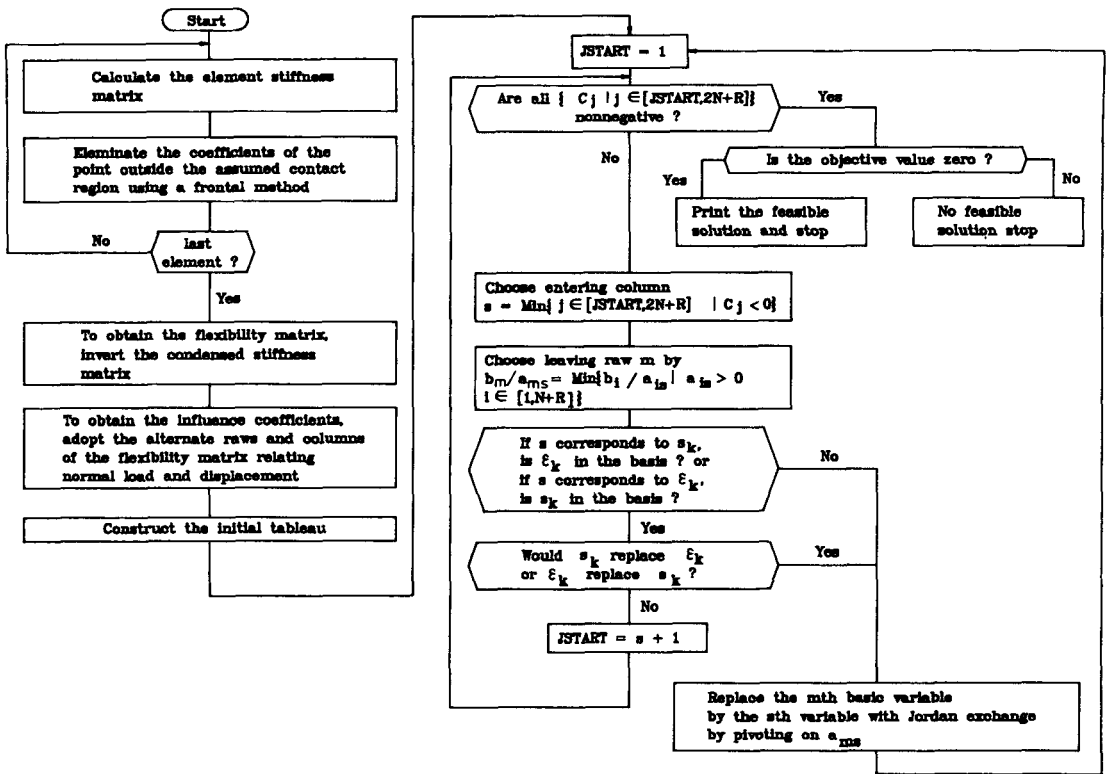


Fig. 2 Flow chart for the frictionless contact problem under a normal load

5. 해석 결과 및 고찰

5.1 탄성지지대, 보와 바퀴 사이의 접촉문제

본 연구에서 제안된 산법의 정확성을 보이기 위하여 이차 계획법을 이용한 기존의 결과⁽⁸⁾가 있는

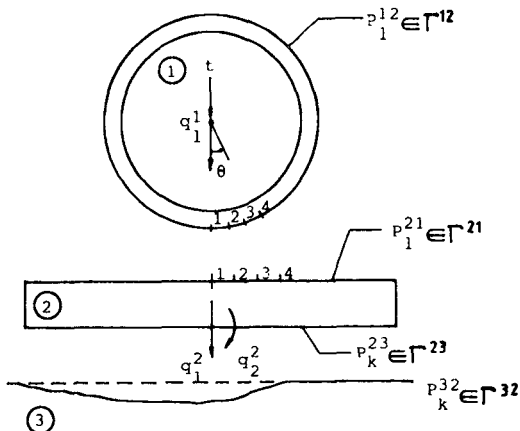


Fig. 3 Wheel and support on elastic foundation

탄성 지지대, 보와 바퀴 사이의 다물체 접촉 문제를 다루었다. 문제 해석을 위한 모델은 Fig. 3에 도시하였다.

탄성 지지대는 영향 계수가 $0.57 \times 10^{-6} \text{m/N}$ (0.0001 in/lb)인 스프링계로, 바퀴는 영향 계수 $0.29 \times 10^{-8} \text{m/N}$ ($0.5 \times 10^{-6} \text{ in/lb}$)의 방사형 스프링계를 모델링하였으며 보 ($EI = 0.113 \times 10^7 \text{ Nm}$ ($10^6 \text{ lb}\cdot\text{in}$))의 처짐은 보 이론을 적용하여 구하였다. 이때 바퀴와 보에 대한 예상 접촉 영역에서의 접촉 점사이의 거리는 $0.443 \times 10^{-2} \text{m}$ (0.1745 inch)로 하고 보와 탄성 지지대에 대한 접촉점 사이의 거리는 $0.127 \times 10^{-1} \text{m}$ (0.5 inch)로 하였으며 바퀴의 직경은 0.254m (10 inch)로 하였다.

Fig. 4은 보와 탄성 지지대의 초기 간격이 0 일 때에 대한 해석 결과를 나타낸 것이다. Fig. 4에서 실선과 점선은 바퀴와 보, 보와 탄성 지지대사이의 접촉력을 나타낸 기존의 결과로서 기호로 표시되어 있는 본연구의 결과와 잘 일치함을 알 수 있다.

두번째 경우로 보와 탄성 지지대와의 초기 간격을 다음과 같이 가정하여 해석하였다.

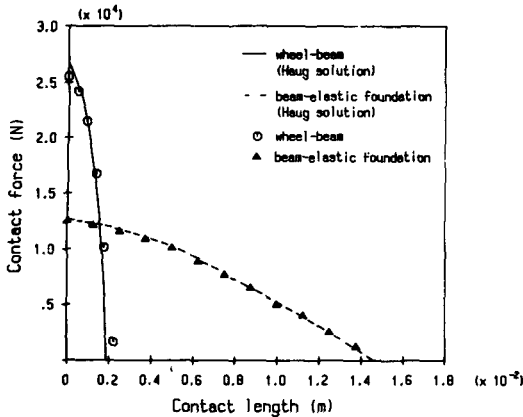


Fig. 4 Contact force with no initial gap between support and foundation

$$d = 0.25 \sin(\pi x / 0.127) \quad 0.0 \leq x \leq 0.127$$

$$d = 0, \quad x < 0.0 \text{ or } x > 0.127$$

해석 결과를 비교한 Fig. 5에서 볼 수 있는 바와 같이 보와 탄성 지지대에 대한 결과는 잘 일치함을 알 수 있고 바퀴와 보에 대한 결과는 차이가 있음을 알 수 있으나 보의 중앙점으로부터 오른쪽으로 초기 간격이 정현함수 곡선 형태로 주어지므로 바퀴와 보사이의 접촉 영역과 최대 접촉 압력이 보의 중앙점에서 왼쪽으로 이동된 본 연구에서 제시한 산법에 의한 결과가 더 정확한 것으로 생각된다.

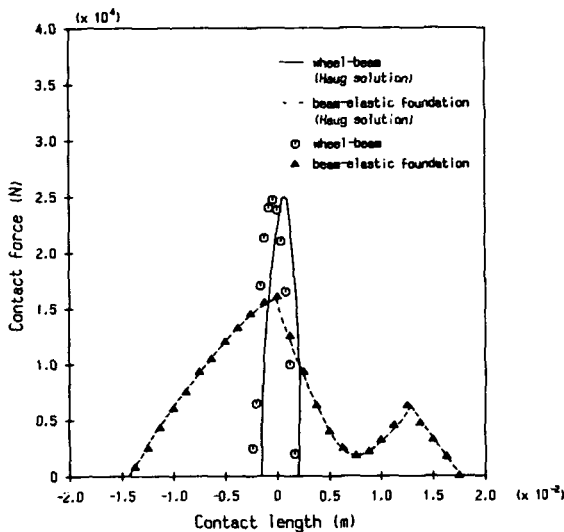


Fig. 5 Contact force with initial gap between support and foundation

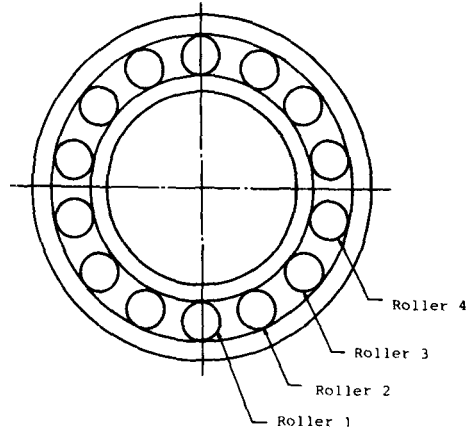


Fig. 6 NU 209 bearing model

5.2 원통형 로울러 베어링의 접촉 문제 해석
실제적인 문제를 다루기 위하여 원통형 로울러 베어링(NU 209)을 고려하였다. 원통형 로울러 베어링에 대한 모델을 Fig. 6에 도시하였고, 각 요소의 치수와 물성치를 Table 1에 나타내었다.

본 연구에서는 40kN의 반경 방향 하중이 작용할 때 원통형 로울러 베어링의 대칭성을 고려하여 1/4만을 해석하였으며 외륜에서 강제 운동을 구속하였다.

원통형 로울러 베어링에서 내륜, 원통형 로울러,

Table 1 Material properties and dimensions of bearing

	Inner race	Roller	Outer race
Modulus of elasticity (E)	206 GPa	206 GPa	206 GPa
Poisson's ratio (ν)	0.3	0.3	0.3
Inner radius (Ri)	22.5mm	...	37.5mm
Outer radius (Ro)	27.5mm	...	42.5mm
Radius (Rr)	...	10mm	...
Width (b)	9.6mm	9.6mm	9.6mm
Clearance (Pd)	0.40mm		
No. of rollers	14		

외륜을 1차 보간 함수를 갖는 isoparametric 요소로 유한 요소화하여 예상 접촉 영역의 각 절점에서 영향 계수를 구한 후 수정된 선형 계획법을 적용하여 각 로울러와 내륜 및 외륜 사이의 8개의 접촉 영역에서 생기는 접촉 압력 분포와 내륜과 각 로울러의 강체 변위를 구하였다.

각 로울러에서의 분담 하중을 Fig. 7에 도시하였으며 그 결과는 기존해⁽¹¹⁾와 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 각 로울러에서의 강체 변위는 Fig. 8에 도시하였다.

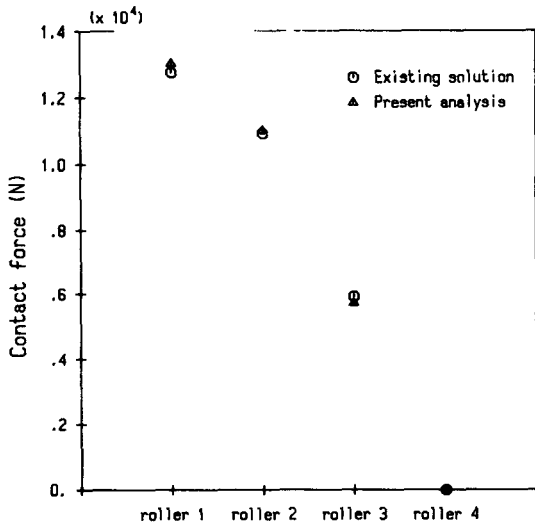


Fig. 7 Force distribution of rollers

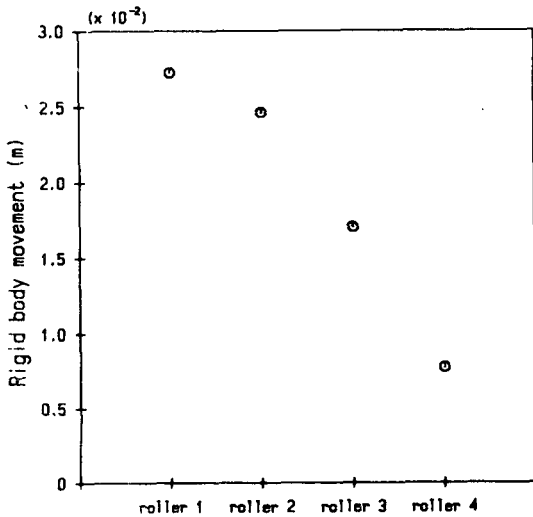


Fig. 8 Rigid body movement of rollers

원통형 로울러 베어링의 내륜, 로울러, 외륜사이의 접촉 압력 분포는 이론적으로 해석이 불가능하여 두 물체의 접촉으로 이상화하여 근사적인 해석이 이루어졌으나 본 연구에서는 다물체 접촉 해석법에 의해서 직접 접촉 압력 분포를 구하였다.

Figs. 9, 10, 11은 본 연구에서 제시한 다물체 접촉 해석법에 의하여 주어진 하중에서 접촉이 이루어진 각 로울러와 내륜, 외륜사이의 접촉 압력 분포를 두물체의 접촉으로 이상화하여 해석한 Hertz 이론에 의한 결과와 비교한 것이다. Figs. 9, 10, 11에서 볼 수 있는 바와 같이 접촉이 이루어진 모든 로울러에서 다물체 접촉으로 해석한 결과가 분담 하중에 의한 근사화된 두 물체 접촉으로

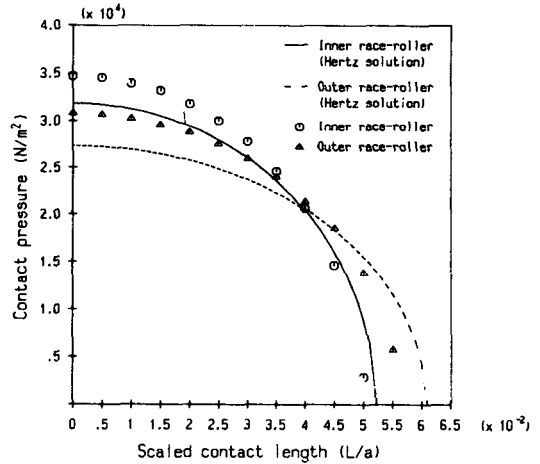


Fig. 9 Contact pressure distribution of roller 1

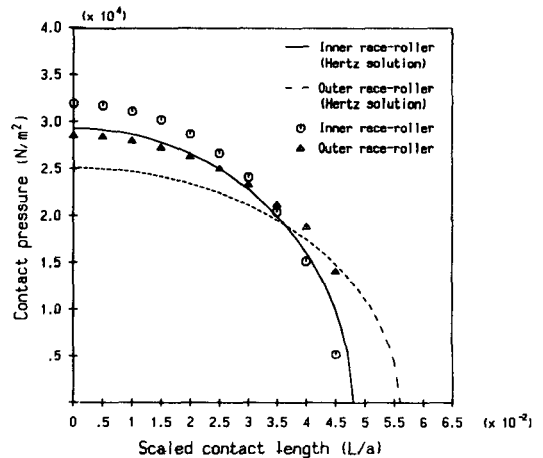


Fig. 10 Contact pressure distribution of roller 2

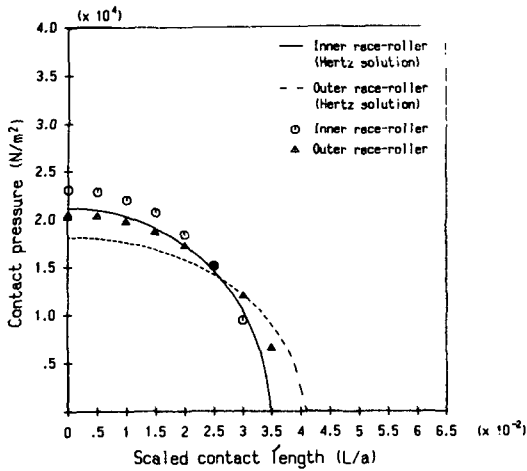


Fig. 11 Contact pressure distribution of roller 3

해석한 결과보다 최대 접촉 압력이 좀 더 크며 접촉 길이는 줄어들음을 알 수 있다.

6. 결 론

본 연구에서는 마찰을 무시할 수 있는 매끄러운 표면을 가진 다물체 접촉의 탄성 접촉 문제를 해석할 수 있는 효율적인 범용 산법을 제시하였다. 제안된 산법에서는 임의 형상의 물체 사이의 접촉을 다루기 위해 서로 접촉하고 있는 물체들을 유한 요소화한 후 프론탈법을 사용하여 효과적으로 접촉 영역에 대한 영향 계수를 계산하였으며, 다물체 접촉 문제해석을 위한 비선형 연립 방정식을 최적화 문제로 변환한 후 수정된 선형 계획법을 사용하여 효율적으로 해를 구하였다.

기존의 연구 결과가 있는 탄성 지지대, 보와 바퀴 사이의 접촉 문제를 해석하므로써 제안된 산법의 정확성을 보였으며 원통형 로울러 베어링에서의 다물체 접촉 문제에 대한 해석으로 그 유용성을 보였다.

참 고 문 헌

- (1) H. Hertz, 1896, English Translation in H. Hertz, "Miscellaneous Papers," Translated by D.E. Jones and G.A. Schott, Macmillan, New York, pp. 146~162, 163~183.
- (2) G. Lundberg, 1939, "Elastische Berührung Zweier Halbraume", *Forshe, Ingenieurw.*, 10, pp. 201~211.
- (3) C. Cattaneo, 1947, "Teoria del contatto elasiico in seconda approssinazion", *Unive. Rome, Rend., Mat. Appl.*, pp. 504~512.
- (4) H.D. Conway, 1956, "The Pressure Distribution Between Two Elastic Bodies in Contact", *Z. Angew. Math. Phys.*, 7, pp. 460~465.
- (5) T.F. Conry and A.A. Seireg, 1971, "A Mathematical Programming Method for Design of Elastic Bodies in Contact", *ASME, J. of Appl. Mech.* June, pp. 387~392.
- (6) A. Francavilla and O.C. Zienkiewicz, 1975, "Note on Numerical Computation of Elastic Contact Problems", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 9, No. 4, pp. 913~924.
- (7) T.D. Sachdeva, C.V. Ramakrishnan and R. Natarajan, 1981, "A Finite Element Method for the Elastic Contact Problems", *ASME, J. of Trans.* pp. 456~461.
- (8) E. Haug, R. Chand and K. Pan, 1977, "Multibody Elastic Contact Analysis by Quadratic Programming", *J. of Optim. Theory Appl.*, Vol. 21, No. 2, Feb., pp. 189~198.
- (9) J.W. Joo, 1987, "Analysis and Application of Elasto-plastic Contact problems", Ph.D. dissertation, KAIST, pp. 46~59.
- (10) B.M. Irons, 1970, "Frontal Solution Programming for Finite Element Analysis", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 2, No. 1, pp. 5~32.
- (11) T.A. Harris, 1984, *Rolling Bearing Analysis*, 2 ed. John Wiley & Sons.