

〈論 文〉

集中荷重을 받는 正方形 平板의 三次元 彈性理論에 의한 應力解析

梁仁榮* · 丁太權* · 李相鎬**

(1988년 12월 29일 접수)

An Analytical Study of Stresses in a Square Flat Plate Subjected to a Concentrated Load Using the Three-Dimensional Theory of Elasticity

In-Young Yang, Tae-Gweon Jeong and Sang-Ho Lee

Key Words : Three-Dimensional Theory of Elasticity(三次元 彈性理論), Classical Plate Theory(古典板 理論), Concentrated Load(集中荷重), Square Flat Plate(正方形 平板)

Abstract

In the stress analysis of plate, Classical plate theories are generally used. But, in applying these theories the stresses underneath the concentrated load point cannot be analyzed because the solution of stress fails to converge. In this paper, therefore, an attempt is made to analyze the stresses directly underneath the concentrated load point for a supported square plate by using the three dimensional theory of elasticity and the potential theory of displacement on the supposition that uniformly distributed load acts on the central part of it. In order to clarify the validity of the theoretical analysis, experiments for strain are carried out with a square plate. It is shown that these theoretical results are in close agreement with experimental results. Specially, this analysis is in a good agreement with actual phenomenon in case of the thick plate.

기 호 설 명

$2a$: 板의 一邊의 길이

c : 等分布荷重 作用領域

E : 彈性係數

F_0 : 集中荷重

G : 剪斷彈性係數

h : 板두께

H : 單位스텝 函數

m, n : 級數

q_0 : 等分布荷重

$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$: 未定係數

$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$: 剪斷變形率成分

$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$: 垂直變形率成分

$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$: 剪斷應力成分

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$: 垂直應力成分

$\varphi_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$: 變位포텐셜

ν : 프와송 比

1. 序 論

平板의 應力解析에는 主로 古典板理論으로서 유명한 Lagrange의 板理論이나 여기에 剪斷變形의 영향을 고려한 Reissner의 式 또는 回轉慣性和 剪斷變形을 고려함으로써 수정된 Mindlin의 式이 널리 利用되고 있다⁽¹⁾.

그러나 이들 이론을 利用하면 集中荷重作用點에

* 정회원, 조선대학교 공과대학 기계설계공학과

** 조선대학교 대학원 기계공학과

서 변위의 해석은 가능하나 응력과 변형률의 해석은 해가 발산하기 때문에不可能하다^(2,3).

最近에 宇治橋^(4,5) 등은 集中荷重作用點에서 應力을 解析할 目的으로 저차이론인 고전판이론의 결점을 보완한 高次近似理論을 利用한 應力解析方法을 研究하였으나 計算結果가 갖는 精度가 좋지 않았다.

따라서 本 研究에서는 板理論으로서의 解析이 不可能한 集中荷重作用點에서 應力을 解析할 目的으로 三次元彈性理論과 變位포텐셜(potential) 理論을 利用하여 有限平板의 集中荷重作用點에서의 應力을 解析하는 方法을 提案하고저 한다.

解析時에는 直角座標系 解析을 行했으며 本 應力解析方法의 適用性을 明確히 하기 위하여 支持된 正方形板의 중앙에 單應재로 시험기에 의하여 集中荷重을 가하고 荷重作用點 反對側에 2軸전기저항선 스트레인 게이지를 貼착하여 計測된 變形率과 本理論解析에서의 變形率의 數值解析結果와를 比較하여 有限正方形板에서의 本 應力解析方法의 적용性을 明確히 하였다. 平板의 시료로서는 가격이 싸고 구입이 간단하며 破壞에 큰 에너지가 필요하지 않는 유리板을 택하여 굽힘시험을 行했으며 실험범위는 유리板이 파괴할 때까지로 하였다.

2. 理論解析

2.1 正方形 板의 應力解析

Fig. 1과 같이 支持된 正方形平板의 중앙(2c×2c)인 영역에 等분포하중 q₀가 作用하는 경우를 생

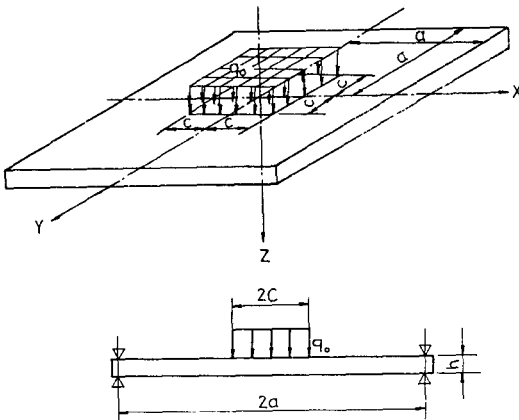


Fig. 1 A square plate subjected to a partial distributed load

각하여 正方形板에 生기는 應力을 解析한다. 正方形板의 中央에 原點을 잡고 直角座標 x, y, z에 대응한 變位成分을 u, v, w, 수직응력성분을 σ_x, σ_y, σ_z, 전단응력성분을 τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz}라 하면 三次元 彈性基礎式은 다음과 같다⁽⁶⁾.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

또한 應力과 變形率成分의 관계식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2G(\epsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu}e), \\ \sigma_y &= 2G(\epsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu}e), \\ \sigma_z &= 2G(\epsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu}e) \\ \tau_{xy} &= \gamma_{xy}G, \quad \tau_{xz} = \gamma_{xz}G, \quad \tau_{yz} = \gamma_{yz}G \end{aligned} \tag{2}$$

여기서

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \text{이다.} \end{aligned}$$

式(2)를 式(1)에 代入하면 다음과 같은 變位方程式을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \nabla^2 u + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial x} &= 0 \\ \nabla^2 v + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial y} &= 0 \\ \nabla^2 w + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

式(3)의 變位方程式을 풀기 위하여 다음과 같은 變位포텐셜 理論^(7,8)을 도입한다.

$$\begin{aligned} 2Gu &= \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + \frac{\partial \lambda_3}{\partial y} - \frac{\partial \lambda_2}{\partial z} \\ 2Gv &= \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} + \frac{\partial \lambda_1}{\partial z} - \frac{\partial \lambda_3}{\partial x} \\ 2Gw &= \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} + \frac{\partial \lambda_2}{\partial x} - \frac{\partial \lambda_1}{\partial y} \end{aligned} \tag{4}$$

變位成分을 계산하기 위하여 다음과 같이 變位포텐셜에 대한 近似解의 형을 가정하였다.

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \Phi_{mn} \cos \alpha_m x \cos \alpha_n y \\ \lambda_1 &= \Delta^1_{mn} \cos \alpha_m x \sin \alpha_n y \\ \lambda_2 &= \Delta^2_{mn} \sin \alpha_m x \cos \alpha_n y \end{aligned} \tag{5}$$

$$\lambda_3 = \Delta^3 \sin \alpha_m x \sin \alpha_n y$$

여기서 $\alpha_m = \frac{\pi(2m-1)}{2a}$, $\alpha_n = \frac{\pi(2n-1)}{2a}$ 이며 式

(5)의 φ_0 는 회전성분이 0인 변위 포텐셜이고 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 는 각각 x, y, z 축 둘레의 회전성분을 나타내는 변위 포텐셜이기 때문에 평판의 가장자리인 $x = \pm a, y = \pm a$ 에서 회전성분이 0이기 위해서는 $\cos \alpha_m x \cos \alpha_n y$ 가 되어야 하며 λ_1 은 x 축은 회전하지 않고 y 축만 회전하기 위해서는 $\cos \alpha_m x \sin \alpha_n y$ 이어야 되고 λ_2 는 y 축은 회전하지 않고 x 축만 회전하기 위해서는 $\sin \alpha_m x \cos \alpha_n y$ 이어야만 한다. 이때 두계방향의 回轉성분을 0으로 하면 λ_3 가 0이기 위해서는 $\sin \alpha_m x \sin \alpha_n y$ 이어야만 한다.

또한 應力成分을 구하기 위하여 式 (4)를 式 (2)에 代入하면 다음과 같은 應力成分과 變位포텐셜과의 관계식이 얻어진다.

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial x \partial z} + \frac{\nu}{1-2\nu} \nabla^2 \varphi_0 \quad (6)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial y \partial z} + \frac{\nu}{1-2\nu} \nabla^2 \varphi_0$$

$$\sigma_z = \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial z \partial y} + \frac{\nu}{1-2\nu} \nabla^2 \varphi_0$$

$$\tau_{xy} = \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial y \partial z} \right)$$

$$\tau_{xz} = \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial z^2} \right)$$

$$\tau_{yz} = \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z \partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial z^2} \right)$$

式 (3)에 式 (4)를 代入하면 變位포텐셜을 만족할 방정식은 다음과 같다.

$$\nabla^2 \varphi_0 = 0, \quad \nabla^2 \lambda_1 = 0, \quad \nabla^2 \lambda_2 = 0 \quad (7)$$

결국 式 (4)를 푸는 대신에 式 (7)을 푸는 것으로 한다.

式 (7)의 解를 구하기 위하여 式 (7)에 變位포텐셜의 근사해의 式 (5)를 代入하여 정리하면 다음과 같은 2계상미분 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi_0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[-(\alpha_m^2 + \alpha_n^2) \Phi_{mn}(z) \right. \\ &\quad \left. + \frac{d^2 \Phi_{mn}(z)}{dz^2} \right] \cos \alpha_m x \cos \alpha_n y \\ \nabla^2 \lambda_1 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[-(\alpha_m^2 + \alpha_n^2) \Delta^1_{mn}(z) \right. \\ &\quad \left. + \frac{d^2 \Delta^1_{mn}(z)}{dz^2} \right] \cos \alpha_m x \sin \alpha_n y \quad (8) \\ \nabla^2 \lambda_2 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[-(\alpha_m^2 + \alpha_n^2) \Delta^2_{mn}(z) \right. \\ &\quad \left. + \frac{d^2 \Delta^2_{mn}(z)}{dz^2} \right] \sin \alpha_m x \cos \alpha_n y \end{aligned}$$

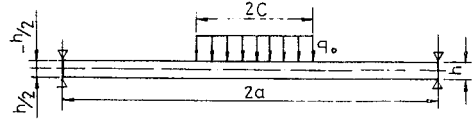


Fig. 2 Boundary condition

一般解는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [X_1 e^{\beta_{mn} z} + X_2 e^{-\beta_{mn} z}] \cos \alpha_m x \cos \alpha_n y \\ \lambda_1 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [X_3 e^{\beta_{mn} z} + X_4 e^{-\beta_{mn} z}] \cos \alpha_m x \sin \alpha_n y \\ \lambda_2 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [X_5 e^{\beta_{mn} z} + X_6 e^{-\beta_{mn} z}] \sin \alpha_m x \cos \alpha_n y \end{aligned} \quad (9)$$

여기서 $\beta_{mn}^2 = \alpha_m^2 + \alpha_n^2$ 이다.

式 (9)의 未定係數 $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$ 을 구하기 위하여는 解析的으로 구하기가 곤란하므로 Gauss 소거법에 의한 數值解析方法에 의하여 계산하였다.

먼저 Fig. 2와 같이 한 변의 길이가 $2a$ 인 정방형 판의 한 중앙($2c \times 2c$)인 영역에 등분포하중 q_0 가 작용하는 경우를 생각하면 경계조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{(i) } z = -h/2 \text{에서} \\ \sigma_x = -q_0 H(c-|x|) \cdot H(c-|y|), \\ \tau_{xz} = \tau_{zy} = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \text{(ii) } z = h/2 \text{에서} \\ \sigma_x = \tau_{xz} = \tau_{zy} = 0 \end{aligned}$$

여기서 H 는 單位 step함수이다. 應力과 變位포텐셜의 관계식 (6)에 경계조건 式 (10)을 代入하면 未定係數 X_1, \dots, X_6 를 결정할 수 있는 6元聯立對數方程式이 얻어진다. 그러나 式 (6)에 變位포텐셜의 一般解의 式 (9)를 代入하면 式 (6)의 σ_z 는 周期函數이고 경계조건 式은 單位 스텝函數이기 때문에 이 두 式의 σ_z 를 같은 함수의 형태로 표현하기 위하여 $\cos \alpha_m x, \cos \alpha_n y$ 의 直交性을 利用하여 Fourier cosine 급수로 變換하면 σ_z 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\beta_{mn}^2 e^{-\frac{\beta_{mn} h}{2}} X_1 + \beta_{mn}^2 e^{\frac{\beta_{mn} h}{2}} X_2 \right. \\ &\quad \left. - \alpha_n \beta_{mn} e^{-\frac{\beta_{mn} h}{2}} X_3 \right. \\ &\quad \left. + \alpha_n \beta_{mn} e^{\frac{\beta_{mn} h}{2}} X_4 + \beta_{mn} \alpha_m e^{-\frac{\beta_{mn} h}{2}} X_5 \right. \\ &\quad \left. - \beta_{mn} \alpha_m e^{\frac{\beta_{mn} h}{2}} X_6 \right] \\ &= -q_0 \frac{4 \sin(\alpha_m c) \sin(\alpha_n c)}{\alpha_m \alpha_n a^2} \quad (11) \end{aligned}$$

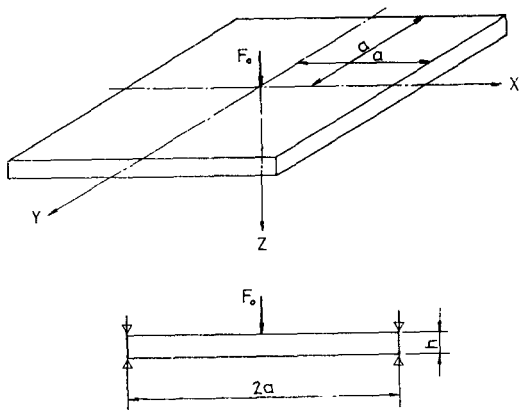


Fig. 3 A square plate subjected to a concentrated load on center

式(11)의 우변을 集中荷重이 作用하는 형태로 만들기 위하여 Fig. 1에서의 등분포하중 작용영역 c 를 중앙점으로 수렴시켜 Fig. 3과 같이 集中荷重 F_0 가 作用하는 것으로 했으며 수식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\lim_{c \rightarrow 0} \left\{ 4q_0 c^2 \frac{\sin(\alpha_m c) \sin(\alpha_n c)}{a^2 (\alpha_m c) (\alpha_n c)} \right\} = \frac{F_0}{a^2}$$

$$F_0 = 4c^2 q_0 \quad (12)$$

이상의 결과를 利用하여 數値解析에 의해 미정계수를 구했다. 이렇게 하여 變位포텐셜의 일반해의 式(9)가 구해졌으므로 이를 式(6)에 代入하면 平板에서 應力成分의 式은 다음과 같이 구해진다.

$$\sigma_x = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [(-\alpha_m^2) (X_1 e^{\beta m n z} + X_2 e^{-\beta m n z}) - (\beta_{m n} \alpha_m) (X_5 e^{\beta m n z} - X_6 e^{-\beta m n z})] \cos \alpha_m x \cos \alpha_n y$$

$$\sigma_y = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [(-\alpha_n^2) (X_1 e^{\beta m n z} + X_2 e^{-\beta m n z}) + \alpha_n \beta_{m n} (X_3 e^{\beta m n z} - X_4 e^{-\beta m n z})] \cos \alpha_m x \cos \alpha_n y$$

$$\sigma_z = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [(\beta_{m n}^2) (X_1 e^{\beta m n z} + X_2 e^{-\beta m n z}) - (\alpha_n \beta_{m n}) (X_3 e^{\beta m n z} + X_4 e^{-\beta m n z}) + \beta_{m n} \alpha_m (X_5 e^{\beta m n z} - X_6 e^{-\beta m n z})] \cos \alpha_m x \cos \alpha_n y \quad (13)$$

2.2 變形率 解析

2.1에서와 같은 方法으로 變位포텐셜의 式(4)에 變位포텐셜의 一般解의 式(9)를 代入하여 變位의 成分 u, v, w 를 計算하고 이를 式(2)의 變形率과

變位の 關係式에 代入하면 變形率成分의 式은 다음과 같다.

$$\epsilon_x = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2G} \left[(-\alpha_m^2) (X_1 e^{\beta m n z} + X_2 e^{-\beta m n z}) - \beta_{m n} \alpha_m (X_5 e^{\beta m n z} - X_6 e^{-\beta m n z}) \right] \cos \alpha_m x \cos \alpha_n y$$

$$\epsilon_y = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2G} \left[(-\alpha_n^2) (X_1 e^{\beta m n z} + X_2 e^{-\beta m n z}) + \beta_{m n} \alpha_n (X_3 e^{\beta m n z} - X_4 e^{-\beta m n z}) \right] \cos \alpha_m x \cos \alpha_n y$$

$$\epsilon_z = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2G} \left[\beta_{m n}^2 (X_1 e^{\beta m n z} + X_2 e^{-\beta m n z}) - \alpha_n \beta_{m n} (X_3 e^{\beta m n z} - X_4 e^{-\beta m n z}) + \alpha_m \beta_{m n} (X_5 e^{\beta m n z} - X_6 e^{-\beta m n z}) \right] \cos \alpha_m x \cos \alpha_n y \quad (14)$$

3. 變形率 實驗

本 理論解析의 타당성을 검토하기 위하여 脆性材料인 유리板을 시료로 선택하여 周邊이 支持된 正方形板위에 鋼球(직경 5mm)로 集中荷重을 가하면서 脆性材平板의 集中荷重作用點 및 作用點으로부터 임의거리 떨어진 곳에 생기는 變形率을 計測하였다.

3.1 實驗裝置 및 實驗方法

本 實驗에 利用한 시험편은 1邊의 길이 300mm

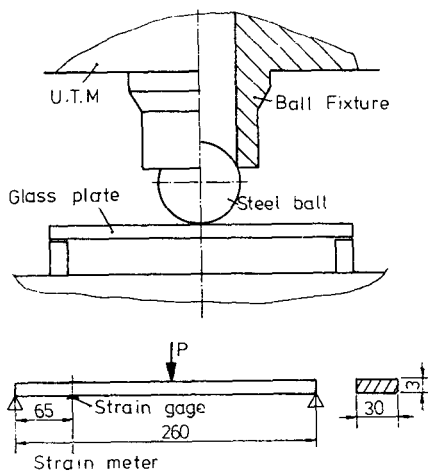


Fig. 4 3-Point bending test

Table 1 Results of static 3-point bending test

P (kg)	$\epsilon_x (\times 10^{-6})$	$\epsilon_y (\times 10^{-6})$	E (GPa)	ν
1.27	135.5	-30.5	66.4	0.225
1.03	109	-23.5	66.9	0.216
0.71	73	-15.5	68.9	0.212
0.375	39.8	-9.0	68.1	0.226

인 正方形 flot 유리板이며 試驗片을 鐵製의 支持 상자 위에 올려놓고 만능재료시험기에 의해 중앙에 靜荷重을 가하면서 static strain meter(東京測器(株)製 TDS-301)에 의해 變形率 測定實驗을 행하였다. 또한 材料定數의 測定은 Fig. 4와 같이 長方形試驗片의 1단에서 65mm인 곳에 軸方向과 直角方向에 2軸 전기저항선 스트레인 게이지를 붙여 만능재료 시험기의 cross head강하속도를 0.1cm/min.로 하여 鋼球로 유리板의 중앙에 하중을 가하면서 정적굽힘시험을 행했다.

測定結果 얻어진 데이터는 Table 1과 같고 實驗에서 얻어진 材料定數는 다음과 같다. 유리板의 프와송 比는 0.22, 탄성계수는 67.6 (GPa)이었다.

3.2 測定條件

變形率의 測定條件으로서는 試驗片의 주변을 4邊 단순지지로 했으며 鋼球의 직경은 5mm로 하였다. 게이지의 접착개소 즉 변형률의 측정위치는 Fig. 5와 같으며 각각의 점에 2軸전기저항선 스트레인 게이지를 접착하여 變形率 ϵ_x, ϵ_y 를 測定하였다.

특히 한 中央에 集中荷重이 作用하는가를 확인하기 위하여 중앙점에 2軸전기저항선 스트레인 게이지를 붙여 x, y 방향의 변형률 ϵ_x, ϵ_y 를 測定하여 두 값의 크기가 같을 경우를 中央에 集中荷重이 作用하는 것으로 결정하여 중앙점과 중앙점에서 50mm 떨어진 곳의 變形率 ϵ_x, ϵ_y 를 測定하였다.

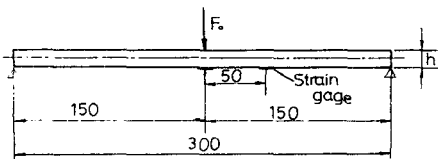


Fig. 5 The bonded places of strain gage

實驗에 사용된 스트레인 게이지(KFC-2-D16-11)의 제원은 저항 120 Ω , 게이지 인자 2.09, 게이지 길이 2mm였다.

4. 理論解析 結果와 實驗結果와의 比較

本章에서는 三次元彈性理論과 變位 포텐셜 理論을 利用한 有限板의 變形率의 變換式 (14)를 數值計算한 結果와 4邊이 단순지지된 正方形 유리板에 鋼球로 集中荷重을 作用시켜 計測한 變形率의 實驗結果와를 比較하여 本論文에서의 應力解析方法의 적용성에 關하여 검토하였다. 數值解析에 利用한 材料定數는 3點굽힘실험에 의해서 얻어진 값을 利用하였으며 板의 剪斷彈性係數 G 는 $E=2G(1+\nu)$ 의 關係式으로부터 計算하여 2.77×10^{20} (pa)의 값을 利用하였다. 또한 板은 한변의 길이가 300mm이며 板두께 2mm, 3mm, 5mm인 正方形板으로 하였으며 각각의 板두께에 대하여 중앙점($z=h/2, x=y=0$) 및 하중작용점으로부터 50mm 떨어진 點($z=h/2, x=50\text{mm}, y=0$)에서 x 方向의 變形率 ϵ_x 와 y 방향의 變形率 ϵ_y 를 計算하였다. 통상 급수는 계산결과와의 수렴성을 보아가며 중앙점에서는

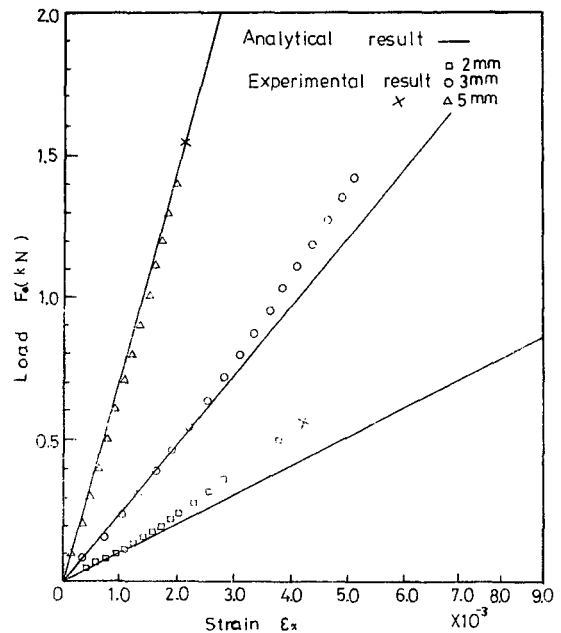


Fig. 6 Comparison of analytical result with experimental result of strain ϵ_x underneath concentrated load point

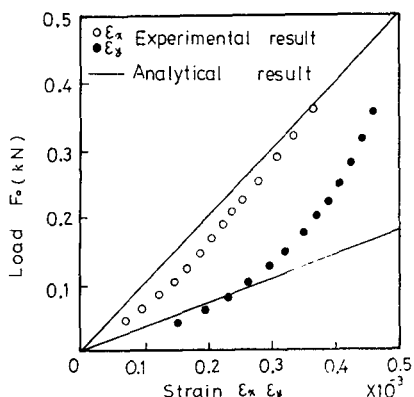


Fig. 7 Comparison of analytical result with experimental result of strains ϵ_x, ϵ_y at the 50mm apart from concentrated load point ($h=2\text{mm}$)

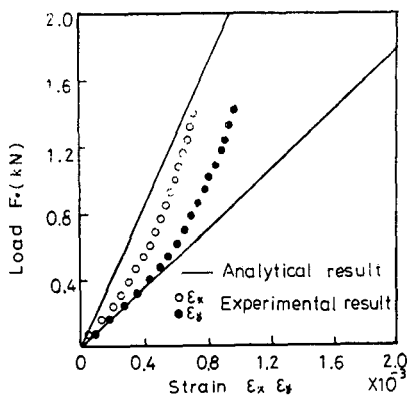


Fig. 8 Comparison of analytical result with experimental result of strains ϵ_x, ϵ_y at the 50mm apart from concentrated load point ($h=3\text{mm}$)

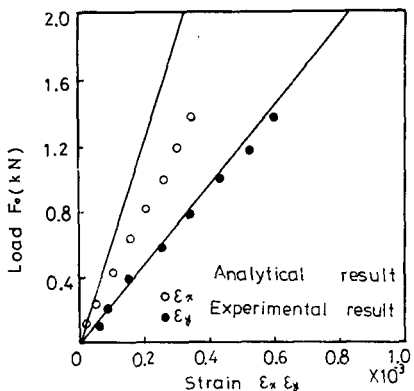


Fig. 9 Comparison of analytical result with experimental result of strains ϵ_x, ϵ_y at the 50mm apart from concentrated load point ($h=5\text{mm}$)

$m=n=90$ 으로 계산하였으며 數值解析에는 東京工業大學 情報處理센터의 HITAC M-280H를 사용하였다. 또한 變位 포텐셜의 一般解의 미정계수를 계산할 때 式 (12)와 같이 等分布荷重作用領域 c 를 0으로 수렴시켜 集中荷重이 作用하는 것으로 하여 計算하였다. Fig. 6은 集中荷重作用點에서의 變形率 ϵ_x, ϵ_y 의 數值計算結果와 實驗結果와를 比較한 것이며 Fig. 7, Fig. 8, Fig. 9는 각각 集中荷重作用點으로부터 50mm 떨어진 곳에서의 板두께 2mm, 3mm, 5mm인 유리板에서 數值計算結果와 實驗結果를 比較한 것이다. Fig. 6에서 알 수 있는 바와 같이 板두께 5mm인 경우 靜荷重作用點 아래서 本 理論解析結果와 實驗結果는 잘 근사하고 있다. 그러나 板두께 2mm, 3mm의 경우는 처음에는 잘 근사하고 있으나 靜荷重이 커짐에 따라 變形率의 測定값은 理論값보다 약간 작게 되는 경향이 보이며 特히 板두께 2mm의 경우에 그 경향이 현저하다. 이는 板두께가 얇을수록 또 靜荷重이 클수록 시험편 支持의 영향이 크게 되며 理論解析에서의 境界條件과 實驗시 支持條件이 다르기 때문이라고 생각된다. (理論解析時는 단순지지이나 實驗에서는 시험편을 支持하고 있는 4번지지 상자의 두께가 5mm라는 면적을 갖는 支持條件 때문이라고 생각된다.) 또한 集中荷重 作用點으로부터 50mm 떨어진 곳에서도 中央點에서와 비슷한 현상이 생김을 알 수 있지만 集中荷重作用點에서 理論解析結果와 實驗結果와의 오차보다도 크게 됨을 알 수 있다. 이것은 變形률의 측정위치가 支持部에 가깝기 때문에 支持條件의 영향이 보다 크게 나타났다고 생각되나 支持條件의 差異를 고려한다면 충분한 研究의 目的을 달성했다고 생각된다. 以上の 결과로부터 三次元彈性理論을 利用한 集中荷重作用點에서의 應力解析方法이 적용가능하며 本 應力解析方法의 妥當性이 實驗에 의해서 확인되었다.

또한 앞으로 支持條件을 knife edge 형태로 變換시켜 실험을 행하면 理論解析結果와 보다 잘 近似할 것으로 생각된다. 또한 本 理論의 적용범위로서 유리가 아닌 다른 재료라고 하더라도 탄성범위에서는 本 해석방법이 잘 근사할 것으로 생각된다.

5. 結論

有限平板이 集中荷重을 받을 때 集中荷重作用點에 생기는 應力을 解析할 目的으로 三次元彈性理論

과 變位포텐셜 理論을 利用한 本 應力解析方法의 適用性을 검토한 결과 다음과 같은 結論을 얻었다.

(1) 三次元彈性理論에 의해 古典板理論에서는 解析할 수 없는 集中荷重作用點에서 平板의 應力을 正確히 解析할 수 있었다.

(2) 數值計算에 의해 얻어진 平板의 變形率은 實驗結果와 잘 近似하며, 板 두께가 두꺼울수록 實際의 現象과 잘 一致하였다.

參 考 文 獻

- (1) 梁仁榮, 1988, “集中衝擊荷重을 받는 正方形板의 三次元動彈性理論에 의한 應力解析”, 全南大學校 博士學位論文.
- (2) Timoshenko, S.P., Woinowsky, K.S., 1959, “Theory of Plates and Shell”, McGraw-Hill, New York, pp. 63~69.
- (3) Ugral, A.C., 1981, “Stresses in Plates and Shells”, McGraw-Hill, New York, p. 38.
- (4) 宇治橋, 山田, 1983, “高次近似理論による圓板의 軸對稱衝擊應答의 解析”, 日本機械學會論文集(A編), Vol. 49, No. 448, pp. 1522~1530.
- (5) 宇治橋, 松浦, 1983, “高次近似理論によるはりの 衝擊應答의 解析”, 日本機械學會論文集(A編), Vol. 49, No. 445, p.1110.
- (6) 平修二, 1974, “現代彈性學”, 오ーム社, 東京, p. 26.
- (7) Achenbach, J.D., 1975, “Wave Propagation in Elastic Solids”, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, Oxford, p. 67.
- (8) 中原 一郎, 1985, “應用彈性學”, 實教出版社, 東京, p. 207.