

<論 文>

강소성 유한요소해석의 안정화와 고능률화에 관한 연구

추 만 석* · 김 영 석** · Y. Tomita*

(1988년 11월 21일 접수)

Computational Strategies for Improving Efficiency in Rigid-Plastic Finite Element Analysis

Man Suk Chu, Young Suk Kim and Tomita Yoshihiro

Key Words : Rigid-Plastic Finite Element Method(강소성 유한요소법), Zero-Energy Mode(영에너지 모드), 3-Dimensional Analysis(3차원 해석), Stabilization Matrix(안정화 매트릭스), RIS(안정화 수법), Parallel Computing(병렬처리)

Abstract

Effective computational strategies have been proposed in the evaluation of stiffness matrices of rigid-plastic finite element method widely used in simulation of metal forming processes. The stiffness matrices are expressed as the sum of stiffness matrices evaluated by reduced integration and Liu's stabilization matrices which control the occurrence of zero-energy mode due to excessive reduced integration. The proposed method has been applied to the solution of fundamental 3-dimensional problems. The results clarified that the deformed mesh configuration was remarkably stabilized and computation speed attained about 3 times as fast as that of conventional 3-dimensional analyses. Furthermore, computation speed increases by a factor 60 when parallel computation is introduced. This speed has a tendency to increase as the total degree of freedom increases. As a result, this rigid-plastic finite element method enables us to analyze real 3-dimensional forming processes with practically acceptable computation time.

기 호 설 명

B	: 변위-변형률 매트릭스	ϕ	: 형상함수
D	: 응력-변형률 매트릭스	ξ, η, ζ	: 자연좌표계
K	: 강성매트릭스 $K = K^1 + K^s$	$\bar{\sigma}$: 상당응력 (equivalent stress)
K^1	: 저잡적분에 의한 강성매트릭스	$\bar{\epsilon}$: 상당변형률 (equivalent strain)
K^s	: 안정화매트릭스	$(\dot{\quad})$: (\quad) 의 시간도함수
v	: 요소내의 변위	$\bar{\lambda}$: 페널티 (penalty)
ϵ	: 요소내의 변형률		
\bar{v}	: 절점변위		
$(\quad), x, (\quad), y, (\quad), z$: (\quad) 의 x, y, z 에 의한 편미분		

1. 서 론

소성가공 공정중의 피가공물의 변형, 응력 및 온도분포 등을 계산 시뮬레이션에 의해서 정확히 예지하고 이러한 정보를 공정의 설계 또는 새로운 가공법의 확립에 이용하고자 하는 것이 최근의 경향

*日本 神戸大學工學部 機械工學科

**정회원, 산업과학기술연구소 강재연구부

이다. 수치계산 시뮬레이션 방법 중에서도 강소성 유한요소법은 재료전체의 소성변형 중에 탄성변형이 차지하는 비율이 작고 재료의 구속이 커서 제하(unloading)가 일어나지 않는 경우에 대하여 해의 정도가 높고, 효율이 좋은 해석방법으로 현재 각종 소성가공 공정해석에 널리 이용되고 있다. 통상, 강소성 유한요소법에서는 소성변형율의 비압축성을 라그랑지법(Lagrange), 페널티법(Penalty) 등에 의해서 만족시키고 있지만 요소의 선택과 강성매트릭스의 수치적분에 있어서, 특별한 주의없이 고정도 및 안정한 해를 얻기가 곤란하다. 이러한 상황을 타개하는 가장 실용적인 수법으로 강성 매트릭스를 평가하는데 저감적분(reduced integration) 또는 선택 저감적분(selective reduced integration)을 이용한다. 그러나 저감적분에 있어서는 계산시간의 단축은 기대할 수 있지만 격자에 소위 모래시계(hourglass) 모드(Zero-Energy Mode: ZEM)의 불안정이 발생해서 정확한 해를 얻을 수 없게 되는 일이 있다^(1,2). 한편, 선택저감적분을 이용하면 안정한 해를 얻을 수 있는 반면 계산시간이 많이 소요되는 것은 피할 수 없다. Liu⁽³⁾ 등은 강성 매트릭스에 안정화 매트릭스를 부가하는 것에 의해 ZEM을 억제하는 수법을 제안하였다. 본 연구에서는 Liu의 매트릭스를 강소성 유한요소법에 도입하여 통상의 소성가공 공정중에 있는 피가공물의 3차원 변형을 실용적인 수준에서 해석 가능케 하는 강소성 유한요소법을 제안하고 실례를 통하여 제안한 수법에 의하여 얻어진 해의 안정성과 계산효율을 검토한다.

2. 안정화 매트릭스의 일반형

강소성 유한요소법을 정식화하기 전에 Liu에 의해서 제안한 수법을 선형탄성문제에 대해 설명한다. 이 수법은 저감적분을 함으로서 발생하는 모래시계모드를 억제함과 동시에 계산효율이 좋고 비압축성에 가까운 변형을 하는 경우에 록킹(locking) 현상이 일어나지 않는 장점이 있다. 유한요소내의 변위 및 변형율을 v , ϵ , 절점변위를 \bar{v} 로 표시하면 이들의 관계는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} v &= \phi_i \bar{v}_i, \quad \epsilon = B_i v_i \\ v &= (v_x \ v_y \ v_z)^T \\ \epsilon &= (\epsilon_{xx} \ \epsilon_{yy} \ \epsilon_{zz} \ 2\epsilon_{xy} \ 2\epsilon_{yz} \ 2\epsilon_{zx})^T \\ \bar{v} &= (\bar{v}_1^T \ \bar{v}_2^T \ \dots \ \bar{v}_N^T)^T \end{aligned}$$

$$v_N = \begin{Bmatrix} \bar{v}_{xN} \\ \bar{v}_{yN} \\ \bar{v}_{zN} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \phi &= (\phi_1 \phi_2 \dots \phi_N) \\ \phi_N &= \begin{Bmatrix} \phi_N & 0 & 0 \\ 0 & \phi_N & 0 \\ 0 & 0 & \phi_N \end{Bmatrix} \\ B_N &= \begin{Bmatrix} \phi_{N,x} & 0 & 0 \\ 0 & \phi_{N,y} & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{N,z} \\ \phi_{N,y} & \phi_{N,x} & 0 \\ 0 & \phi_{N,z} & \phi_{N,y} \\ \phi_{N,z} & 0 & \phi_{N,x} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 $(\)_x, (\)_y, (\)_z$ 는 $(\)$ 의 좌표 x, y, z 에 의한 편미분을 나타낸다. ϕ, B 는 형상함수와 변위-변형을 매트릭스이고 ϕ_i 와 B_i 는 절점 i 에 대응하는 성분매트릭스이다. 위 식을 가상일의 원리식에 도입해서 강성매트릭스를 구하면 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$K = \begin{Bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1N} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{N1} & K_{N2} & \dots & K_{NN} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

$$K_{ij} = \int B_i^T D B_j dV$$

여기서 D 는 응력-변형을 매트릭스를 나타낸다. 강성매트릭스를 K 의 계산에 저감적분을 이용하면 계산비용을 대폭 절감할 수 있다. 그러나 부적절한 저감적분법을 이용하면 여분의 ZEM이 발생해서 그것들이 매카니즘을 형성해 강성매트릭스를 특이(singularity)로 하여 정확한 해를 얻을 수 없게 되는 경우가 있다. 특히 복잡한 요소의 경우에는 이러한 ZEM을 완전히 억제하는 일은 곤란하다. 그래서 저감적분법에 의해서 얻은 강성매트릭스 K^1 에 안정화 매트릭스 K^s 를 넣어서 다음과 같이 표시한다.

$$K = K^1 + K^s \quad (4)$$

안정화 매트릭스 K^s 는 3차원의 경우에는 다음과 같이 구해진다. 즉, 3차원 8절점 6면체 요소에 대한 형상함수를 일반적으로 표시하면

$$\begin{aligned} \phi &= a_0 + a_1 \xi + a_2 \eta + a_3 \zeta + a_4 \xi \eta \\ &\quad + a_5 \eta \zeta + a_6 \zeta \xi + a_7 \xi \eta \zeta \end{aligned} \quad (5)$$

로 된다. 따라서 변형율 ϵ 을 자연좌표 ξ, η, ζ 의 원점 주위에 전개하면 요소 내의 임의의 점에 대한

변형율은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \varepsilon(\xi, \eta, \zeta) = & B_i(0) \bar{v}_i + B_{i,\xi}(0) \bar{v}_i \xi \\ & + B_{i,\eta}(0) \bar{v}_i \eta + B_{i,\zeta}(0) \bar{v}_i \zeta \\ & + 2B_{i,\xi\eta}(0) \bar{v}_i \xi \eta + 2B_{i,\eta\zeta}(0) \bar{v}_i \eta \zeta \\ & + 2B_{i,\xi\zeta}(0) \bar{v}_i \xi \zeta \end{aligned} \quad (6)$$

여기서 $(\quad)_{,\xi}$, $(\quad)_{,\eta}$, $(\quad)_{,\zeta}$ 는 ξ , η , ζ 에 의한 편미분을 표시한다. \bar{v}_i , \bar{B}_i 는 절점 i 의 변위 벡터에 대응하는 B 매트릭스의 성분매트릭스이다. $B_i(0)$, $B_{i,\xi}(0)$, $B_{i,\eta}(0)$, $B_{i,\zeta}(0)$ 등은 자연좌표 ξ , η , ζ 의 원점에 대한 값이다. 따라서 ξ , η , ζ 에 대한 B 매트릭스는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} B(\xi, \eta, \zeta) = & B_i(0) + B_{i,\xi}(0) \xi + B_{i,\eta}(0) \eta \\ & + B_{i,\zeta}(0) \zeta + 2B_{i,\xi\eta}(0) \xi \eta \\ & + 2B_{i,\eta\zeta}(0) \eta \zeta + 2B_{i,\xi\zeta}(0) \xi \zeta \end{aligned} \quad (7)$$

우변의 $B_i(0)$ 이외의 항은 강성매트릭스의 랭크(rank)가 떨어짐을 억제하는 효과를 갖는 항이다.

본 논문에서는 변형율의 전개와 체적적분에 있어서 야코비안(Jacobian) 매트릭스 J 를 요소내에서 일정하다고 가정한다. 따라서 등식 $\int \xi J d\xi d\eta = 0$, $\int \eta J d\xi d\eta = 0$, $\int \xi \eta J d\xi d\eta = 0$ 가 성립하고 식 (7)을 식 (3)에 대입함으로써 강성매트릭스 K_{ij}^s 와 안정화 매트릭스 K_{ij}^s 을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} K_{ij}^s = & VB_j^T(0) DB_i(0) \\ K_{ij}^s = & 1/3\{B_{i,\xi}^T(0) DB_{j,\xi}(0) + B_{i,\eta}^T(0) DB_{j,\eta}(0) \\ & + B_{i,\zeta}^T(0) DB_{j,\zeta}(0)\} V \\ & + 4/9\{B_{i,\xi\eta}^T(0) DB_{j,\xi\eta}(0) \\ & + B_{i,\eta\zeta}^T(0) DB_{j,\eta\zeta}(0) \\ & + B_{i,\xi\zeta}^T(0) DB_{j,\xi\zeta}(0)\} V \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 V 는 요소의 체적을 나타낸다. $B_{i,\xi}$, $B_{i,\eta}$, $B_{i,\zeta}$ 등은 원점에 대한 값이기 때문에 간단히 양의 형태로 나타낼 수 있다. 또 K_{ij}^s , K_{ij}^s 도 원점에 있어서 B_i , D , $B_{i,\xi}$, $B_{i,\eta}$, $B_{i,\zeta}$ 등에 의해서 평가할 수 있다.

3. 영 에너지 모드(4)

선형 탄성체인 4각형 요소를 대상으로 변형구속이 없는 상태에서 강성매트릭스의 고유치와 고유벡터를 이용해서 영 에너지 모드(zero energy mode: ZEM)를 구하였다. Fig. 1은 안정화 수법(RIS법), 전적분법(FI법), 선택저감적분법(SRI법), 저감적분법(RI법)의 ZEM의 수와 변형모우드를 나타낸다. RI법에서는 ZEM수가 5개이고 그 중

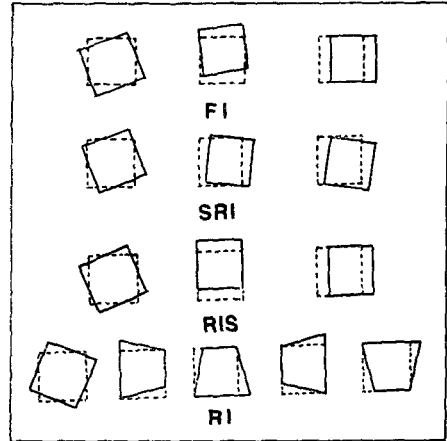


Fig. 1 Zero-energy mode

에서 4개가 모래시계모우드를 나타내고 있으나 RIS에서는 ZEM의 수가 3개이고 FI법, SRI법과 마찬가지로 강체변형모우드를 나타내고 있어 이 요소는 안정하다는 것을 알 수 있다.

4. 페널티형 강소성 유한요소법

여기서는 페널티형 강소성 유한요소법에 앞에서 논한 안정화 매트릭스를 도입한다. 페널티형 강소성 유한요소 방정식은 일반적으로 다음과 같이 표시할 수 있다⁽⁵⁾.

$$\begin{aligned} \int_V (gQ + \bar{\lambda}E) dV \bar{v} = \int_{A_i} \phi^T \bar{P} dA = \bar{f} \quad (9) \\ Q = B^T \bar{C} B, \quad E = B^T A A^T B \end{aligned}$$

여기서 $g = 2\bar{\sigma}/3\bar{\epsilon}$, $\bar{\sigma}$, $\bar{\epsilon}$ 는 상당응력과 상당변형률 속도, $\bar{\lambda}$ 는 페널티이고 A 는 1과 0을 성분으로 하는 벡터이다. \bar{f} 는 표면력 \bar{P} 에 등가인 절점력이다. \bar{C} 는 $\bar{C}_{ij} = 0(i \neq j)$, $\bar{C}_{ij} = 1(i = 1 \sim 3)$, $\bar{C}_{ij} = 1/2(i = 4 \sim 6)$ 인 정방매트릭스이다. 이 유한요소방정식은 절점변위속도 \bar{v} 에 대해 비선형 방정식이기 때문에 섭동(perturbation) 전개하여 2차항 이후의 고차의 항을 생략하고 선형화하여 해석한다.

$$\begin{aligned} \left\{ \int_V [gQ + \bar{\lambda}E + (g/\bar{\sigma})(\partial g/\partial \bar{\epsilon})\beta\beta^T] dV \right\} \Delta \bar{v} \\ = \bar{f} - \int_V (g\beta + \bar{\lambda}\bar{\beta}) dV \quad (10) \\ \beta = Q\bar{v}, \quad \bar{\beta} = E\bar{v} \end{aligned}$$

식 (10)의 매트릭스 B 에 대해서 식 (7)의 B 매트릭스를 대입하면 다음과 같은 식이 얻어진다.

$$[g(C^1 + C^e) + \bar{\lambda}E + (g/\bar{\sigma})(\partial g/\partial \bar{\epsilon})\beta\beta^T] V \Delta \bar{v}$$

$$= \tilde{f} - (g\beta' + \bar{\lambda}\bar{\beta}) V\bar{v} \quad (11)$$

$$\beta' = (C^1 + C^s)$$

여기서 C_{ij}^1 , C_{ij}^s 의 구체적인 형태는 식(12)와 같다.

$$\begin{aligned} C_{ij}^1 &= B_{i,j}^T(0) C B_{j,i}(0) \\ C_{ij}^s &= 1/3 \{ B_{i,\epsilon}^T(0) C B_{j,\epsilon}(0) + B_{i,\eta}^T(0) C B_{j,\eta}(0) \\ &\quad + B_{i,\tau}^T(0) C B_{j,\tau}(0) \} \\ &\quad + 4/9 \{ B_{i,\epsilon\eta}^T(0) C B_{j,\epsilon\eta}^T(0) + B_{i,\eta\tau}^T C B_{j,\eta\tau} \\ &\quad + B_{i,\tau\epsilon}^T(0) C B_{j,\tau\epsilon}(0) \} \end{aligned} \quad (12)$$

식 (11)은 통상의 강소성 유한요소법과 마찬가지로 해석할 수 있다. 즉 \bar{v} 를 가정하여 식 (11)에 의해 $\Delta\bar{v}$ 를 구하여 \bar{v} 를 수정한다. 이 수정량 $\Delta\bar{v}$ 가 충분히 작게 될 때까지 반복계산한다.

5. 수치해석 예

제한한 안정화 매트릭스를 도입한 페널티형 강소성 유한요소법에 의한 해의 성질을 검토하기 위해 RIS법과 SRI법에 의해 압축을 받는 블록의 3차원 변형해석을 행하여 그 결과를 비교하였다. 블록의 상당응력 $\bar{\sigma}$, 상당변형률 $\bar{\epsilon}$, 상당변형률 속도 $\bar{\dot{\epsilon}}$ 의 관계를 다음과 같이 가정한다.

$$\bar{\sigma} = \sigma_y (\bar{\epsilon}/\epsilon_0)^n (\bar{\dot{\epsilon}}/\dot{\epsilon}_0)^m \quad (13)$$

여기서 σ_y 는 $\dot{\epsilon}=0$ 일 때의 항복응력, m 은 변형률 속도 감도지수, n 은 가공경화 지수이고, ϵ_0 , $\dot{\epsilon}_0$ 는 기준변형률과 기준변형률 속도이다. 본 해석에서는 충분히 가공경화된 탄소강을 대상으로 이들 재료정수를 $\sigma_y=400\text{MPa}$, $\epsilon_0=0.002$, $\dot{\epsilon}_0=0.0024(1/s)$, $m=0.05$, $n=0.0625$ 로 하였다. 먼저, 여기서 정식화한 수법의 정도와 해석효율을 조사하기 위해서 양단이 고정된 한 변이 $2H$ 인 입방체블록이 Z 방향으로 단축압축을 받는 경우를 고려한다. 변형의 대칭성을 고려해서 블록의 1/8을 Fig. 2와 같이 8절점 6면체요소 64개로 요소분할해서 해석에 이용하였다. 또한, 변형해석의 정도와 효율을 좌우하는 시간스텝의 크기는 80스텝에서 압축방향의 변위가 $0.2H$ 가 되도록 결정했다. Fig. 3에 단면에 가한 평균응력을 항복응력으로 정규화한 값 $\bar{\sigma}/\sigma_y$ 와 압축률 $\bar{\eta}=h/H$ (h : 변형 후의 높이)의 관계를 나타내었다. Fig. 4와 Fig. 5에 $\bar{\eta}=0.8$ 에 대한 변형형상과 상당변형률 분포를 나타내었다. 하중과 변위 관계에 있어서 SRI법과 RIS법에 의한 결과는 거의 일치하고 있다. 그리고, 변형형상의 결과도 거의 유사하다. 저감적분법에 의한 결과는 변형형상에

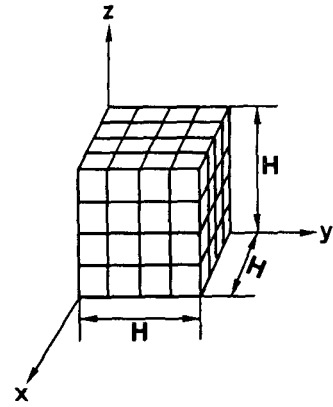


Fig. 2 Finite element discretization

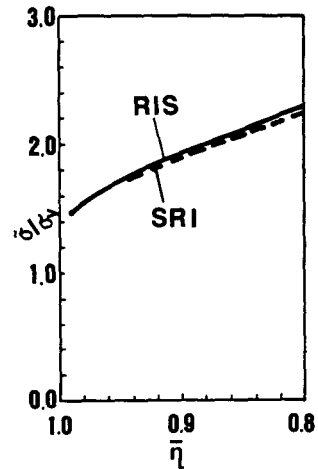


Fig. 3 Nominal load $\bar{\sigma}/\sigma_y$ versus compression ratio $\bar{\eta}$

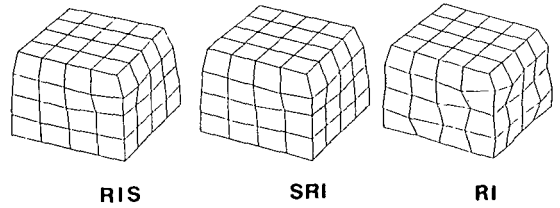


Fig. 4 Deformed configuration ($\bar{\eta}=0.8$)

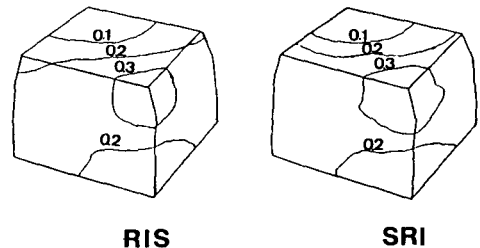


Fig. 5 Contours of equivalent strain ($\bar{\eta}=0.8$)

Table 1 Computation efficiency

Case	CPU time(s)	No. of iteration	No. of step
SRI	763.49	681	80
RIS	281.66	610	80

모래시계모우드의 불안정이 발생하여 안정된 해를 기대하기 어렵다⁽⁶⁾. 또 블록표면의 상당 변형률분포에서도 양자의 대응은 좋다. 따라서 RIS법에 의해서 SRI법과 같은 정도의 해석정도를 얻을 수 있다고 생각된다. 한편 계산효율을 조사하기 위해 Table 1에 계산에 사용한 NEC ACOS-2000의 CPU시간과 반복회수를 나타내었다. 제안한 RIS법은 SRI법의 CPU 시간을 약 1/3로 억제할 수 있었다. 또한 각 변형스텝에서 해가 수렴되기까지의 반복회수도 약간 적게 되었다. 더욱이 본 수법은 적분점이 1개이기 때문에 병렬처리를 도입하기 쉽고

종래의 SRI법과 비교하여 기억용량이 1/8로 적게 드는 것이 특징이다. Fig. 6은 내부에 장방형 구멍이 뚫린 원통이 길이방향으로 압축을 받고 있을 때의 변형해석을 위한 요소분할을 나타낸다. 원통의 대칭성을 고려하여 8절점 6면체 요소 750개로 요소분할하였고 계산시간은 NEC SX-2 컴퓨터로 60스텝에 약 8분 소요되었다. Fig. 7과 8은 각각 압축율이 $\bar{\eta}=0.7, 0.8, 0.9$ 일 때의 변형형상과 상당변형률 분포를 나타낸다. 이들 결과 역시 격자의 불안정은 보이지 않는다. Fig. 8은 병렬처리를 도입했을 때의 자유도와 계산효율의 관계이다. 자유도가 적을 때는 병렬처리의 유무에 큰 영향이 없으나 자유도가 증가하면 계산효율이 향상되는 것을 알 수 있다. 본 해석모델과 같은 자유도를 가질 때는 병렬처리(벡터화 93.7%)를 함으로써 약 20배의 계산시간을 절약할 수 있었다. 따라서 종래의 선택적 감적분법을 이용한 결과와 비교하면 약 60배의 계산시간을 절약할 수가 있고 또한 계산의 정도문제

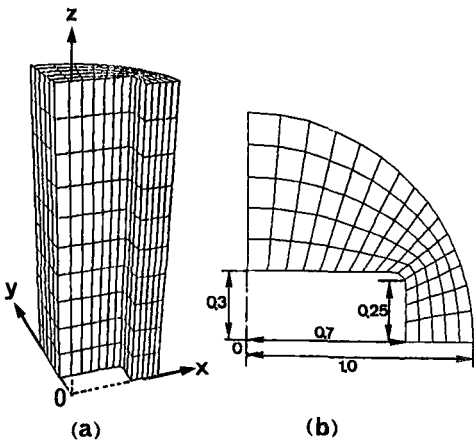


Fig. 6 Finite element discretization (a) and geometry of end surface (b)

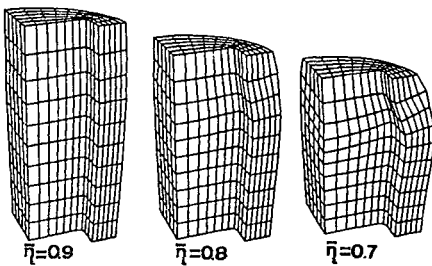


Fig. 7 Deformed configuration

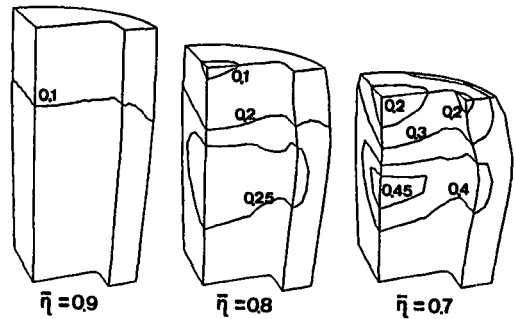


Fig. 8 Contours of equivalent strain

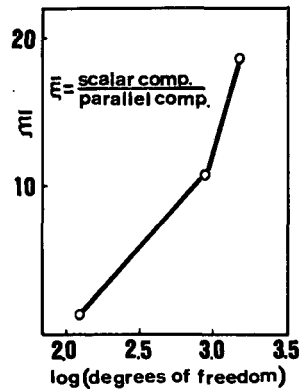


Fig. 9 Degrees of freedom versus efficiency of computation

도 선택저감적분의 결과와 상당히 일치하는 것을 볼 때 실용적인 3차원 해석에 유용하다고 생각한다.

6. 결 론

저감적분법에 의해 얻어진 강성매트릭스에 ZEM의 발생을 억제하는 안정화 매트릭스를 추가하는 것에 의해 강소성변형을 안정상태에서 효율 좋게 해석하는 강소성 유한요소법을 정식화하였다. 본 방법을 이용한 3차원 블럭압축 문제의 해석을 통하여 해의 안정성과 효율성을 확인하였다. 한편 병렬처리를 행하는 경우는 문제의 자유도가 증가할수록 종래의 선택저감적분법에 비교하여 계산속도가 향상된다.

참 고 문 헌

- (1) Malkus, D.S. and Hughes, T.J.R., 1978, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. 15, p. 63.
- (2) Belytschko, T., Ong, J.S. -J., Liu, W.K. and Kennedy, J.M., 1985, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. 43, p. 215.
- (3) Liu, W.K., Ong, J.S. -J. and Uras, R.A., 1985, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. 53, p. 13.
- (4) Bicanic, N and Hinton, E., 1979, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 14, p. 1545.
- (5) Tomita, Y., 1987, *기계의 연구*, Vol. 39, p. 1255.
- (6) 추만석, Tomita, Y. and Shindo, A., 1987, *일본기계학회 강연논문집*. No. 132.