

<論 文>

모우드 III 하중 하에서 경사진 띠모양의 소성역을 가정한 계면균열 모델

박 재 학* · 엄 윤 용**

(1988년 10월 12일 접수)

An Interfacial Crack Model with Inclined Strip Plastic Zones under Mode III Load

Jai Hak Park and Youn Young Earmme

Key Words : Interfacial Crack(계면균열), Plastic Zone(소성역), Frictional Shear Stress(마찰전단응력), *J*-Integral(*J*-적분), Dislocation(전위), Relative Displacement(상대변위)

Abstract

Assuming plastic zones spreading out on each slip plane of the two materials under out-of-plane shear loading, the size of each plastic zone is computed. The effect of the different frictional shear stresses in the two materials on the size of each plastic zone and the relative displacement at the crack tip are investigated. The relation between the *J*-integral in this model and the relative displacement at the crack tip is also obtained.

기 호 설 명

a : 균열길이의 반

B : 전위밀도함수

G : 전단탄성계수

J : *J*-적분

L : 소성역의 크기

n_i : 경로에 수직인 단위벡터

T_i : 트랙션 벡터

u_i : 변위벡터

w : 변형에너지밀도

x, x_i : 공간좌표

y, y_i : 공간좌표

δ : 균열선단에서의 상대변위

θ : 슬립면의 경사각

μ : 식 (3)으로 정의된 값

σ : 응력

τ : 외부에서 가해지는 모우드 III 응력

τ_R : 마찰전단응력

1. 서 론

계면균열(interfacial crack)에 대한 초기의 연구에서는⁽¹⁻³⁾ 계면을 이루는 두 재료가 선형탄성으로 가정된 경우가었고, 잘 알려진 바와 같이 이러한 경우의 해에서는 균열면이 서로 중첩되고 균열선단 부근에서 응력값이 심하게 진동하는 등의 물리적으로 적합하지 못한 특성을 나타내었다. 따라서 물리적으로 적합한 새로운 계면균열모델에 대한 연구가 진행되었는데 Comninou⁽⁴⁾의 접촉역을 가정한 모델, Atkinson⁽⁵⁾의 계면에 제 3의 재료를 가정한 모델 그리고 Sinclair⁽⁶⁾의 COA(Crack Opening

* 정회원, 충북대학교 공과대학 산업안전공학과

** 정회원, 한국과학기술원 기계공학과

Angle)를 가정한 모델 등이 제안되었다.

그러나 이러한 중첩현상과 진동현상은 균열선단에서의 비선형적인 변형을 고려해줄 경우에는 나타나지 않게 되는데, Knowles와 Sternberg⁽⁷⁾는 압축성 탄성재료의 평면응력문제에 대하여 유한변형해석을 행하여 균열선단에서 진동현상이 나타나지 않음을 보여주었고, 최근에 Shih와 Asaro⁽⁸⁾는 강체(rigid body)의 반무한 평판과 계면을 이루는 재료가 변형이론(deformation theory)을 만족하는 탄소성재료인 경우에 대하여 유한요소법(finite element method)을 이용하여 균열선단에서의 응력장과 변위장을 구하여 소성역이 어느 정도의 크기로 존재할 경우에는 진동현상 없이 균열면이 부드럽게 열린다고 하고 있다. 이와같이 비선형해석을 통하여 진동현상을 제거시킬 수 있으므로 앞으로 계면 균열의 비선형해석에 대한 연구가 활발히 진행될 것으로 보인다.

균질재료에서와 마찬가지로 계면균열에서의 소성변형에 대한 해석적인 엄밀해를 구하는 것은 거의 불가능하므로 간단한 모델을 통하여 소성변형의 효과를 추정해 볼 수가 있는데, Erdogan⁽⁹⁾은 균열 전방에 계면을 따라 띠모양의 소성역이 존재한다고 가정한 모델에 모우드 III의 응력이 작용될 때에 대하여, 소성역의 크기, 균열선단에서의 상대변위 등을 구하였고, 박재학 등⁽¹⁰⁾은 동일한 모델에 모우드 I과 모우드 II의 응력이 함께 작용하는 경우를 해석하였다. 그러나 이와같이 소성역이 계면 상에 존재한다고 가정한 모델로써는 계면을 이루는 두 재료의 항복응력이 각각 다른 경우에 각 재료에서 상이하게 발생하는 소성변형의 효과를 나타낼 수는 없으므로 각 재료에서의 상이한 소성변형을 해석하기 위해서는 각 재료에서 각각의 소성역을 가정한 모델의 도입이 필요하게 된다.

따라서 본 연구에서는 균질재료에 대하여 Vitec⁽¹¹⁾, Riedel⁽¹²⁾, Yokobori와 Kamei⁽¹³⁾ 등이 사용하였던 모델을 계면균열문제에 도입하였다. 즉, 균열선단에 기울어진 슬립면(slip plane)을 가정하고 소성역이 이 슬립면 상에 존재한다고 가정하여 이 모델에 모우드 III의 응력이 작용하는 경우에 대하여 해석하였다. 소성역과 균열을 전위(dislocation)의 연속된 분포로 나타내고 평형조건을 만족하는 전위밀도함수(dislocation density function)를 구하였다. 이러한 모델의 해석을 통하여 각 재료에서의 마찰전단응력의 변화에 따른 소

성역의 크기 및 균열선단에서의 상대변위의 변화를 살펴보았다. 또한 이러한 소성역을 가정한 경우의 J-적분과 균열선단에서의 상대변위와의 관계에 대해서도 살펴보았다.

2. 모델의 수식화

Fig. 1에 도시된 바와 같이, 서로 성질이 상이한 두 반 무한평판이 x 축을 따라 접합되어 있고, 계면 상에는 길이 $2a$ 인 균열이 존재하며, 무한역에서는 모우드 III의 응력 τ 가 작용하고 있는 문제를 고려하여 보자. 이때 균열선단의 전방에는 계면과 각각 θ_1 , θ_2 , θ_3 및 θ_4 의 각도를 이루는 슬립면을 따라 길이가 각각 L_1 , L_2 , L_3 및 L_4 인 띠모양의 소성역이 존재한다고 하자.

균열과 소성역에서의 서로 대응되는 두 면 사이에는 z 축 방향의 변위의 불연속함이 발생한다고 가정하면 균열과 소성역을 버거스벡터(Burgers vector)가 z 축과 나란한 나선전위(screw dislocation)의 연속된 분포로 나타낼 수 있다⁽¹⁴⁾. 균열에서의 전위밀도함수(dislocation density function)를 $B_0(x_0)$, 길이 L_i 인 소성역에서의 전위밀도함수를 각각 $B_i(x_i)$ 라고 하자. 여기서 x_0 및 x_i 좌표축과 이들 각각을 이루는 y_0 및 y_i 축은 Fig. 1에 도시되어 있다.

응력장 내에 존재하는 전위는 Peach-Koehler 방정식⁽¹⁵⁾으로 기술되는 힘을 받게 되고 이 힘에 의해 전위가 이동을 하게 된다. 따라서 균열에서의

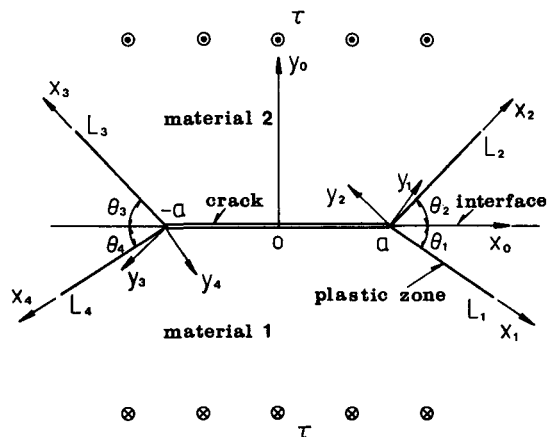


Fig. 1 An interfacial crack model with inclined plastic zones under mode III loads

전위가 평형상태를 유지하기 위해서는 다음 식을 만족하여야 한다 :

$$\tau - \frac{G_1(1+\mu)}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{B_0(\xi_0)}{\xi_0 - x_0} d\xi_0 + \sum_{j=1}^4 \int_0^{L_j} M_{0j}^*(x_0, \xi_j) B_j(\xi_j) d\xi_j = 0 \quad (1)$$

또한 길이 L_i 의 소성역에서의 전위의 평형을 위해서는

$$\tau_i + \int_{-a}^a M_{i0}^*(x_i, \xi_0) B_0(\xi_0) d\xi_0 + \sum_{j=1}^4 \int_0^{L_j} M_{ij}^*(x_i, \xi_j) B_j(\xi_j) d\xi_j = \tau_{Ri} \quad (2)$$

($i=1, \dots, 4$)

을 만족하여야 한다. 여기서 커널(kernel) $M_{ij}^*(x_i, \xi_j)$ 는 길이 L_j 의 소성역($j=0$ 은 균열)에서의 좌표 ξ_j 에 존재하는 단위 나선전위에 의하여 길이 L_i 인 소성역($i=0$ 은 균열)에서의 좌표 x_i 에 작용되는 전단응력 σ_{yiz} 로, 부록에 기술된 나선전위에 대한 응력분포함수를 이용하면 구할 수 있다. 또한 τ_i 는 무한역에서 가해지는 응력 τ 의 길이 L_i 의 소성역 방향의 성분, 그리고 τ_{Ri} 는 Bilby 등⁽¹⁶⁾에 의하여 고려되었던 각 소성역이 존재하는 재료에서의 마찰 전단응력(frictional shear stress)을 표시하고, G_i ($i=1, 2$)는 재료 i 에서의 전단탄성계수를 나타내며, μ 는 다음과 같이 표시된다 :

$$\mu = (G_2 - G_1) / (G_2 + G_1) \quad (3)$$

또한 균열면에서의 상대변위가 유일한 값을 가지기 위하여

$$\int_{-a}^a B_0(\xi_0) d\xi_0 = 0 \quad (4)$$

의 조건을 만족하여야 한다.

Fig. 1의 문제는 좌우대칭이 되므로 $L_4=L_1$, $L_3=L_2$, $\theta_4=\theta_1$, $\theta_3=\theta_2$ 가 되고, 전위밀도함수 사이에는 $B_4(\xi) = -B_1(\xi)$, $B_3(\xi) = -B_2(\xi)$ 의 관계를 가진다. 커널 $M_{11}^*(x_1, \xi_1)$ 과 $M_{22}^*(x_2, \xi_2)$ 를 적분구간 내에서 무한한 값을 가지는 부분과 유한한 값을 가지는 부분으로 나누면 다음과 같이 된다 :

$$M_{11}^*(x_1, \xi_1) = \frac{G_1}{2\pi} \frac{1}{x_1 - \xi_1} + M_{11}^{**}(x_1, \xi_1), \quad (5)$$

$$M_{22}^*(x_2, \xi_2) = \frac{G_2}{2\pi} \frac{1}{x_2 - \xi_2} + M_{22}^{**}(x_2, \xi_2).$$

여기서 $M_{11}^{**}(x_1, \xi_1)$ 과 $M_{22}^{**}(x_2, \xi_2)$ 는 적분구간 내에서 유한한 값을 가진다. 좌우대칭이라는 사실을 고려하고 식 (5)를 대입하면 식 (1)과 식 (2)는 다음 세 식으로 표현할 수 있다 :

$$\begin{aligned} & \tau - \frac{G_1(1+\mu)}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{B_0(\xi_0)}{\xi_0 - x_0} d\xi_0 \quad (6) \\ & + \sum_{j=1}^2 \int_0^{L_j} M_{0j}(x_0, \xi_j) B_j(\xi_j) d\xi_j = 0, \\ & \tau \cos \theta_i - \frac{G_i}{2\pi} \int_0^{L_i} \frac{B_i(\xi_i)}{\xi_i - x_i} d\xi_i \\ & + \int_{-a}^a M_{i0}(x_i, \xi_0) B_0(\xi_0) d\xi_0 \\ & + \sum_{j=1}^2 \int_0^{L_j} M_{ij}(x_i, \xi_j) B_j(\xi_j) d\xi_j = \tau_{Ri} \quad (7, 8) \end{aligned}$$

($i=1, 2$)

여기서

$$\begin{aligned} M_{01} &= M_{01}^* - M_{04}^*, \quad M_{02} = M_{02}^* - M_{03}^*, \\ M_{10} &= M_{10}^*, \quad M_{20} = M_{20}^*, \\ M_{11} &= M_{11}^{**} - M_{14}^*, \quad M_{21} = M_{21}^* - M_{24}^*, \quad (9) \\ M_{12} &= M_{12}^* - M_{13}^*, \quad M_{22} = M_{22}^{**} - M_{23}^*, \end{aligned}$$

이고 M_{ij} 는 적분구간 내에서 모두 유한한 값을 가진다.

적분구간을 -1 에서 1 로 만들어주기 위하여 다음과 같이 정의되는 변수 s_0, t_0, s_j 및 t_j ($j=1, 2$)를 도입한다 :

$$\begin{aligned} x_0 &= as_0, \quad \xi_0 = at_0, \\ x_j &= (s_j + 1) \frac{L_j}{2}, \quad \xi_j = (t_j + 1) \frac{L_j}{2} \quad (10) \end{aligned}$$

식 (6), 식 (7), 식 (8)을 식 (10)으로 정의된 변수로 치환하면

$$\begin{aligned} & \tau - \frac{G_1(1+\mu)}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{B_0(t_0)}{t_0 - s_0} dt_0 \quad (11) \\ & + \sum_{j=1}^2 \frac{L_j}{2} \int_{-1}^1 M_{0j}(s_0, t_j) B_j(t_j) dt_j = 0, \\ & \tau \cos \theta_i - \frac{G_i}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{B_i(t_i)}{t_i - s_i} dt_i \\ & + a \int_{-1}^1 M_{i0}(s_i, t_0) B_0(t_0) dt_0 \\ & + \sum_{j=1}^2 \frac{L_j}{2} \int_{-1}^1 M_{ij}(s_i, t_j) B_j(t_j) dt_j = 0, \quad (12, 13) \end{aligned}$$

($i=1, 2$)

이 된다.

열림균열선단을 가정할 경우 전위밀도함수 $B_0(t_0)$ 는 $t_0 = \pm 1$ 에서 무한한 값을 가지게 되고 이 경우

$$B_0(t_0) = \phi_0(t_0) / \sqrt{1 - t_0^2} \quad (14)$$

으로 표현된다⁽¹⁷⁾. 또한 전위밀도함수 $B_j(t_j)$ ($j=1, 2$)의 특성을 살펴보면, $t_j=1$ 에서는 소성역이 끝나는 점이므로 전위밀도함수의 값이 0이 되어야 하고, $t_j=-1$ 에서 전위의 운동을 저지하는 방해물이 존재하지 않는다면 전위밀도함수의 값이 유한하여

야 하며, 이러한 가정은 Riedel⁽¹²⁾에 의하여 사용된 가정과 동일하다. $B_j(t_j)$ ($j=1,2$)가 $t_j=-1$ 에서 무한한 값을 가진다고 가정을 할 경우에는 소성역의 크기가 유일하게 결정되지 않고 무한히 많은 해를 가지게 된다. 따라서 $B_j(t_j)$ 는

$$B_j(t_j) = \sqrt{1-t_j^2} \phi_j(t_j) \quad (j=1,2) \quad (15)$$

으로 표현된다. 식 (14) 및 식 (15)로부터 식 (11), 식 (12) 그리고 식 (13)은 다음과 같이 표시된다:

$$\begin{aligned} & -\frac{G_1(1+\mu)}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\phi_0(t_0)}{\sqrt{1-t_0^2}} \frac{dt_0}{t_0-s_0} \\ & + \sum_{j=1}^2 \frac{L_j}{2} \int_{-1}^1 M_{0j}(s_0, t_j) \sqrt{1-t_j^2} \phi_j(t_j) dt_j \\ & = -\tau, \\ & -\frac{G_i}{2\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t_i^2} \phi_i(t_i) \frac{dt_i}{t_i-s_i} \\ & + a \int_{-1}^1 M_{i0}(s_i, t_0) \frac{\phi_0(t_0)}{\sqrt{1-t_0^2}} dt_0 \\ & + \sum_{j=1}^2 \frac{L_j}{2} \int_{-1}^1 M_{ij}(s_i, t_j) \sqrt{1-t_j^2} \phi_j(t_j) dt_j \\ & = \tau_{R_i} - \tau \cos \theta_i \end{aligned} \quad (i=1,2) \quad (17,18)$$

그리고 식 (4)는 식 (10)과 식 (14)로부터

$$\int_{-1}^1 \frac{\phi_0(t_0)}{\sqrt{1-t_0^2}} dt_0 = 0 \quad (19)$$

이 된다.

결국 문제의 풀이는 재료의 성질과 하중조건이 주어진 경우 식 (16)에서 식 (19)의 4식을 만족하는 전위밀도함수 B_0, B_1 및 B_2 와 소성역의 크기 L_1, L_2 를 구하는 것이 되었음을 알 수 있다.

3. 방정식의 풀이 및 고찰

3.1 방정식의 풀이

유도된 연립특이적분방정식의 풀이는 Erdogan과 Gupta⁽¹⁸⁾에 의해 개발된 Gauss-Jacobi 적분공식을 이용한 수치적인 방법으로 행하였다. Gauss-Jacobi 적분공식을 이용하면 식 (16)에서 식 (19)의 4식은 각각 다음과 같은 대수방정식으로 표현된다. 즉, 식 (16)은

$$\begin{aligned} & -\frac{G_1(1+\mu)}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\phi_0(t_{0k})}{n(t_{0k}-s_{0r})} \\ & + \sum_{j=1}^2 \frac{\pi L_j}{2} \sum_{k=1}^n \frac{(1-t_{jk}^2)}{(n+1)} M_{0j}(s_{0r}, t_{jk}) \phi_j(t_{jk}) \\ & = -\tau \end{aligned} \quad (20)$$

($r=1, \dots, n-1$)

이 되고 여기서

$$s_{0r} = \cos \frac{r\pi}{n} \quad (21)$$

$$t_{0k} = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n} \quad (k=1, \dots, n) \quad (22)$$

$$t_{jk} = \cos \frac{k\pi}{n+1} \quad (23)$$

이다. 또한 식 (17)과 식 (18)은

$$\begin{aligned} & -\frac{G_i}{2} \sum_{k=1}^n \frac{(1-t_{ik}^2) \phi_i(t_{ik})}{(n+1)(t_{ik}-s_{ir})} \\ & + \sum_{k=1}^n \pi a M_{i0}(s_{ir}, t_{0k}) \frac{\phi_0(t_{0k})}{n} \\ & + \sum_{j=1}^2 \frac{\pi L_j}{2} \sum_{k=1}^n \frac{(1-t_{jk}^2)}{(n+1)} M_{ij}(s_{ir}, t_{jk}) \phi_j(t_{jk}) \\ & = \tau_{R_i} - \tau \cos \theta_i \end{aligned} \quad (i=1,2, r=1, \dots, n+1) \quad (24,25)$$

으로 표현된다. 여기서 t_{0k}, t_{jk} 는 각각 식 (21)과 식 (23)으로 정의되고 s_{ir} 은

$$s_{ir} = \cos \frac{\pi(2r-1)}{2(n+1)} \quad (26)$$

으로 정의되었다. 그리고 식 (19)는

$$\sum_{k=1}^n \phi_0(t_{0k}) = 0 \quad (27)$$

으로 표현된다.

계면을 이루는 두 재료의 성질 $G_1, G_2, \tau_{R_1}, \tau_{R_2}$ 와 슬립면의 경사각 θ_1, θ_2 가 주어진 경우 풀어야 할 식들은 식 (20), 식 (24), 식 (25) 및 식 (27)의 $3n+2$ 개이고 구해야 할 미지수는 $\phi_0(t_{01}) \dots \phi_0(t_{0n}), \phi_1(t_{11}) \dots \phi_1(t_{1n}), \phi_2(t_{21}) \dots \phi_2(t_{2n})$ 그리고 소성역의 크기 L_1, L_2 의 $3n+2$ 개이다. 미지수와 방정식의 갯수가 동일하므로 미지수들이 유일하게 결정되는데 필요한 방정식이 존재함을 알 수 있다. 계산의 편의상 L_1 과 L_2 를 주어진 값으로 보고 τ_{R_1} 과 τ_{R_2} 를 미지수로 구하였다. 특정한 τ_{R_1}, τ_{R_2} 값에 대하여 해를 구할 경우는 L_1 과 L_2 를 변화시켜 가면서 원하는 τ_{R_1}, τ_{R_2} 값이 얻어질 때까지 반복계산을 행하였다. 그리고 수치적분에서 $n=100$ 으로 하였다.

3.2 소성역의 크기

Fig. 2는 $G'_1=10, G'_2=20, \theta_1=\theta_2, \tau_{R_1}=\tau_{R_2}$ 이고, $\tau'=0.4$ 인 경우의 θ_1 의 변화에 따른 무차원화된 소성역의 크기 $L_1/a (=L_2/a)$ 를 도시한 것이다. 여기서 $G'_1=G_1/\tau_{R_1}, G'_2=G_2/\tau_{R_1}$ 이고 $\tau'=\tau/\tau_{R_1}$ 이다. θ_1 이 커질수록 소성역은 점차 작아짐을 알 수 있고, θ_1 이 0에 접근하는 경우는 Erdogan⁽⁹⁾

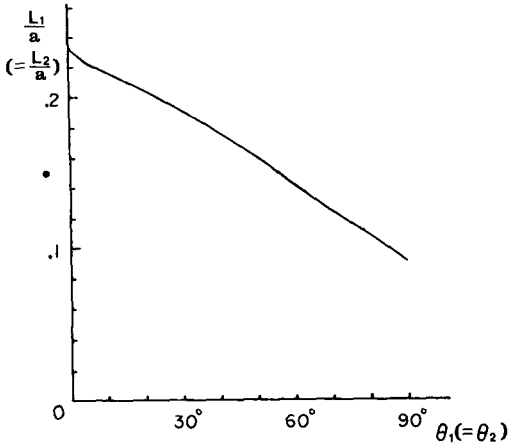


Fig. 2 Non-dimensionalized sizes of plastic zones $L_1/a (=L_2/a)$ as a function of $\theta_1 (= \theta_2)$ when $G'_1 (= G_1/\tau_{R1})=10$, $G'_2 (= G_2/\tau_{R1})=20$, $\tau_{R1} = \tau_{R2}$ and $\tau' (= \tau/\tau_{R1})=0.4$

이 계면상에 존재하는 소성역을 가정하여 구한 소성역의 크기

$$L_h = a \left(\sec \frac{\pi\tau}{2\tau_R} - 1 \right) \quad (28)$$

로부터 계산된 $L_h/a=0.236$ 에 점차 접근하고 있음을 알 수 있다.

다음으로 G'_1 , G'_2 의 값을 바꾸어 가며 동일한 해석을 행하였고 그 결과는 Fig. 2와 동일하였다. 따라서 $\tau_{R1} = \tau_{R2}$, $\theta_1 = \theta_2$ 인 경우 소성역의 크기는 G'_1 , G'_2 에 무관함을 알 수 있고 이는 식 (28)로 주어진 Erdogan의 결과와도 일치하고 있다. 이하의 해석에서도 모두 $G'_1=10$, $G'_2=20$ 으로 가정하였다.

Fig. 3은 $\tau'=0.4$ 인 경우 $\tau'_{R2} (= \tau_{R2}/\tau_{R1})$ 에 따른 무차원화된 소성역의 크기 $L'_1 (= L_1/a)$ 와 $L'_2 (= L_2/a)$ 의 변화를 보여주고 있다. 이때 θ_1 과 θ_2 는 각 재료내에서 소성역의 크기가 최대가 되는 각도로 취하였다. 임의의 θ_2 에 대하여 θ_1 이 0으로 접근할수록 재료 1에서의 소성역이 커지게 되므로 θ_1 은 0에 가까운 값을 취하여야 할 것이나 계산상의 어려움을 피하기 위하여 $\theta_1 = 1^\circ$ 로 하였다. θ_2 는 $\theta_1 = 1^\circ$ 인 경우 재료 2에서의 소성역의 크기가 최대인 각도로 취하였고 이때의 각도의 변화는 Fig. 4에 도시되어 있다. Fig. 3에서 τ'_{R2} 가 증가함에 따라 L'_2 는 감소하여 곧 0으로 접근하고 L'_1 는 $\tau'_{R2}=1$ 일 때의 값과 거의 동일한 값을 유지함을 알 수 있다.

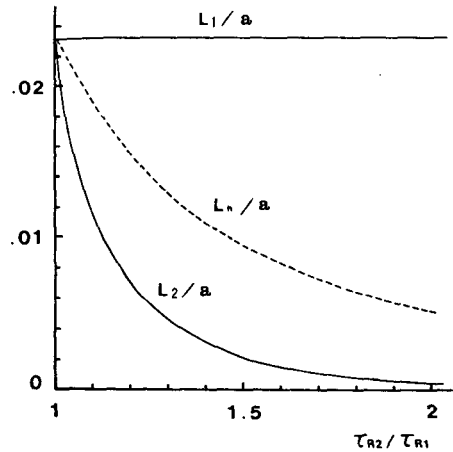


Fig. 3 Non-dimensionalized sizes of plastic zones L_1/a and L_2/a as a function of τ_{R2}/τ_{R1} when $G'_1=10$, $G'_2=20$, $\tau'=0.4$. Here L_h is the sizes of plastic zone in the homogeneous material with frictional shear stress τ_{R2}

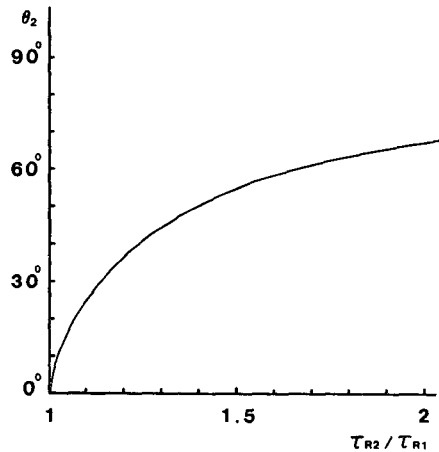


Fig. 4 Inclined angle θ_2 which has the maximum plastic zone size as a function of τ_{R2}/τ_{R1} when $G'_1 (= G_1/\tau_{R1})=10$, $G'_2 (= G_2/\tau_{R1})=20$, $\tau'=0.4$

이 그림에서 점선은 마찰전단응력이 τ'_{R2} 인 균질재료 내에 존재하는 균열에서의 식 (28)에서 계산된 무차원화된 소성역의 크기 $L'_h (= L_h/a)$ 를 보여주고 있다. τ'_{R2} 가 증가함에 따라 L'_2 는 L'_h 보다 더욱 빨리 감소하고 있음을 알 수 있다. 또한 Fig. 3의 결과로부터 식 (28)은 접합된 두 재료의 마찰전단응력 값이 다를 경우에도 각 재료에서 생기는 소성역 중에 큰 쪽의 값을 근사적으로 나타내고 있음을 알 수 있다.

3.3 균열선단에서의 상대변위

“재료 1”과 “재료 2”에 존재하는 소성역에 의한 균열선단에서의 상대변위를 각각 δ_1 과 δ_2 라고 할 때 전위밀도함수와 다음과 같은 관계를 가진다.

$$\delta_j = \int_0^{L_j} B_j(\xi_j) d\xi_j \quad (j=1,2) \quad (29)$$

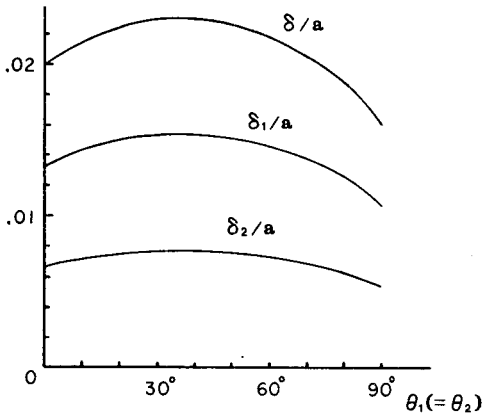


Fig. 5 Non-dimensionalized relative displacements at the crack tip δ_1/a , δ_2/a and δ/a as a function of $\theta_1 (= \theta_2)$ when $G_1 (= G_1/\tau_{R1}) = 10$, $G_2 (= G_2/\tau_{R1}) = 20$, $\tau_{R1} = \tau_{R2}$ and $\tau' (= \tau/\tau_{R1}) = 0.4$. Here δ_1 is the relative displacement at the crack tip due to the plastic zone in the Material 1 and δ_2 is the corresponding value in the Material 2 and $\delta = \delta_1 + \delta_2$

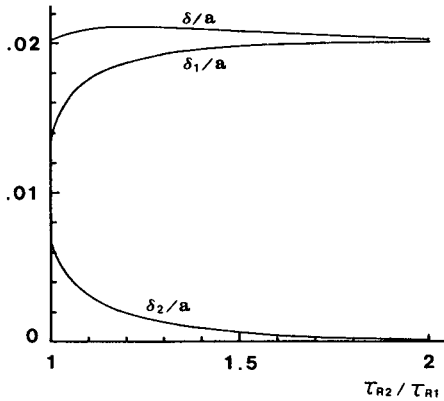


Fig. 6 Non-dimensionalized relative displacement at the crack tip δ_1/a , δ_2/a and δ/a as a function of τ_{R2}/τ_{R1} when $G_1 (= G_1/\tau_{R1}) = 10$, $G_2 (= G_2/\tau_{R1}) = 20$, $\tau' (= \tau/\tau_{R1}) = 0.4$. Here δ_1 is the relative displacement at the crack tip due to the plastic zone in the Material 1 and δ_2 is the corresponding value in the Material 2 and $\delta = \delta_1 + \delta_2$

이 경우 균열선단에서의 상대변위 δ 는

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 \quad (30)$$

로 표현된다.

Fig. 5는 $\tau_{R1} = \tau_{R2}$, $\theta_1 = \theta_2$ 이고 $\tau' = 0.4$ 인 경우의 θ_1 의 변화에 따른 $\delta_1' (= \delta_1/a)$, $\delta_2' (= \delta_2/a)$ 및 $\delta' (= \delta/a)$ 의 변화를 도시한 것이다. θ_1 이 0에 접근하는 경우는 Erdogan⁽⁹⁾이 계면상에 존재하는 소성역을 가정하여 구한 균열선단에서의 상대변위

$$\delta_h = \frac{2a\tau_R(G_1 + G_2)}{\pi G_1 G_2} \ln(1 + \frac{L_h}{a}) \quad (31)$$

로부터 계산된 $\delta_h' (= \delta_h/a) = 0.0202$ 에 점차 접근하고 있음을 알 수 있다. θ_1 이 0에서부터 커짐에 따라 δ_1' , δ_2' 및 δ 는 완만하게 증가하다가, 30°와 40° 사이에서 최대값에 도달한 후, 다시 감소하게 됨을 알 수 있다.

Fig. 6은 $\tau' = 0.4$ 인 경우 τ_{R2} 에 따른 무차원화된 균열면에서의 상대변위 δ_1' , δ_2' 및 δ 의 변화를 보여주고 있다. 이 때 θ_1 과 θ_2 는 Fig. 3에서와 동일하게 구하였다. τ_{R2}' 이 1보다 커짐에 따라 δ_2' 는 감소하여 곧 0으로 접근하고 δ_1' 는 증가한 후 일정한 값에 수렴하게 된다. 또한 δ_1' 와 δ_2' 의 합인 δ' 는 δ_1' 의 증가량과 δ_2' 의 감소량이 상쇄되어 그 값의 변화가 비교적 작고 일정한 값에 수렴하고 있음을 알 수 있다. 따라서 식 (31)로 주어지는 균열선단에서의 상대변위는 일반적인 경우에 대해서도 근사적인 값으로 사용할 수 있음을 알 수 있다.

3.4 J-적분

J-적분은 2차원의 변위장에 대하여 다음과 같이 정의된다⁽¹⁹⁾ :

$$J = \oint (w n_1 - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x}) ds \quad (32)$$

여기서 w 는 변형에너지밀도, T_i 는 트랙션 벡터 (traction vector), u_i 는 변위벡터, s 는 적분경로에서의 거리 그리고 n_1 은 적분경로의 진행방향에

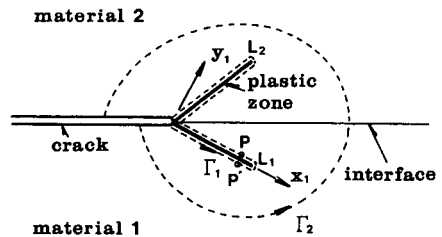


Fig. 7 Integral paths

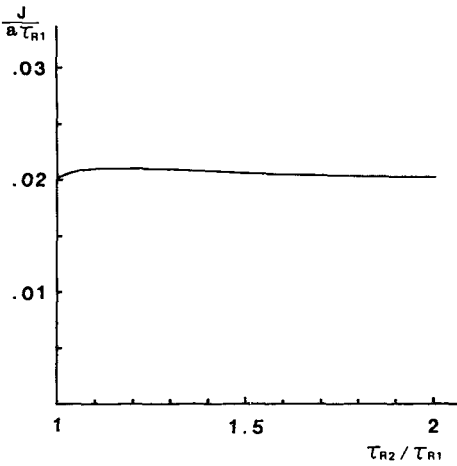


Fig. 8 Non-dimensionalized J integral, $J/a \tau_{R1}$, as a function of τ_{R2}/τ_{R1} when $G_1=10$, $G_2=20$ and $\tau'=0.4$

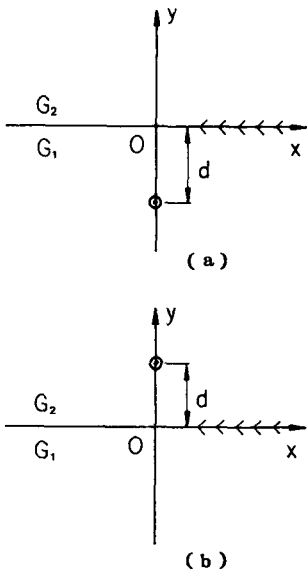


Fig. 9 A screw dislocation near interface

대하여 오른쪽으로 수직인 단위벡터의 x 방향 성분이다.

Fig. 7에 도시된 바와 같이 균열선단에서 멀리 떨어진 임의의 적분경로 Γ_2 와 소성역의 경계를 따라 취한 적분경로 Γ_1 을 고려하면 J -적분은 두 적분경로에 대하여 동일한 값을 가지게 된다⁽²⁰⁾. 길이 L_1 인 소성역(또는 길이 L_2 인 소성역)에서 서로 대응하고 있는 임의의 두 점 $P(x_1, 0^+)$ 와 $P'(x_1,$

$0^-)$ 에 대하여 고려하여 보자. 두 점에서의 응력값을 살펴보면 $\sigma_{y,z}$ 는 두 점에서 모두 마찰전단응력 τ_{R1} 과 동일한 값이 되어야 하고, 무한역에서 가해지는 응력과 B_0, B_2, B_3 및 B_4 로 나타내어지는 전위들에 의하여 두 점에 생기는 응력 $\sigma_{x,z}$ 또한 같은 값이 됨을 알 수 있다. B_1 으로 나타내어지는 전위에 의해 두 점에 생기는 응력 $\sigma_{x,z}$ 는 0이 되므로 결국 P 와 P' 점에서의 응력값은 동일하게 된다. 따라서 두 점에서의 변형에너지밀도 w 도 동일할 것이므로 Γ_1 에 대하여 J -적분을 계산할 경우 식 (32)의 첫번째 항은 0이 된다. 두번째 항에 대해서는

$$\begin{aligned}
 J &= - \int_{\Gamma_1} T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \\
 &= - \sum_{j=1}^2 \int_0^{L_j} \sigma_{xjz} \frac{\partial [u_z(x_j, 0^+) - u_z(x_j, 0^-)]}{\partial x_1} dx_1 \\
 &= \tau_{R1} \delta_1 + \tau_{R2} \delta_2
 \end{aligned}
 \tag{33}$$

가 된다.

Fig. 8은 $\tau'=0.4$ 인 경우 $\tau'_{R2}(=\tau_{R2}/\tau_{R1})$ 에 따른 무차원화된 J -적분 $J/(a \tau_{R1})$ 의 변화를 보여주고 있다. θ_1 과 θ_2 는 Fig. 3에서와 같이 구하였다. 그리고 J -적분은 식 (33)에 의하여 계산되었다. J -적분값은 τ'_{R2} 에 관계없이 거의 동일한 값을 나타내고 있음을 알 수 있다.

4. 결 론

계면균열의 균열선단에서의 소성변형의 효과를 살펴보기 위하여 소성역이 균열면과 임의의 각도로 기울어진 슬립면 상에 존재한다고 가정한 모델에 모우드 III의 응력이 작용하는 문제를 해석하였다. 균열과 소성역을 전위의 연속된 분포로 나타내었고, 이때 전위의 평형조건은 연립특이적분방정식으로 수식화되었다. 해석 결과, 계면을 이루는 두 재료의 마찰전단응력이 동일한 경우는 동일한 크기의 소성역이 얻어졌고, 재료 2의 마찰전단 응력이 커질 경우에는 재료 2에서의 소성역의 크기 및 균열선단에서의 상대변위는 감소하여 곧 0으로 접근하였다. 이때 재료 1에서의 소성역의 크기는 큰 변화를 보이지 않았고, 균열선단에서의 상대변위는 증가하여 일정한 값에 수렴하였다. 또한 J -적분과 균열선단에서의 상대변위와의 관계도 구할 수 있었으며, 한쪽 재료의 마찰전단응력이 증가하는 경우에도 J -적분은 거의 일정한 값을 유지함을 알 수 있었다.

참고 문헌

- (1) Williams, M.L., 1959, "The Stresses around a Fault or Crack in Dissimilar Media", Bull. Seismological Soc. America, Vol. 49, pp. 199~204.
- (2) Erdogan, F., 1965, "Stress Distribution in Bonded Dissimilar Materials with Cracks", ASME J. Appl. Mech., Vol. 32, pp. 403~410.
- (3) Rice, J.R. and Sih, G.C., 1965, "Plane Problems of Cracks in Dissimilar Media", ASME J. Appl. Mech., Vol. 32, pp. 418~423.
- (4) Comninou, M., 1977, "The Interface Crack", ASME J. Appl. Mech., Vol. 44, pp. 631~636.
- (5) Atkinson, C., 1982, "The Interface Crack with a Contact Zone (an Analytical Treatment)", Int. J. Fracture, Vol. 18, pp. 161~177.
- (6) Sinclair, G.B., 1980, "On the Stress Singularity at an Interface Crack", Int. J. Fracture, Vol. 16, pp. 111~119.
- (7) Knowles, J.K. and Sternberg, E., 1983, "Large Deformation near a Tip of an Interface-Crack between two Neo-Hookean Sheets", J. Elasticity, Vol. 13, pp. 257~293.
- (8) Shih, C.F. and Asaro, R., 1988, "Elastic-Plastic Analysis of Cracks on Bimaterial Interface; Part 1: Small Scale Yielding", ASME J. Appl. Mech., Vol. 55, pp. 299~316.
- (9) Erdogan, F., 1966, "Elastic-Plastic Anti-plane Problems for Bonded Dissimilar Media Containing Cracks and Cavities", Int. J. Solids Structures, Vol. 2, pp. 447~465.
- (10) 박재학, 조중두, 엄윤용, 1985, "소성역을 고려한 계면균열의 새로운 모델", 한국항공우주학회지, 제13권, pp. 16~29.
- (11) Vitek, V., 1976, "Yielding on Inclined Planes at the Tip of a Crack Loaded in Uniform Tension", J. Mech. Phys. Solids, Vol. 24, pp. 263~275.
- (12) Riedel, H., 1976, "Plastic Yielding on Inclined Slip-Planes at a Crack Tip", J. Mech. Phys. Solids, Vol. 24, pp. 277~289.
- (13) Yokobori, T. and Kamei, A., 1973, "A Criterion for Low-Stress Brittle Fracture of Materials with Crack or Sharp Notch Based on Combined Micro-and-Macro Fracture Mechanics", Engng Fracture Mech., Vol. 5, pp. 819~836.
- (14) Bilby, B.A. and Eshelby, J.D. 1968, "Dislocations and the Theory of Fracture", Fracture, ed. H. Liebowitz, Vol. 1, pp. 99~182.
- (15) Weertman, J. and Weertman, J.R., 1964, "Elementary Dislocation Theory", Macmillan, London.
- (16) Bilby, B.A., Cottrell, A.H. and Swinden, K.H., 1963, "The Spread of Plastic Yield from a Notch", Proc. Roy. Soc. London, Vol. A272, pp. 304~314.
- (17) Muskhelishvili, N.I., 1953, "Singular Integral Equations", P. Noordhoff, Groningen.
- (18) Erdogan, F. and Gupta, G.D., 1972, "On the Numerical Solution of Singular Integral Equations", Quart. Appl. Math., Vol. 29, pp. 525~539.
- (19) Rice, J.R., 1968, "A Path Independent Integral and The Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks", ASME J. Appl. Mech., Vol. 35, pp. 379~386.
- (20) Park, J.H. and Earmme, Y.Y., 1986, "Application of Conservation Integrals to Interfacial Crack Problems", Mechanics of Materials, Vol. 5, pp. 261~276.
- (21) Warren, W.E., 1976, "Plastic Yielding through a Two-Material Interface from Cracks under Anti-plane Deformation", Int. J. Fracture, Vol. 12, pp. 843~859.
- (22) Stakgold, I., 1968, "Boundary Value Problems of Mathematical Physics", Vol. II, Macmillan, p. 12.

부 록

나선전위에 의한 응력분포

Fig. 9(a)에 도시된 바와 같이 전단탄성계수가 각각 G_1 , G_2 인 두 반 무한평판이 x 축을 따라 완전히 접합되어 있고 음의 y 축 상에 버거스 벡터 b_z 의 나선전위가 존재한다고 하자. 이 경우 버거스 벡터의 정의는 FS/RH규정을 따른다고 한다. 이 경우 평판 내에서의 응력분포는 다음과 같이 표현된다⁽²¹⁾:

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}^1 &= -\frac{G_1 b_z}{2\pi} \left[\frac{y+d}{(y+d)^2+x^2} + \mu \frac{y-d}{(y-d)^2+x^2} \right] \\ \sigma_{yz}^1 &= \frac{G_1 b_z}{2\pi} \left[\frac{x}{(y+d)^2+x^2} + \mu \frac{x}{(y-d)^2+x^2} \right] \\ \sigma_{xz}^2 &= -\frac{G_1(1+\mu)b_z}{2\pi} \frac{y+d}{(y+d)^2+x^2} \\ \sigma_{yz}^2 &= \frac{G_1(1+\mu)b_z}{2\pi} \frac{x}{(y+d)^2+x^2} \end{aligned} \quad (34)$$

Fig. 9(b)에서와 같이 나선전위의 위치가 양의 y 축 상에 있고 다른 조건은 위와 동일한 경우는

$$\sigma_{xz}^1 = -\frac{G_2(1-\mu)b_z}{2\pi} \frac{y-d}{(y-d)^2+x^2}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yz}^1 &= \frac{G_2(1-\mu)b_z}{2\pi} \frac{x}{(y-d)^2+x^2} \\ \sigma_{xz}^2 &= -\frac{G_2b_z}{2\pi} \left[\frac{y-d}{(y-d)^2+x^2} \right. \\ &\quad \left. - \mu \frac{y+d}{(y+d)^2+x^2} \right] \quad (35) \\ \sigma_{yz}^2 &= \frac{G_2b_z}{2\pi} \left[\frac{x}{(y-d)^2+x^2} - \mu \frac{x}{(y+d)^2+x^2} \right] \end{aligned}$$

으로 표현된다. Fig. 9(a)에서 $d=0$ 인 경우 즉 나선전위의 위치가 원점인 경우의 x 축을 제외한 곳에서의 응력분포는

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}^1 = \sigma_{xz}^2 &= -\frac{G_1(1+\mu)}{2\pi} \frac{y}{x^2+y^2} \\ \sigma_{yz}^1 = \sigma_{yz}^2 &= \frac{G_1(1+\mu)}{2\pi} \frac{x}{x^2+y^2} \quad (36) \end{aligned}$$

으로 표현된다. Stakgold⁽²²⁾의 델타함수에 관한 정

리로부터 $f(x)$ 가 음이 아닌 적분가능한 함수이고

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

을 만족하는 경우 $\alpha > 0$ 인 α 에 대하여 $f_\alpha(x)$ 를

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{x}{\alpha}\right)$$

으로 정의하면

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} f_\alpha(x) = \delta(x)$$

가 된다는 사실을 이용하면 나선전위가 좌표의 원점에 존재할 경우 x 축 상에서의 응력은

$$\sigma_{xz} = -\frac{G_1(1+\mu)}{2} \delta(x)$$

$$\sigma_{yz} = \frac{G_1(1+\mu)}{2\pi} \frac{1}{x} \quad (37)$$

로 표현된다.