

<論 文>

J_k 적분을 이용한 이방성 복합적층판에 대한
혼합 모우드 파괴문제의 해석

朱 碩 宰* · 洪 昌 善**

(1989년 3월 14일 접수)

**Analysis of Mixed Mode Crack Problems for Anisotropic Composite
Laminates Using the J_k Integral**

S. J. Chu and C. S. Hong

Key Words : Anisotropic Material(이방성 재료), Stress Intensity Factor(응력강도계수), Path Independent Integral(경로독립적분), Mixed Mode(혼합 모우드), J_k Integral(J_k 적분), Strain Energy Release Rate(스트레인 에너지 해방률)

Abstract

The J_k integral method for determining mixed mode stress intensity factors separately in the cracked anisotropic plate is developed. Stress intensity factors are indirectly determined from the values of J_1 and J_2 . The J_2 integral can be evaluated efficiently from a finite element solution, neglecting the contribution from the portion of the integration contour along the crack faces, by selecting the integration contour in the vicinity of the crack tip. Using functions of a complex variable, the complete relations between J_1 , J_2 and K_I , K_{II} for anisotropic materials are derived conveniently by selecting narrow rectangular contours shrinking to the crack tip. Compared to the existing path independent integral methods, the present method does not involve calculating the auxiliary solution and hence numerical procedures become quite simple. Numerical results to various problems are given and demonstrate the accuracy, stability and versatility of the method.

1. 서 론

섬유강화 복합재료(fiber reinforced composite material)의 사용이 증가함에 따라 이방성 재료의 파괴역학도 많이 진보하였다. 이방성 평판 내의 균열에 대한 응력강도계수를 계산하는 방법이 여러 가지 개발되었다. 이것들은 대체로 원래 등방성 재료(isotropic material)에 대하여 개발한 방법을 이방성 재료까지 다룰 수 있게 확장한 것이다.

유한요소의 해로 응력강도계수를 계산하는 것은 실제적인 중요성을 지닌다. 유한요소법은 실제적인 구조물을 해석하기에 적합한 방법 중 현재 가장 보편적으로 사용하는 방법이기 때문이다. 이와 같이 유한요소의 해로 응력강도계수를 계산하는 방법 중에서 에너지 해방률을 계산하고 이것으로 응력강도계수를 간접적으로 계산하는 방법이 유한요소의 내재적인 오차가 상쇄되는 효과(canceling effect)가 있기 때문에 널리 애용되었다⁽¹⁾. 이미 잘 알려진 경로독립적분인 J 적분⁽²⁾은 균질탄성체(homogeneous elastic body) 내에서 균열이 연장할 때의 에너지 해방률과 동일한 것이다. 순수모우드(pure

*정회원, 울산대학교 공과대학 기계공학과

**정회원, 한국과학기술원 기계공학과

mode)인 경우는 이방성 재료에 대하여도 J 적분으로 응력강도계수를 효율적으로 계산할 수 있다^(3,4). 그렇지만, 혼합모우드인 경우는 단순히 J 적분만 계산한 것으로는 혼합모우드 응력강도계수를 분리하여 결정할 수 없다.

혼합모우드 균열문제를 다룰 수 있는 두 가지의 서로 다른 경로독립적분 방법은 원래 등방체에 대하여 개발한 것이다. Stern 등은⁽⁵⁾ Betti의 상호 일 원리(reciprocal work theorem)에 근거한 경로 독립 선적분 방법(contour integral method)을 개발하였고 Yau 등은⁽⁶⁾ 중첩하기 전의 독립적인 탄성상태로부터, 중첩한 후의 탄성상태에 대한 J 적분에서의 기여량을 분석함으로써 경로독립적분을 개발하였다. 이 두 방법에서는 이미 알려진 보조탄성해(auxiliary elastic solution)를 모든 적분경로를 따라 계산하는 것이 필요하다. Wang 등은⁽⁷⁾ Yau 등이⁽⁶⁾ 개발한 방법을 Kim은⁽⁸⁾ Stern 등이⁽⁵⁾ 개발한 방법을 이방체를 다룰 수 있도록 확장하였다.

J_k 적분은⁽⁹⁾ 균열의 평행이동(translation)에 관한 에너지 해방률이라고 해석할 수 있다⁽¹⁰⁾. J_1 적분은 J 적분과 동일한 것이다. J_1 적분과 J_2 적분이 서로 독립적인 두 가지의 정보를 제공하기 때문에 J_k 적분으로 혼합모우드 균열문제를 다룰 수 있다. Hellen과 Blackburn이나⁽¹¹⁾ Cherepanov는⁽¹²⁾ 등방성 재료에 대하여 J_1 , J_2 적분과 K_I , K_{II} 사이의 완전한 관계를 제시하였다. Chen과 Lin은⁽¹³⁾ 이 관계를 이용하여 J_1 적분과 J_2 적분으로부터 응력강도계수를 결정하였다. 그렇지만, 이방성 재료에 대하여는 이런 완전한 관계식이 아직 알려져 있지 않다. 더구나 균열면 상에 놓인 적분구간으로부터 J_2 적분에서의 기여량이 일반적으로 0이지 않아서⁽¹⁴⁾ 이 기여량을 계산하는 것이 필요하고, 만약 그 기여량을 바로 계산한다면 유한요소의 내재적인 오차의 영향을 받는다.

본 논문에서는 J_1 , J_2 적분과 K_I , K_{II} 사이의 완전한 관계를 좁은 직사각형 경로를 택하여 간편하게 유도하였다. 그리고 유한요소의 해로 J_2 적분을 효율적으로 계산하는 방법을 제시하였다. 이미 해가 존재하는 문제를 본 방법으로 다루어 그 결과를 비교하였고 일방향(unidirectional) 적층판 cantilever 평판 내의 single edge crack에 대한 해를 제시하였다.

2. 이방성 파괴역학

선형이방 탄성론에서의 평면문제를 고려하자. 일반적인 Hook의 법칙은

$$\varepsilon_i = \sum_j a_{ij} \sigma_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, 6 \quad (1)$$

여기서 ε_i 는 스트레인의 성분이고, σ_j 는 응력의 성분, a_{ij} 는 compliance의 성분으로 $a_{ij} = a_{ji}$.

응력과 변위의 성분은 다음과 같이 두 개의 응력함수(stress function) ϕ_1 과 ϕ_2 로 나타낼 수 있다⁽¹⁵⁾.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2\text{Re}[\mu_1^2 \phi_1''(z_1) + \mu_2^2 \phi_2''(z_2)] \\ \sigma_y &= 2\text{Re}[\phi_1''(z_1) + \phi_2''(z_2)] \\ \tau_{xy} &= -2\text{Re}[\mu_1 \phi_1''(z_1) + \mu_2 \phi_2''(z_2)] \end{aligned} \quad (2)$$

그리고

$$\begin{aligned} u &= 2\text{Re}[p_1 \phi_1'(z_1) + p_2 \phi_2'(z_2)] \\ v &= 2\text{Re}[q_1 \phi_1'(z_1) + q_2 \phi_2'(z_2)] \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned} p_i &= a_{11} \mu_i^2 + a_{12} - a_{16} \mu_i \\ q_i &= a_{12} \mu_i + a_{22} / \mu_i - a_{26} \\ (z_i &= x + \mu_i y) \end{aligned}$$

μ_1 , $\bar{\mu}_1$, μ_2 , $\bar{\mu}_2$ 는 다음 방정식의 근이다.

$$\begin{aligned} a_{11} \mu^4 - 2a_{16} \mu^3 + (2a_{12} + a_{66}) \mu^2 \\ - 2a_{26} \mu + a_{22} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

균열선단 부근의 응력과 스트레인의 분포를 고려하자. 경계치문제의 해로부터 ϕ_1 과 ϕ_2 를 다음과 같이 쉽게 정할 수 있다⁽¹⁶⁾.

$$\phi_1''(z) = \frac{-\mu_2 K_I - K_{II}}{2\sqrt{2\pi z}(\mu_1 - \mu_2)} \quad (4)$$

$$\phi_2''(z) = \frac{\mu_1 K_I + K_{II}}{2\sqrt{2\pi z}(\mu_1 - \mu_2)}$$

J_k 적분은 다음과 같이 정의 되었다⁽⁹⁾.

$$J_k = \oint_C (W n_k - T_i \partial u_i / \partial x_k) ds \quad (5)$$

여기서 W 는 스트레인 에너지 밀도이고 T_i 는 트랙션 성분이다. 이 공식은 Fig. 1에 도시한 좁은 직사각형 경로 C_1 과 C_2 를 택하면 다음과 같이 특별히 간단한 형태가 된다⁽¹²⁾.

$$J_1 = - \lim_{\delta/R \rightarrow 0} \oint_{C_1} \left(\sigma_y \frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial u}{\partial x} \right) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}) ds \quad (6)$$

$$J_2 = - \lim_{\delta/R \rightarrow 0} \oint_{C_2} \left(\sigma_x \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial y} \right) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{i}) ds$$

식 (2)를 사용하여 J_k 적분의 표현은 다음과 같이 된다.

$$J_1 = - \lim_{\substack{\delta/R \rightarrow 0 \\ \delta/R \rightarrow 0}} \oint_{C_1} 4 \{ \text{Re}[\phi_1''(z_1) + \phi_2''(z_2)] \cdot$$

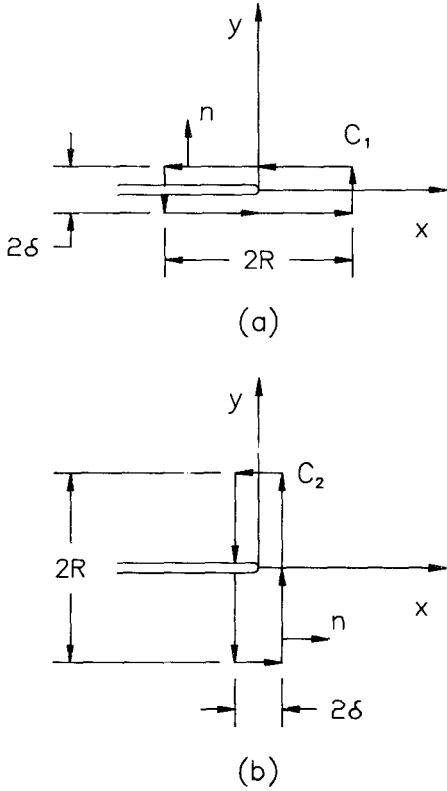


Fig. 1 Narrow rectangular contours C_1 and C_2

$$\begin{aligned} & Re[q_1\phi_1''(z_1) + q_2\phi_2''(z_2)] \\ & - Re[\mu_1\phi_1''(z_1) + \mu_2\phi_2''(z_2)] \cdot \\ & Re[\rho_1\phi_1''(z_1) + \rho_2\phi_2''(z_2)] \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}) ds \end{aligned} \quad (7a)$$

$$\begin{aligned} J_2 = & - \lim_{\substack{R \rightarrow 0 \\ \delta/R \rightarrow 0}} \oint_{C_2} 4 \{ Re[\mu_1^2\phi_1''(z_1) + \mu_2^2\phi_2''(z_2)] \cdot \\ & Re[\mu_1\rho_1\phi_1''(z_1) + \mu_2\rho_2\phi_2''(z_2)] \\ & - Re[\mu_1\phi_1''(z_1) + \mu_2\phi_2''(z_2)] \cdot \\ & Re[\mu_1q_1\phi_1''(z_1) + \mu_2q_2\phi_2''(z_2)] \} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{i}) ds \end{aligned} \quad (7b)$$

경로 C_1 을 따라 $R \rightarrow 0$, $\delta/R \rightarrow 0$ 일 때

$$z_1 = z, z_2 = z \text{ and } (\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}) ds = -dz \quad (8)$$

식 (4)와 식 (8)을 식 (7a)에 대입하면 다음과 같은 표현이 된다.

$$\begin{aligned} J_1 = & - \oint_C \left(Re \left[\frac{K_I}{\sqrt{2\pi z}} \right] \cdot \right. \\ & Re \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi z}} \left\{ \left(a_{22} \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 \mu_2} - a_{26} \right) K_I \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(-a_{12} + \frac{a_{22}}{\mu_1 \mu_2} \right) K_{II} \right\} \right] + Re \left[\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi z}} \right] \cdot \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & Re \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi z}} \left\{ \left(-a_{11} \mu_1 \mu_2 + a_{12} \right) K_I \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(-(\mu_1 + \mu_2) a_{11} + a_{16} \right) K_{II} \right\} \right] (-dz) \end{aligned} \quad (9)$$

부록에 소개된 적분공식을 이용하면 최종적으로 다음과 같이 된다.

$$J_1 = a_{11} K_I^2 + a_{12} K_I K_{II} + a_{22} K_{II}^2 \quad (10)$$

여기서

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\frac{a_{22}}{2} Im \left[\frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 \mu_2} \right] \\ a_{12} &= -\frac{a_{22}}{2} Im \left[\frac{1}{\mu_1 \mu_2} \right] + \frac{a_{11}}{2} Im[\mu_1 \mu_2] \\ a_{22} &= \frac{a_{11}}{2} Im[\mu_1 + \mu_2] \end{aligned}$$

식 (10)은 Wang 등⁽⁷⁾이 제시한 것과 완전히 일치한다. 이리하여 본 접근방법의 타당성이 입증되었다. 비슷한 방법으로 경로 C_2 를 따라 $R \rightarrow 0$, $\delta/R \rightarrow 0$ 일 때

$$\begin{aligned} z_1 &= -i\mu_1 z, z_2 = -i\mu_2 z \text{ and} \\ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{i}) ds &= -i dz \end{aligned} \quad (11)$$

식 (4)와 식 (8)을 식 (7b)에 대입하면 다음과 같이 표현이 된다.

$$\begin{aligned} J_2 = & - \oint_C \left\{ Re \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi(-iz)}} (\omega_{11} K_I + \omega_{12} K_{II}) \right] \cdot \right. \\ & Re \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi(-iz)}} (\omega_{21} K_I + \omega_{22} K_{II}) \right] \\ & + Re \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi(-iz)}} (\omega_{31} K_I + \omega_{32} K_{II}) \right] \cdot \\ & \left. Re \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi(-iz)}} (\omega_{41} K_I + \omega_{42} K_{II}) \right] \right\} \cdot \\ & (-i dz) \end{aligned} \quad (12)$$

여기서

$$\begin{aligned} \omega_{11} &= \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \left(-\frac{\mu_1}{\sqrt{\mu_1}} + \frac{\mu_2}{\sqrt{\mu_2}} \right) \\ \omega_{12} &= \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left(-\frac{\mu_1^2}{\sqrt{\mu_1}} + \frac{\mu_2^2}{\sqrt{\mu_2}} \right) \\ \omega_{21} &= \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \left(-\frac{\rho_1}{\sqrt{\mu_1}} + \frac{\rho_2}{\sqrt{\mu_2}} \right) \\ \omega_{22} &= \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left(-\frac{\rho_1 \mu_1}{\sqrt{\mu_1}} + \frac{\rho_2 \mu_2}{\sqrt{\mu_2}} \right) \\ \omega_{31} &= \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \left(\frac{1}{\sqrt{\mu_1}} - \frac{1}{\sqrt{\mu_2}} \right) \\ \omega_{32} &= \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left(\frac{\mu_1}{\sqrt{\mu_1}} - \frac{\mu_2}{\sqrt{\mu_2}} \right) \\ \omega_{41} &= \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \left(-\frac{q_1}{\sqrt{\mu_1}} + \frac{q_2}{\sqrt{\mu_2}} \right) \\ \omega_{42} &= \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left(-\frac{q_1 \mu_1}{\sqrt{\mu_1}} + \frac{q_2 \mu_2}{\sqrt{\mu_2}} \right) \end{aligned}$$

부록에 제시된 적분공식을 이용하여 다음과 같은 형태로 된다.

$$J_2 = \beta_{11}K_I^2 + \beta_{12}K_I K_{II} + \beta_{22}K_{II}^2 \quad (13)$$

여기서

$$\beta_{11} = \frac{1}{2} \text{Im}(\omega_{11}\omega_{21} + \omega_{31}\omega_{41})$$

$$\beta_{12} = \frac{1}{2} \text{Im}(\omega_{11}\omega_{22} + \omega_{12}\omega_{21} + \omega_{31}\omega_{42} + \omega_{32}\omega_{41})$$

$$\beta_{22} = \frac{1}{2} \text{Im}(\omega_{12}\omega_{22} + \omega_{32}\omega_{42})$$

이리하여 J_2 에 대한 공식도 J_1 에 대한 공식과 한 형태로 얻어졌다. 식 (13)은 식 (10)과 더불어 J_1 , J_2 적분과 K_I , K_{II} 사이의 완전한 관계를 이룬다. α_{ij} 와 β_{ij} 를 계산하는 것은 주어진 재료에 대하여 한 번만 계산하면 된다.

Hurlbut와 Loo⁽¹⁷⁾가 사용한 J_1 , J_2 적분과 K_I , K_{II} 사이의 관계식을 본 논문에서 유도한 것과 비교하여 보았다. 그들이 사용한 관계식은 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$J_1 = a_{11}K_I^2 + a_{22}K_{II}^2 \quad (14)$$

$$J_2 = -2\sqrt{a_{11}a_{22}}K_I K_{II}$$

식 (14)를 식 (10)과 (13)과 비교하면 식 (14)에서 3개의 항, 즉 $a_{12}K_I K_{II}$, $\beta_{11}K_I^2$ 과 $\beta_{22}K_{II}^2$ 이 빠져 있는 것을 발견하였다. 식 (10)과 식 (13)에 따르면 이것들이 0일 때는 재료의 주축이 균열축과 평행일 때 뿐이었다. 그리고 β_{12} 와 $-2\sqrt{a_{11}a_{22}}$ 은 재료의 주축이 균열축과 평행할 때에도 일반적으로 서로 크기가 다른 것으로 나타났다. 결국 Hurlbut와 Loo가⁽¹⁷⁾ 사용한 관계식은 이방성 재료에 대하여 일반적으로 성립하지 않는 것으로 보인다.

3. 수치적 방법

Chen 등이⁽¹³⁾ 지적하였듯이 J_2 적분의 경로는 시점과 종점이 균열선단과 일치하여야 한다. 유한요소의 해로 직접 균열면에 놓인 적분구간에서 J_2 적분의 기여량을 계산하는 것은 유한요소의 내재적인 오차의 영향을 받는다. 본 논문에서는 적분경로 중 균열면상에 위치한 구간이 무시하여도 좋을 만큼 작아지도록 균열선단 부근에서 적분경로를 택하였다. 따라서, 균열면에 놓인 적분구간에서 J_2 적분의 기여량을 무시하여도 좋을 만큼 작다고 보고 이 기여량을 계산하는 것을 생략하였다. 이리하여, J_2 적분 계산상의 난점을 해소하고 J_2 적분은

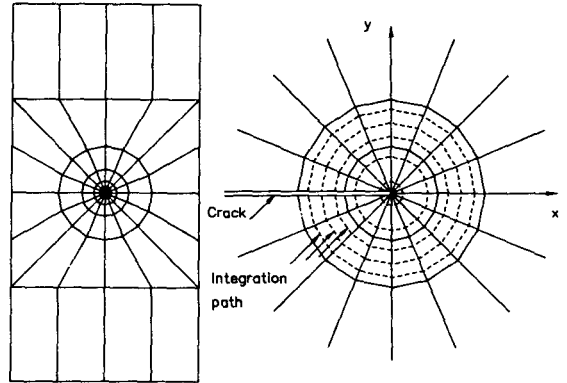


Fig. 2 Typical finite element mesh and examples of integration paths

J_1 적분계산 중에 적은 노력으로 손쉽게 계산하였다.

Fig. 2는 본 논문의 목적에 적합한 유한요소망과 적분경로의 예를 도시한 것이다. 8절점 등매개변수 요소(isoparametric element)를 사용하였고 균열선단 요소에는 균열선단과 인접한 변의 중앙절점을 1/4점에 옮기어 특이성을 살렸다. 균열선단 부근에는 16개의 요소로 고리를 이루어 둘러싸게 하였다. 특히 이방성 재료에 대하여는 한 고리 안에 충분한 수효의 요소를 사용하는 것이 안정적이고 정확한 해를 얻는 데 중요하였다. 본 문제에 적합한 적분 차수는 3×3 이었다. 따라서 한 고리 내에서 최대 3개의 적분경로를 택할 수 있다.

식 (10)과 식 (13)에서 J_1 , J_2 는 유한요소의 해로부터 계산하고 6개의 계수 α_{ij} , β_{ij} 를 특성방정식의 근과 재료의 컴플라이언스 계수로부터 계산한다. 그러면 미지수는 2개의 응력강도계수 뿐이다. 2차 연립방정식은 Newton의 방법으로 풀었다.

이상에 기술한 수치적 과정은 Owen과 Fawkes가⁽¹⁸⁾ 개발한 유한요소 전산 프로그램에 추가되었다.

4. 수치적 결과

본 방법의 정확성, 안정성과 범용성을 보이기 위하여 여러 가지 균열문제를 다루었다.

4.1 모우드 I 균열문제

Fig. 3에 도시한 여러 가지 균열문제를 다루었다. 재료의 주축이 균열축에 관하여 평행한 것이

Table 1 Material properties of composite laminates

Material	E_{11} (GPa)	E_{22} (GPa)	G_{12} (GPa)	ν_{12}
Glass Epoxy	48.3	17.2	6.90	0.29
Graphite Epoxy ⁽⁸⁾	144.8	11.7	9.66	0.21
Graphite Epoxy ^{(20)*}	141.4	9.45	5.19	0.31

*T300/5208 graphite epoxy.

요구된다. 따라서, 대칭 angle ply 적층판만을 다루었다. 첫번째 문제로서 균일인장하의 glass epoxy 직사각형 평판 내의 center crack을 다루었다. 재료의 기계적인 성질은 Table 1에 열거하였다. 섬유방향은 Fig. 4에 도시한 것처럼 균열축으로부터 섬유축까지 반시계방향으로 회전한 각도로

정의하였다. $0^\circ, \pm 10^\circ, \pm 20^\circ, \dots, 90^\circ$ 대칭 angle ply 적층판을 편의상 택하였다. 시편의 1/4만을 44개의 요소가 소요된 유한요소망으로 해석하였다. Fig. 5에서 보는 것처럼 J 값의 변동은 적분경로가 균열선단에 접근하면서 현저히 감소하였다. 또 J 값은 균열선단 부근에서의 J 값을 가리키는 점선 주위에 고르게 분포하였다. 이것으로 J 적분의 경로독립성이 균열선단 부근에서도 수치적으로 잘 유지되는 것을 확인하였다. Bowie와 Freeze 등의⁽¹⁹⁾ 결과와 비교하기 위하여 응력강도계수를 Fig. 6(a)에 탄성계수의 비에 대하여 도시하였다. 본 결과는 Kim의⁽⁸⁾ 결과보다 Bowie와 Freeze의⁽¹⁹⁾ 해석적인 해와 더 잘 일치하였다.

두번째 문제로는 균일인장응력하의 graphite epoxy 직사각형 평판 내의 double edge crack을 다루었다. Fig. 6(b)에 결과를 도시하였다. Kim의⁽⁸⁾

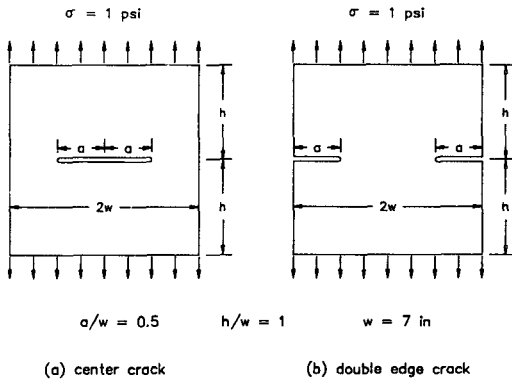


Fig. 3 Geometry and loading for mode I problem

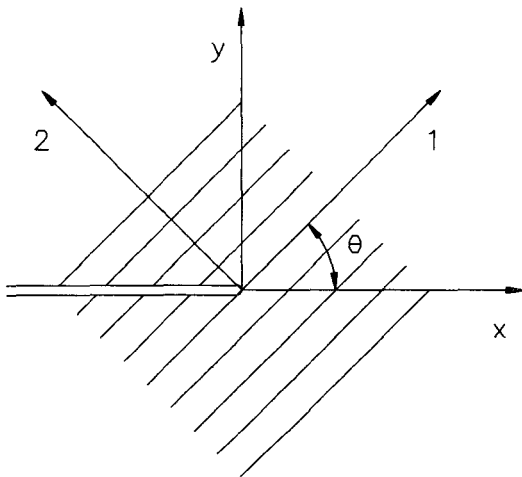


Fig. 4 Positive rotation of principal material axes from x, y axes

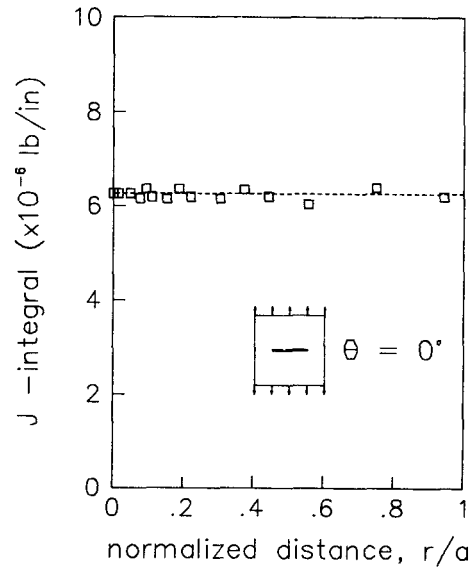
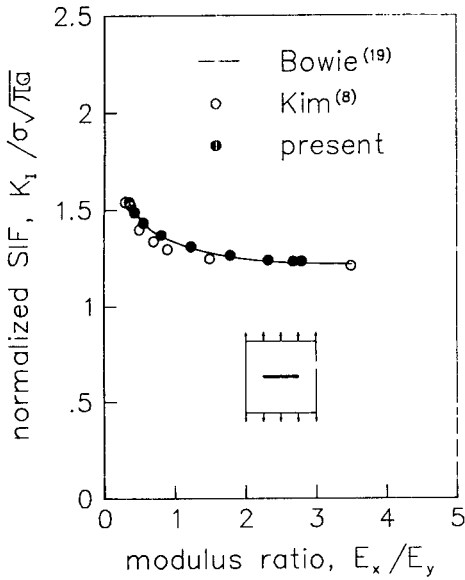
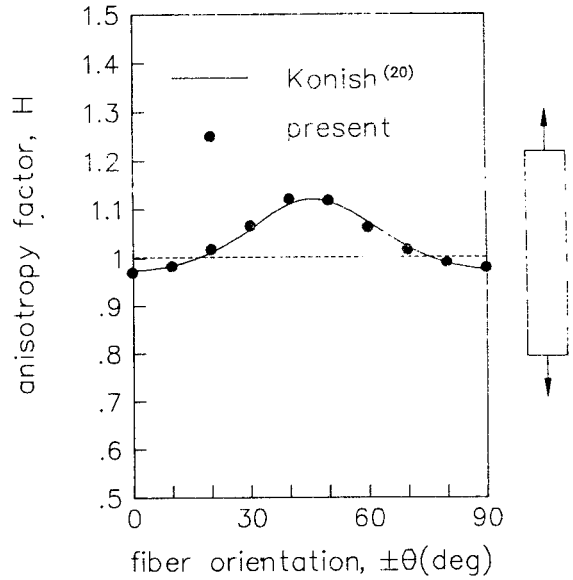


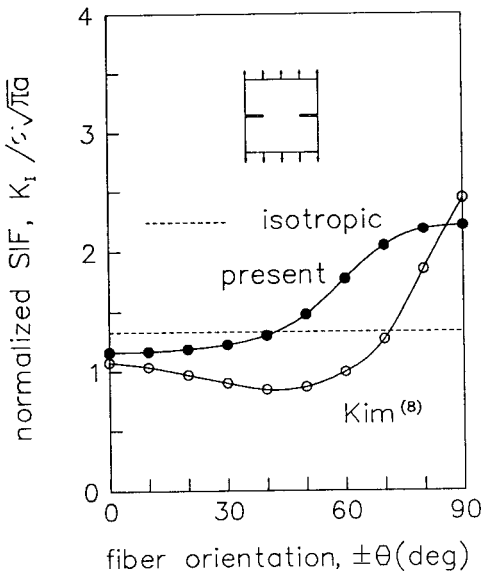
Fig. 5 Variation of J -integral with radial distance of contour from crack tip



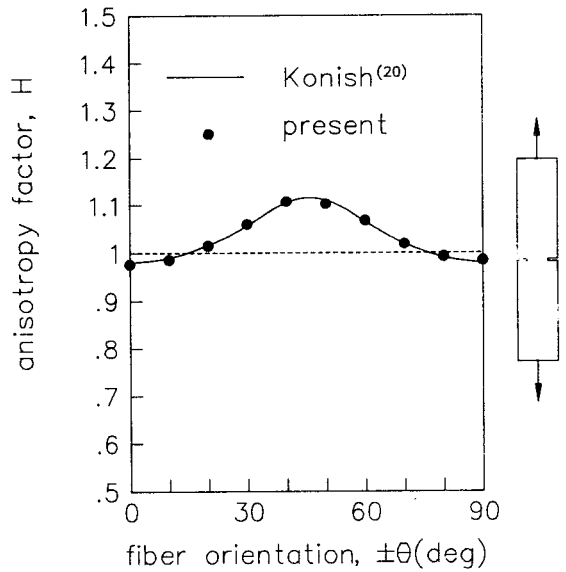
(a) Effect of modulus ratio on SIF



(c) Effect of fiber orientation of SIF



(b) Effect of fiber orientation of SIF



(d) Effect of fiber orientation on SIF

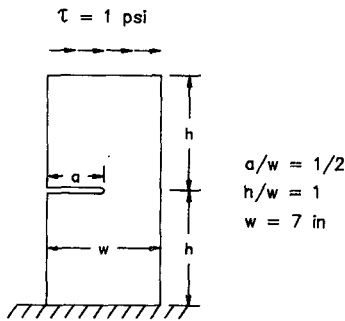
Fig. 6

결과와 비교하여 보니 서로 차이가 심하였다. 본 결과를 기준으로 $\theta=0^\circ$ 일 때 6.9%, $\theta=90^\circ$ 일 때 11%에 달하였다. θ 가 0° 나 90° 에서 멀어질수록 이 차이는 증가하다가 $\theta=60^\circ$ 부근에서 최대에 달하였다. 이 원인은 Kim이⁽⁸⁾ compliance coefficients를 잘못 계산한 것으로 추측된다. 적층판에 대한 compliance coefficients는 적층판을 구성하는 각 단층판에 대한 탄성계수의 평균인, 적층판에 대한

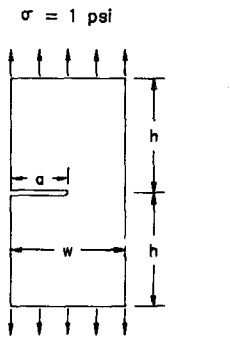
상당 탄성계수를 역변환하여 결정하여야 하며 단층판에 대한 compliance coefficients의 평균으로 결정하는 것은 잘못이다.

Konish 등의⁽²⁰⁾ 경계요소의 해와 비교하기 위하여 그가 다루었던 것과 같은 문제를 다루었다. 세 번째와 네 번째의 문제는 균일변위조건하의 T300/5208 graphite epoxy 직사각형 평판 내의 center crack과 double edge crack이다. 시편의 높이는

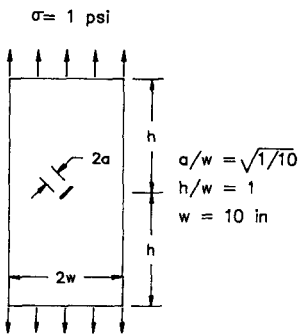
폭의 5배이다. 이방성 계수 (anisotropy factor) 는 이방성 응력강도계수와 이에 대응하는 등방성 응력 강도계수와와의 비로 정의되었다. Fig. 6(c)와 6(d)에 도시하고 Table 2에 열거한 것처럼 본 결과는 Konish의⁽²⁰⁾ 결과와 0.6%와 0.9% 내로 잘 일치하였다. 이상의 결과로부터 J 적분은 균열선단 부근에서 택한 적분경로를 따라서도 정확하게 계산할 수 있는 것을 확인하였다.



(a) single edge crack



(b) single edge crack



(c) central slant crack

Fig. 7 Geometry and loading for mixed mode problems

4.2 혼합 모드 균열문제

Fig. 7에 도시한 여러 가지 혼합모우드 균열문제를 다루었다. 첫번째 문제로는 굽힘전단 하중하의 angle ply로 적층한 graphite epoxy 평판 내의 single edge crack을 다루었다. 유한요소망에는 모두 88개의 요소가 소요되었다. Fig. 8에서 보는 것처럼 J_1 값의 변동을 살펴보면 앞에 기술한 모우드 I 경우와 비슷한 경향을 보였다. J_2 값의 변동경향은 J_1 의 경우와 외형적으로는 약간 다르다. 이것은 우리가 의도적으로 균열면에서 J_2 적분의 계산을 생략하였기 때문이다. 그렇지만, J_2 값은 균열선단에서 수렴하였다. 결과를 Fig. 9(a)에 도시하고 Table 3에 열거하였다.

두번째 문제로는 굽힘전단하중을 받는, 일방향 (unidirectional) graphite epoxy 평판 내의 single edge crack을 다루었다. 결과는 Fig. 9(b)에 도시하였다. K_{II} 의 변화는 K_I 의 변화보다 더 심하였다.

세번째 문제로는 균일인장응력하의, 일방향 graphite epoxy 직사각형 평판 내의 single edge crack을 다루었다. 본 문제는 $\theta=0^\circ$ 나 $\theta=90^\circ$ 일 때를 제외하고는 재료의 주축이 균열축과 평행하거나 수직하지 않기 때문에 혼합모우드 문제로 되었다. 결과는 Fig. 9(c)에 도시하였다. K_{II} 의 변화는 역시 K_I 의 변화보다 더 심하였다.

네번째 문제로는 균일인장응력하의 직사각형 평

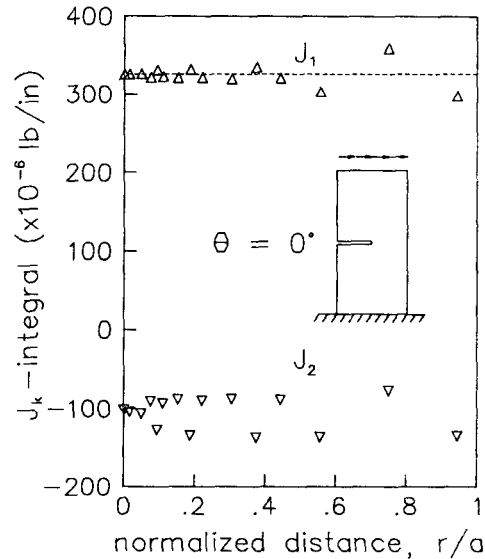


Fig. 8 Variation of J_1 and J_2 -integral with radial distance of contour from crack tip

Table 2 Anisotropy factors for a center crack and for a double edge crack in an angle ply laminated T300/5208 graphite epoxy rectangular plate under a uniform displacement condition when $a/w = 0.5$ and $h/w = 5$

θ	Double edge crack			Center crack		
	Present	Konish ⁽²⁰⁾	Error*	Present	Konish ⁽²⁰⁾	Error*
0°	0.977	0.981	-0.41%	0.970	0.974	-0.41%
±10°	0.986	0.990	-0.40%	0.983	0.984	-0.10%
±20°	1.015	1.016	-0.10%	1.018	1.012	0.59%
±30°	1.061	1.058	0.28%	1.066	1.058	0.76%
±40°	1.108	—	—	1.121	—	—
±50°	1.103	—	—	1.118	—	—
±60°	1.069	1.066	0.28%	1.063	1.073	-0.93%
±70°	1.019	1.019	0.00%	1.017	1.023	-0.59%
±80°	0.993	0.991	0.20%	0.991	0.990	0.10%
90°	0.985	0.979	0.61%	0.980	0.975	0.51%

*with respect to the results of Konish.

Table 3 Normalized stress intensity factors for a single edge crack in a graphite epoxy cantilever plate when $a/w = 0.5$ and $h/w = 1$

Angle ply laminate			Unidirectional laminate					
θ	K_I/K_0^*	K_{II}/K_0^*	θ	K_I/K_0^*	K_{II}/K_0^*	θ	K_I/K_0^*	K_{II}/K_0^*
0°	8.695	1.358						
±10°	8.787	1.364	-10°	8.992	-0.501	10°	8.857	3.171
±20°	9.014	1.395	-20°	9.621	-1.926	20°	9.343	4.646
±30°	9.278	1.432	-30°	10.237	-2.336	30°	9.763	4.966
±40°	9.475	1.438	-40°	10.871	-2.444	40°	10.008	4.778
±50°	9.451	1.432	-50°	11.145	-1.899	50°	9.862	4.101
±60°	9.305	1.383	-60°	11.269	-1.234	60°	9.639	3.410
±70°	9.114	1.260	-70°	10.871	-0.547	70°	9.218	2.707
±80°	8.943	1.109	-80°	9.721	0.341	80°	8.669	1.775
90°	8.866	1.037						
			Isotropic	8.952	1.371			

* $K_0 = \tau_0 \sqrt{\pi a}$

Table 4 Normalized mixed mode stress intensity factors for a central slant crack inclined at 45° to the loading direction in a rectangular plate subjected to a uniform tension when $a/w = \sqrt{0.1}$ and $h/w = 1$

	K_I/K_0^*	K_{II}/K_0^*	J_I^{**} ($\times 10^{-6}$ lb/in)
Atluri ⁽²¹⁾	1.0195	1.0795	0.2308
Wang ⁽⁷⁾	1.023	1.049	0.2246
Yum ⁽²²⁾	1.068	1.062	0.2373
Present	1.084	1.036	0.2354

* $K_0 = \sigma_0 \sqrt{\pi a}$, ** J_I is calculated inversely from K_I and K_{II}

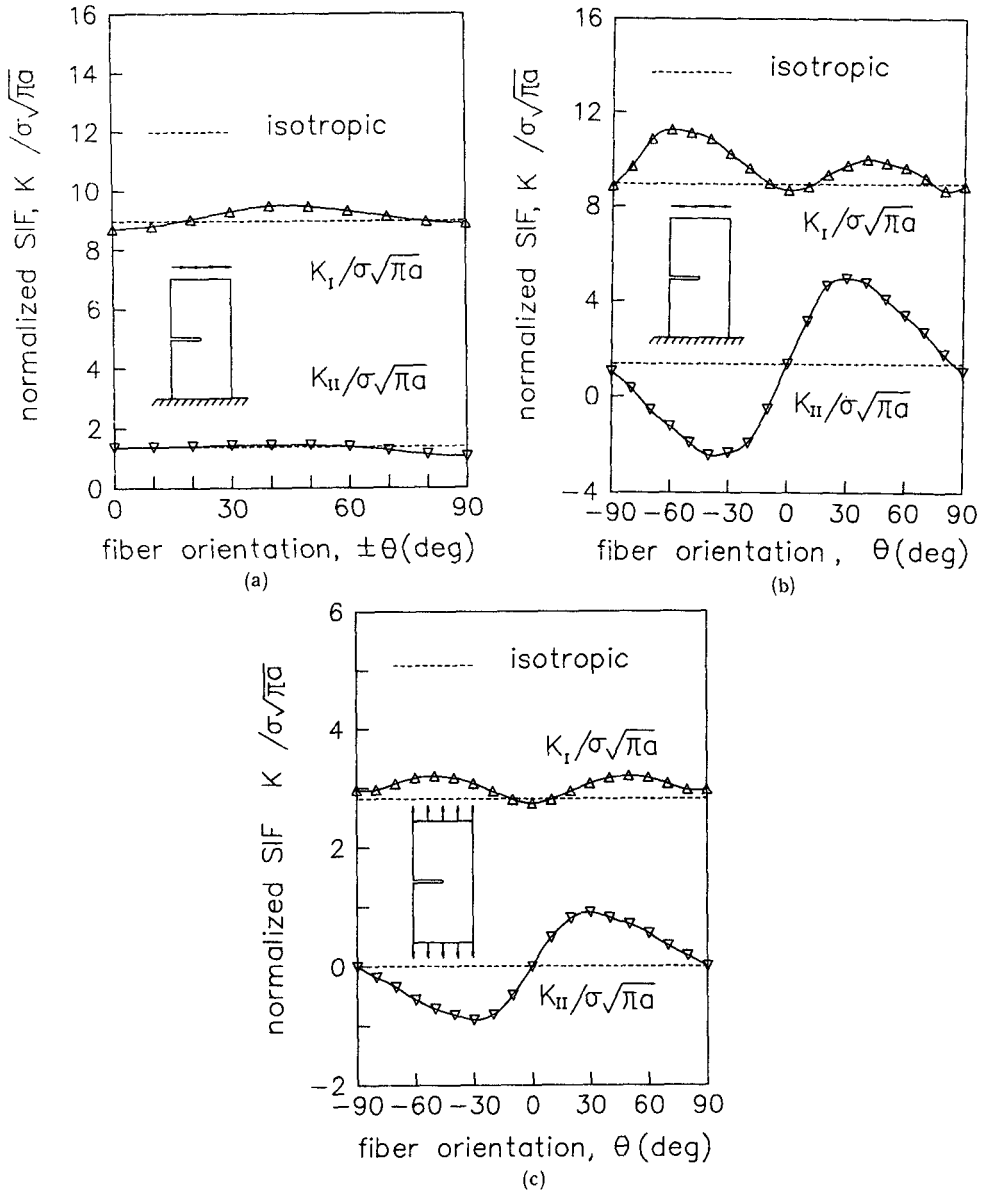


Fig. 9 (a) Effect of fiber orientation of SIF for symmetric angle ply laminates
 (b) Effect of fiber orientation on SIF for unidirectional laminates
 (c) Effect of fiber orientation on SIF for unidirectional laminates

판 내의 하중방향과 45°를 이룬 중앙경사균열을 다루었다. Atluri가⁽²¹⁾ 사용했던 것과 같은 재료상수를 사용하였다.

$$E_{yy} = 82.8 \text{ GPa} (12 \times 10^6 \text{ psi})$$

$$E_{xx} = 24.1 \text{ GPa} (3.5 \times 10^6 \text{ psi})$$

$$G_{yx} = 20.7 \text{ GPa} (3.0 \times 10^6 \text{ psi})$$

$$\nu_{yx} = 0.7$$

결과는 기존해와 더불어 Table 4에 열거하였다. collocation해에⁽²²⁾ 관하여 K_I 에서 1.5%, K_{II} 에서 2.4%의 오차 내로 해를 얻었다. 정확한 식 (10)을

이용하여 다른 사람이 이미 발표한 해로부터 역으로 J_1 을 계산하여 상당히 정확하리라 믿어지는 본 논문에서 계산한 J_1 과 비교하여 보았다. Table 4에서 보는 것처럼 collocation 결과로 계산한 것은 오차가 0.8%에 불과하였지만 Atluri나⁽²²⁾ Wang의⁽⁷⁾의 결과로 계산한 것은 1.9%와 4.5%의 오차를 보였다.

5. 결 론

이방성 재료에 대하여 유한요소의 해로부터 혼합 모우드 응력강도계수를 결정하는 J_k 적분 방법을 개발하였다. 응력함수를 사용하여 J_1 , J_2 적분과 K_I , K_{II} 사이의 완전한 관계를 유도하였다. 이것을 유도할 때 J_k 적분 공식을 간단히 하기 위하여 균열선단을 향하여 수축하는 좁은 직사각형 경로를 택하였다. 한편 유한요소의 해로 계산한 J_1 적분의 경로독립성은 균열선단에 근접한 곳에서도 수치적으로 잘 유지되었다. J_2 적분을 효율적으로 계산하는 방법을 제시하였다. J_2 적분을 유한요소의 해로부터 계산할 때 계산하기가 곤란한, 균열면 상에 놓인 적분경로에서의 J_2 적분에서의 기여량을 생략하는 것이 가능하도록 균열선단에 아주 가까운 적분 경로를 택하였다. 기존경로독립적분 방법에 반하여 본 논문에서 개발한 방법은 보조탄성해에 의존하지 않는다. 따라서, 수치적인 과정이 기존방법에 비하여 훨씬 간단하다. 그러면서도 결과가 아주 뛰어나다.

후 기

본 연구는 1988년도 문교부 학술연구조성비의 지원으로 이루어진 것으로 이에 감사사를 포함합니다.

참 고 문 헌

- (1) Hellen, T.K., 1975, "On the Method of Virtual Crack Extensions", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 9, pp. 187~207.
- (2) Rice, J.R., 1968, "A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks", *Journal of Applied Mechanics Transactions of ASME*, pp. 379~386.
- (3) Hoenig, A., 1982, "Near Tip Behavior of a Crack in a Plane Anisotropic Elastic Body", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 16, pp. 393~403.
- (4) Sweeney, J., 1986, "Finite width Correction Factors for SEN Testing of Orthotropic Materials in Opening Mode", *Journal of Strain Analysis*, Vol. 21, No. 2, pp. 99~107.
- (5) Stern, M., Becker, E.B. and Dunham, R.S., "A Contour Integral Computation of Mixed Mode Stress Intensity Factors", *International Journal of Fracture*, Vol. 12, pp. 359~368.
- (6) Yau, J.F., Wang, S.S. and Corten, H.T. 1980, "A Mixed Mode Crack Analysis of Isotropic Solids Using Conservation Laws of Elasticity", *Journal of Applied Mechanics Transactions of ASME*, Vol. 47, pp. 335~341.
- (7) Wang, S.S., Yau, J.F. and Corten, H.T., 1980, "A Mixed Mode Crack Analysis of Anisotropic Solids Using Conservation Laws of Elasticity", *International Journal of Fracture*, Vol. 16, No. 3, pp. 247~259.
- (8) Kim, J.W., 1985, "A Contour Integral Computation of Stress Intensity Factors in the Cracked Orthotropic Elastic Plates", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 21, No. 2, pp. 353~364.
- (9) Knowles, J.K. and Sternberg, E., 1972, "On a Class of Conservation Laws of Linearized and Finite Elastostatics", *Archives for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 44, No. 3, pp. 187~211.
- (10) Budiansky, B. and Rice, J.R., 1973, "Conservation Laws and Energy Release Rates", *Journal of Applied Mechanics Transactions of ASME*, pp. 201~203.
- (11) Hellen, T.K. and Blackburn, W.S., "The Calculation of Stress Intensity Factors for Combined Tensile and Shear Loading", *International Journal of Fracture*, Vol. 11, No. 4, pp. 605~617.
- (12) Cherepanov, G.P., 1979, *Mechanics of Brittle Fracture*, McGraw Hill.
- (13) Chen, W.H. and Lin, T.C., 1983, "A Mixed Mode Crack Analysis of Rotating Disk Using Finite Element Method", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 18, No. 1, pp. 133~143.
- (14) Nishioka, T. and Atluri, S.N., 1984, "On the Computation of Mixed Mode K-factors for a Dynamically Propagating Crack Using Path-independent Integrals J_k ", *Engineering Fracture Mechanics* 20(2), pp. 193~208.
- (15) Paris, P.C. and Sih, G.C., 1965, "Stress Analysis of Cracks", *Fracture Toughness Testing and its Application*, ASTM STP 381, pp. 30~81.
- (16) Sih, G.C. and Liebowitz, H., 1968, "Mathematical

Theory of Brittle Fracture”, Fracture 2, ed. Liebowitz, pp. 67~190, Academic Press.

- (17) Hurlbut, A. and Loo, F.T.C., 1986, “Calculation of Mixed Mode Fracture Stress Intensity Factors in an Orthotropic Plate Using Finite Element Technique”, Journal of Vibration Transactions of ASME, Vol. 108, pp. 282~287.
- (18) Owen, D.R.J. and Fawkes, A.J., 1983, Engineering Fracture Mechanics, Pineridge Press Ltd..
- (19) Bowie, O.L. and Freeze, C.E., 1972, “Central Crack in Plane Orthotropic Rectangular Sheet”, International Journal of Fracture Mechanics, Vol. 8, pp. 49~58.
- (20) Konish, Jr., H.J., 1975, “Mode I Stress Intensity Factors for Symmetrically-Cracked Orthotropic Strips”, Fracture Mechanics of Composites, ASTM STP 593, pp. 99~116.
- (21) Atluri, S.N., Kobayashi, A.S. and Nakagaki, M., 1975, “Finite Element Program for Fracture Mechanics Analysis of Composite Materials”, Fracture Mechanics of Composites, ASTM STP 593, pp. 86~98.
- (22) Yum, Y.J., Private Communications.

부 록

ω_1 과 ω_2 이 어떤 복소상수이고 C 가 원점을 둘러싼 단순히 연결된 폐곡선일 때

$$\oint_C \operatorname{Re}\left[\frac{\omega_1}{\sqrt{2\pi z}}\right] \cdot \operatorname{Re}\left[\frac{\omega_2}{\sqrt{2\pi z}}\right] dz = -\frac{1}{2} \operatorname{Im}[\omega_1 \omega_2]$$

증명

$$\begin{aligned} & \oint_C \operatorname{Re}\left[\frac{\omega_1}{\sqrt{2\pi z}}\right] \cdot \operatorname{Re}\left[\frac{\omega_2}{\sqrt{2\pi z}}\right] dz \\ &= \oint_C \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{\omega_1}{\sqrt{2\pi z}} + \frac{\bar{\omega}_1}{\sqrt{2\pi \bar{z}}}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{\omega_2}{\sqrt{2\pi z}} + \frac{\bar{\omega}_2}{\sqrt{2\pi \bar{z}}}\right) dz \\ &= \oint_C \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{\omega_1 \omega_2}{2\pi z} + \frac{\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2}{2\pi \bar{z}} + \frac{\omega_1 \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_1 \omega_2}{2\pi \sqrt{z \bar{z}}}\right) dz \\ &= \frac{1}{4} (\omega_1 \omega_2 i - \bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2 i + 0) \\ &= -\frac{1}{2} \operatorname{Im}[\omega_1 \omega_2] \end{aligned}$$