

<論 文>

혼합모우드 변형하에 있는 복합재료 유한평판의 경사진 균열해석

염 영 진* · 흥 창 선**

(1989년 1월 18일 접수)

Analysis of an Inclined Crack in Finite Composite Plate under Mixed Mode Deformation

Young Jin Yum and Chang Sun Hong

Key Words : Modified Mapping Collocation Method(수정사상선점법), Stress Function(응력함수), Stress Intensity Finite Correction Factor(응력강도유한수정계수), Mixed Mode(혼합모우드), Anisotropy(이방성)

Abstract

Mixed mode fracture problem is analyzed for the finite orthotropic plate where an inclined crack parallel to the fiber direction is centrally placed. Modified mapping collocation method with both uniform stress and uniform displacement boundary conditions is utilized to calculate stress intensity correction factors for glass/epoxy and graphite/epoxy composites. Computed results are presented for selected combinations of crack length to width ratio L/W and plate aspect ratio H/W with various fiber orientations.

1. 서 론

유한평판 내부에 균열이 있을 때 평판의 유한성 즉 중횡비, 균열길이들과 균열각도, 재료물성치, 경계조건 등에 의해 응력강도계수(stress intensity factor)가 무한평판의 그것과 다르게 된다. 따라서 파괴 실험시 정확한 파괴인성치를 측정하려면 시험편의 기하학적 형상, 재료, 경계조건에 맞는 정확한 응력강도수정계수(stress intensity correction factor)를 알아야 한다.

최근 항공기를 비롯한 여러 분야에서 관심을 끌고 있는 복합재료로 만들어진 유한평판 중앙에 경사진 균열이 있을 때 이것은 혼합 모우드 파괴문제가 된다. 이러한 혼합모우드 파괴실험을 하여 응력

강도계수를 구할 때 시험편의 치수, 재료물성치, 경계조건들에 의한 응력강도수정계수를 고려하지 않거나 무한평판의 값, 또는 등방성체의 값들을 사용하는 경우가 있다. 이것은 균열길이가 평판 폭과 높이에 비해 아주 작을 때 타당하지만 그렇지 않은 경우 즉 평판의 유한성이 응력강도계수에 영향을 미치는 경우 타당하지 못하다. 따라서 시험조건에 맞는 정확한 응력강도수정계수를 구할 필요가 있다.

유한평판 중앙에 경사진 균열이 있는 혼합모우드 파괴 문제의 수치해석에 대한 문헌을 살펴보면 그 수가 많지 않고 결과 또한 다양하지 못하다.

등방성체에 대하여 Wilson⁽¹⁾은 균열각도가 45도인 문제를 경계선점법(boundary collocation method)으로 해석하였다. 그러나 매개평면으로 사상을 하지 않았기 때문에 미지수가 많아져서 계산시간이 오래 걸리게 된다. Cruse⁽²⁾는 경계적분법(boundary integral equation method)과 유한요소법(finite element method)으로 해석하였고 Karami⁽³⁾는 경

*정회원, 울산대학교 공과대학 기계공학과

**정회원, 한국과학기술원 기계공학과

계적분법, Blandford⁽⁴⁾는 경계요소법(boundary element method)으로 해석하였는데 세 문헌 모두 중횡비가 3이고 균열길이와 평판 폭의 비가 $1/\sqrt{2}$, 균열각도가 45도일 때의 결과만 나와있다.

복합재료에 대한 문헌으로 Gandhi⁽⁵⁾는 본 연구에서 사용한 것과 동일한 방법인 수정사상선점법으로 균열각도가 45도인 fiberglass 유한평판에 대하여 섬유각도, 중횡비, 균열길이 등을 변화시키며 응력강도수정계수를 구하였다. 그러나 균열각도를 45도로 고정시키고 섬유방향을 변화시킨 이 결과는 실제로 복합재료에서 균열이 섬유방향에 평행하게 발생하는 현실에는 적용할 수 없는 문제점이 있다. Atluri⁽⁶⁾는 균열선단 특이요소(crack tip singular element)를 사용한 유한요소법, Wang⁽⁷⁾은 탄성보존법칙(conservation laws of elasticity)을 사용하여 균열각도 45도, 높이 20in, 폭 10in, 균열길이 $2\sqrt{2}$ 인 복합재료 유한평판의 응력강도계수를 구하였다.

여러가지 수치해석 방법 중에서 수정사상선점법(modified mapping collocation method)은 Sih⁽⁸⁾ 등이 전개한 복소함수식을 이용하여 등각사상과 최소자승 개념을 통해 경계선점법을 사용하는 방법으로서 Bowie⁽⁹⁾가 등방성체에 대하여 처음 제안하고 후에 이방성체에 적용⁽¹⁰⁾한 이래 여러가지 균열문제^(5,11,12)에 적용되어 왔는데 응력함수를 적당한 급수 형태로 표시해야 하고 수렴성에 대한 시행착오 등 문제점이 있으나 모드 I, II 성분을 쉽게 분리할 수 있기 때문에 특히 혼합모드 균열문제에 유용한 방법이다.

본 논문에서는 이 방법을 사용하여 glass/epoxy와 graphite/epoxy 유한평판이 균일응력과 균일변위 경계조건을 받을 때 평판 중횡비 H/W 를 1, 2, 3, 균열길이와 폭의 비 L/W 를 0.1부터 0.7까지, 균열각도를 0, 30, 45, 60으로 변화시키면서 응력강도수정계수를 구하려고 한다.

2. 이론해석

Fig. 1에 보인 복합재료 유한평판의 균열문제를 해석하기 위해 Lekhnitskii의 복소함수식을 다음과 같은 과정을 거쳐 수정사상선점법을 적용할 수 있게 응력, 변위, 합력, 응력강도계수를 급수화 할 수 있다.

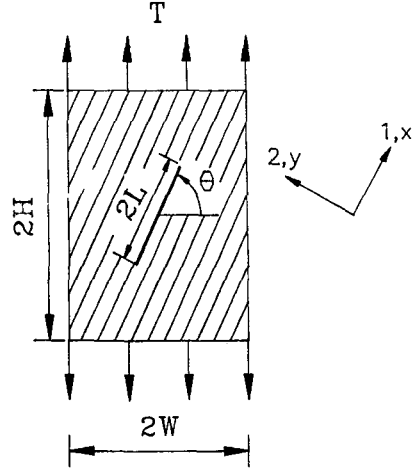


Fig. 1 Plate geometry

2.1 복소함수의 표시

본 연구에서 다루려고 하는 평면 이방체 문제는 다음과 같은 복소함수식⁽¹³⁾을 이용하여 해석할 수 있다.

평면 이방체 문제에서 Airy 응력함수는 다음과 같이 표현된다.

$$F(x, y) = 2\text{Re}[F_1(z_1) + F_2(z_2)] \quad (1)$$

여기에서

$$z_1 = x + s_1 y$$

$$z_2 = x + s_2 y \quad (2)$$

이며 복소상수 s_1, s_2 는 다음과 같은 특성방정식의 근이다.

$$a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22} = 0 \quad (3)$$

여기서 a_{ij} 는 재료상수로 표시되는 쾨플라이언스들이다.

본 연구에서 다루려고 하는 Fig. 1과 같은 평판의 경우 섬유방향과 균열방향이 같으므로 재료주축 1, 2와 균열방향과 수직방향축 x, y 가 일치하여 $a_{16} = a_{26} = 0$ 이 된다. 그러나 일반적으로 섬유방향이 균열방향과 평행하거나 수직하지 않는 경우 a_{16} 와 a_{26} 는 0이 되지 않는다.

식 (3)의 근이 서로 다르다면 다음과 같이 된다.

$$s_1 = \mu_1 = \alpha_1 + i\beta_1$$

$$s_2 = \mu_2 = \alpha_2 + i\beta_2 \quad (4)$$

$$\mu_3 = \overline{\mu_1}, \mu_4 = \overline{\mu_2}$$

여기서 α_i, β_i 는 실수이다.

일반적으로 $\beta_1, \beta_2 > 0, \beta_1 \neq \beta_2$ 라고 가정한다.

다음과 같이 새로운 응력함수 ϕ_1, ϕ_2 를 도입하면

$$\phi_1(z_1) = dF_1/dz_1, \quad \phi_2(z_2) = dF_2/dz_2 \quad (5)$$

이 되고 응력은 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2Re[s_1^2 \phi_1'(z_1) + s_2^2 \phi_2'(z_2)] \\ \sigma_y &= 2Re[\phi_1'(z_1) + \phi_2'(z_2)] \\ \tau_{xy} &= -2Re[s_1 \phi_1'(z_1) + s_2 \phi_2'(z_2)] \end{aligned} \quad (6)$$

여기서 '은 미분을 나타낸다.

변위는 다음과 같이 표시되고

$$\begin{aligned} u &= 2Re[p_1 \phi_1(z_1) + p_2 \phi_2(z_2)] \\ v &= 2Re[q_1 \phi_1(z_1) + q_2 \phi_2(z_2)] \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 사용되는 계수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} p_i &= a_{11}s_i^2 + a_{12} - a_{16}s_i \\ q_i &= a_{12}s_i + a_{22}/s_i - a_{26} \quad (i=1,2) \end{aligned}$$

임의의 경로에 대한 합력(resultant force)은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f_1(s) + if_2(s) &= i \int^s (X_n + iY_n) ds \\ &= (1 + is_1) \phi_1(z_1) + (1 + is_2) \phi_2(z_2) \\ &\quad + (1 + i\overline{s_1}) \overline{\phi_1(z_1)} + (1 + i\overline{s_2}) \overline{\phi_2(z_2)} \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 $X_n ds$ 와 $Y_n ds$ 는 수직 벡터가 n 인 호 ds 에 작용하는 수평력 및 수직력이다.

2.2 등각사상

복합재료 유한평판 중앙에 길이 $2L$ 의 균열이 있는 문제를 해석함에 있어서 다음과 같은 단순사상을 생각하자.

$$\omega(\zeta) = L\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)/2 \quad (9)$$

이것은 단위원 $\zeta = \sigma$ 와 그 외부로 $z = -L$ 부터 $z = L$ 까지의 실수축과 그 외부로 사상하는 함수이다.

한 점 z 는 다음과 같이 매개평면에 표시된다.

$$\zeta = z/L + [(z/L)^2 - 1]^{1/2} \quad (10)$$

본 문제는 다음과 같은 두 복소평면 z_1, z_2 와 관계가 있다.

$$z_1 = x + s_1 y = \omega(\zeta_1) = L/2(\zeta_1 + \zeta_1^{-1}) \quad (11)$$

$$z_2 = x + s_2 y = \omega(\zeta_2) = L/2(\zeta_2 + \zeta_2^{-1})$$

또는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\zeta_1 = z_1/L + [(z_1/L)^2 - 1]^{1/2} \quad (12)$$

$$\zeta_2 = z_2/L + [(z_2/L)^2 - 1]^{1/2}$$

편의상 매개평면에서의 응력함수를 다음과 같이 간단히 사용하기로 하자.

$$\phi_1(z_1) = \phi_1[\omega(\zeta_1)] = \phi_1(\zeta_1) \quad (13)$$

$$\phi_2(z_2) = \phi_2[\omega(\zeta_2)] = \phi_2(\zeta_2)$$

$$\phi_1'(z_1) = \phi_1'(\zeta_1)/\omega'(\zeta_1) \quad (14)$$

$$\phi_2'(z_2) = \phi_2'(\zeta_2)/\omega'(\zeta_2)$$

여기에서 사용한 미분식은 다음과 같다.

$$\omega'(\zeta_1) = L(1 - 1/\zeta_1^2)/2$$

$$\omega'(\zeta_2) = L(1 - 1/\zeta_2^2)/2$$

따라서 매개평면에서의 응력은 식 (6)에 식 (14)를 대입하면 다음과 같이 변형되어 표시된다.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2Re[s_1^2 \phi_1'(\zeta_1)/\omega'(\zeta_1) \\ &\quad + s_2^2 \phi_2'(\zeta_2)/\omega'(\zeta_2)] \\ \sigma_y &= 2Re[\phi_1'(\zeta_1)/\omega'(\zeta_1) + \phi_2'(\zeta_2)/\omega'(\zeta_2)] \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= -2Re[s_1 \phi_1'(\zeta_1)/\omega'(\zeta_1) \\ &\quad + s_2 \phi_2'(\zeta_2)/\omega'(\zeta_2)] \end{aligned}$$

변위도 식 (7)에 식 (13)을 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u &= 2Re[p_1 \phi_1(\zeta_1) + p_2 \phi_2(\zeta_2)] \\ v &= 2Re[q_1 \phi_1(\zeta_1) + q_2 \phi_2(\zeta_2)] \end{aligned} \quad (16)$$

합력에 대한 식은 식 (8)에 식 (13)을 대입하면 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} f_1(s) + if_2(s) &= (1 + is_1) \phi_1(\zeta_1) \\ &\quad + (1 + is_2) \phi_2(\zeta_2) + (1 + i\overline{s_1}) \overline{\phi_1(\zeta_1)} \\ &\quad + (1 + i\overline{s_2}) \overline{\phi_2(\zeta_2)} \end{aligned} \quad (17)$$

2.3 응력함수의 표시

Muskhelishvili⁽¹⁴⁾의 해석점축(analytic continuation) 원리에 의해 응력함수들이 다음과 같은 관계를 가지면 균열상에서의 무부하 조건(traction-free condition)은 만족된다.

$$\phi_2(\zeta_2) = B \overline{\phi_1(1/\zeta_2)} + C \phi_1(\zeta_2) \quad (18)$$

여기서 사용된 계수 및 정의는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \overline{\phi_1(1/\zeta_2)} &= \overline{\phi_1(1/\zeta_2)} \\ B &= (\overline{s_2 - s_1}) / (s_2 - \overline{s_2}) \\ C &= (\overline{s_2 - s_1}) / (s_2 - \overline{s_2}) \end{aligned} \quad (19)$$

본 문제에서는 응력의 대칭성을 고려하여 $\phi_1(\zeta)$ 를 다음과 같이 Laurent 급수전개를 하면 된다.

$$\phi_1(\zeta) = T \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \zeta^{2n+1} \quad (20)$$

응력은 식 (15)에 식 (18), (20)을 대입하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2Re[s_1^2 \phi_1'(\zeta_1)/\omega'(\zeta_1) \\ &\quad + s_2^2 \phi_2'(\zeta_2)/\omega'(\zeta_2)] \\ &= 2Re\left[s_1^2 \phi_1'(\zeta_1)/\omega'(\zeta_1) \right. \\ &\quad \left. + s_2^2 [B \overline{\phi_1'(1/\zeta_2)} + C \phi_1'(\zeta_2)]/\omega'(\zeta_2)\right] \end{aligned}$$

여기에서 사용된 식은 다음과 같다.

$$\overline{\phi_1'(1/\zeta_2)} = T \sum (a_n - ib_n) (-2n-1) / \zeta_2^{2n+2}$$

$$\phi_1'(\zeta_2) = T \sum (a_n + ib_n) (2n+1) \zeta_2^{2n}$$

따라서

$$\sigma_x = 4T/L \sum [a_n \operatorname{Re}(F_n) + b_n \operatorname{Re}(G_n)] \quad (21)$$

이 되고 여기에서 사용된 계수는 다음과 같다.

$$F_n = \frac{s_1^2 (2n+1) \zeta_1^{2n}}{1-1/\zeta_1^2} - \frac{s_2^2 [B(2n+1) \zeta_2^{-2n-2} - C(2n+1) \zeta_2^{2n+1}]}{1-1/\zeta_2^2}$$

$$G_n = i \left[\frac{s_1^2 (2n+1) \zeta_1^{2n}}{1-1/\zeta_1^2} + \frac{s_2^2 [B(2n+1) \zeta_2^{-2n-2} + C(2n+1) \zeta_2^{2n+1}]}{1-1/\zeta_2^2} \right]$$

σ_y 는 식 (21)에서 s_1, s_2 를 1로 놓으면 되고 τ_{xy} 는 식 (21)의 음을 취하면서 s_1^2 을 s_1 으로 s_2^2 을 s_2 로 놓으면 된다.

식 (16)에 식 (18), (20)을 대입하면 변위는 다음과 같이 표시된다.

$$u = 2\operatorname{Re} [p_1 \phi_1(\zeta_1) + p_2 \phi_2(\zeta_2)]$$

$$= 2\operatorname{Re} \left[p_1 \phi_1(\zeta_1) + p_2 [B \bar{\phi}_1(1/\zeta_2) + C \phi_1(\zeta_2)] \right]$$

$$= 2T \operatorname{Re} \left[p_1 \sum (a_n + ib_n) \zeta_1^{2n+1} + p_2 [B \sum (a_n - ib_n) / \zeta_2^{2n+1} + C \sum (a_n + ib_n) \zeta_2^{2n+1}] \right]$$

$$= 2T \operatorname{Re} \left[\sum a_n [p_1 \zeta_1^{2n+1} + p_2 (B/\zeta_2^{2n+1} + C \zeta_2^{2n+1})] + i \sum b_n [p_1 \zeta_1^{2n+1} - p_2 (B/\zeta_2^{2n+1} - C \zeta_2^{2n+1})] \right] \quad (22)$$

v 는 식 (22)에서 p_1, p_2 를 q_1, q_2 로 놓으면 된다.

식 (17)에 식 (18), (20)을 대입하면 합력은 다음과 같이 된다.

$$f_1(s) + if_2(s) = (1 + is_1) \phi_1(\zeta_1) + (1 + is_2) \phi_1(\zeta_1) + (1 + is_2) [B \bar{\phi}_1(1/\zeta_2) + C \phi_1(\zeta_2)] + (1 + i\bar{s}_2) [\bar{B}(\phi_1(1/\zeta_2) + C \phi_1(\zeta_2))] \quad (23)$$

$$f_1(s) = - \int Y_n ds = 2\operatorname{Re} [\phi_1(\zeta_1) + \phi_2(\zeta_2)]$$

$$= 2\operatorname{Re} [T \sum (a_n + ib_n) \zeta_1^{2n+1} + BT \sum (a_n - ib_n) / \zeta_2^{2n+1} + CT \sum (a_n + ib_n) \zeta_2^{2n+1}]$$

$$= 2T \operatorname{Re} [\sum a_n (\zeta_1^{2n+1} + B/\zeta_2^{2n+1} + C \zeta_2^{2n+1}) + i \sum b_n (\zeta_1^{2n+1} - B/\zeta_2^{2n+1} - C \zeta_2^{2n+1})]$$

$$+ C \zeta_2^{2n+1}] \quad (24)$$

$$f_2(s) = \int X_n ds = 2\operatorname{Re} [s_1 \phi_1(\zeta_1) + s_2 \phi_2(\zeta_2)]$$

$$= 2\operatorname{Re} \left[s_1 T \sum (a_n + ib_n) \zeta_1^{2n+1} + s_2 [BT \sum (a_n - ib_n) / \zeta_2^{2n+1} + CT \sum (a_n + ib_n) \zeta_2^{2n+1}] \right]$$

$$= 2T \operatorname{Re} \left[\sum a_n [s_1 \zeta_1^{2n+1} + s_2 (B/\zeta_2^{2n+1} + C \zeta_2^{2n+1})] + i \sum b_n [s_1 \zeta_1^{2n+1} - s_2 (B/\zeta_2^{2n+1} - C \zeta_2^{2n+1})] \right] \quad (25)$$

응력강도계수는 응력함수로부터 직접 계산할 수 있다⁽¹⁶⁾.

$$K_1 + K_2/s_2 = -2\sqrt{2} \frac{s_1 - s_2}{s_2} \lim_{z_1 \rightarrow z_0} \sqrt{z_1 - z_0} \phi_1'(z_1) \quad (26)$$

식 (9)~(14)를 고려하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$K_1 + K_2/s_2 = \frac{-2(s_1 - s_2)}{s_2} \frac{\phi_1'(1)}{\sqrt{L}} \quad (27)$$

식 (27)에 식 (20)을 대입하면 다음과 같은 결과를 얻게 된다.

$$K_1 + K_2/s_2 = \frac{-2(s_1 - s_2)}{s_2 \sqrt{L}} T \sum (a_n + ib_n) (2n+1) \quad (28)$$

다음과 같이 K_1, K_2 를 쉽게 분리하여 구할 수 있다.

$$K_1 + K_2/s_2 = K_1 + \bar{s}_2 K_2/s_2 \bar{s}_2$$

$$= K_1 + K_2/s_2 \bar{s}_2 \operatorname{Re}(s_2) - i K_2/s_2 \bar{s}_2 \operatorname{Im}(s_2)$$

$$K_2 = \frac{s_2 \bar{s}_2}{\operatorname{Im}(s_2)} \operatorname{Im} [2(s_1 - s_2) / (s_2 \sqrt{L}) T \sum (a_n + ib_n) (2n+1)] \quad (29)$$

$$K_1 = \frac{-K_2}{s_2} - \frac{2(s_1 - s_2)}{s_2 \sqrt{L}} T \sum (a_n + ib_n) (2n+1)$$

그러므로 응력함수의 계수들만 결정되면 응력강도계수를 식 (29)에 의해 각각 구할 수 있다.

3. 수치해석

본 논문에서 수치해석은 Bowie에 의해 도입된 modified mapping collocation 방법으로 수행하였다. 식 (20)과 같이 Laurent 전개된 무한급수에서 유한개만큼 취하여 미지수 a_n, b_n 이 외부경계에서의 합력 f_1, f_2 , 변위에 대한 경계 조건을 최소자승개념에 의해 근사적으로 만족되도록 하면 $\phi_1(\zeta)$

Table 1 Material properties

	Glass/epoxy	Graphite/epoxy
E_1	48.27GPa	133.8GPa
E_2	17.24GPa	9.58GPa
G_{12}	6.90GPa	4.80GPa
ν_{12}	0.29	0.28
s_1	2.439 <i>i</i>	5.176 <i>i</i>
s_2	0.686 <i>i</i>	0.722 <i>i</i>

가 결정이 되고 식 (21), (22), (23)로부터 응력, 변위, 응력강도계수를 구할 수 있게 된다. 식 (20)의 급수는 응력의 대칭성을 포함하고 있으므로 균열각도가 0인 경우 전체 평판의 1/4, 0이 아닌 경우 1/2만 고려하면 된다. 이때 경계상의 점의 개수는 미지수 개수의 약 2배 정도를 취한다.

수치해석에 사용된 복합재료의 물성치는 Table 1과 같고 등방성체를 다룰 경우에는 $s_1=1.00i$, $s_2=0.99i$ 로 하였다.

graphite/epoxy의 물성치는 KAIST 실험실에서 제작한 시편에서 직접 구한 물성치이고, glass/epoxy의 물성치는 결과를 비교하기 위하여 참고문헌 (5)의 것을 사용하였다.

Fig. 1의 복합재료 유한평판의 기하학적 형상은 다음과 같다. 종횡비(H/W)는 1, 2, 3이고 균열각도(θ)는 섬유각도와 같으며 0, 30, 45, 60으로 변화시켰다. 균열길이와 평판 폭의 비(L/W)는 0.1부터 0.7까지 변화시켰으며 경계조건은 균일응력과 균일변위로 하였다.

본 문제는 혼합모우드 경우이므로 응력강도계수는 K_1 , K_2 모두 생기고 따라서 응력강도수정계수 (stress intensity correction factor)도 Y_1 , Y_2 를 구해야 한다. 균열 각도가 0일 때 $K_1=Y_1 T\sqrt{L}$ 이 되고, 0이 아닐 때는 $K_1=Y_1 T\sqrt{L} \cos^2\theta$, $K_2=Y_2 T\sqrt{L} \cos\theta \sin\theta$ 가 된다.

4. 결 과

복합재료 유한평판 중앙에 경사진 균열이 있는 혼합모우드 파괴문제에서 여러 가지 조건에 대한 응력강도수정계수를 구하기 위해 수정사상선점법을 이용한 프로그램을 개발하여 Prime 750 컴퓨터에

Table 2 Stress intensity correction factors for isotropic case($H/W=3$, $L/W=1/\sqrt{2}$, $\theta=45^\circ$)

	$K_1/T\sqrt{L}$	$K_2/T\sqrt{L}$
Tada ⁽¹⁶⁾	0.730	0.600
Cruse ⁽²⁾ (FEM)	0.728	0.590
Cruse ⁽²⁾ (BIE)	0.712	0.590
Karami ⁽³⁾ (BIE)	0.732	0.591
Blandford ⁽⁴⁾ (BEM)	0.725	0.598
Present	0.727	0.591

서 계산을 수행하였다.

종횡비(H/W)가 3, 평판폭에 대한 균열길이의 비(L/W)가 $1/\sqrt{2}$ 이고 균열각도가 45인 등방성 유한평판이 균일응력하중을 받을 때의 결과를 Table 2에 다른 문헌들의 결과와 함께 비교하였다. 본 논문의 결과는 Cruse⁽²⁾가 유한요소법으로 해석한 결과와 거의 같은 값을 갖는다. Table 3에는 재료물

Table 3 Stress intensity factors for orthotropic case ($E_{yy}=82.74\text{GPa}$, $E_{xx}=24.13\text{GPa}$, $G_{yx}=20.68\text{GPa}$, $\nu_{yx}=0.7$, $\theta=45^\circ$, $2H=50.8\text{cm}$, $2W=25.4\text{cm}$, $2L=7.18\text{cm}$)

No. of terms	K_1 (kPa \sqrt{m})	K_2 (kPa \sqrt{m})	cpu (sec)
6	1.165	1.164	2
10	1.171	1.165	3
14	1.173	1.166	5
18	1.174	1.167	6
22	1.174	1.167	9
Atluri ⁽⁶⁾	1.120	1.182	
Wang ⁽⁷⁾	1.131	1.153	
Infinite plate	1.158	1.158	

성치 $E_{yy}=82.74\text{GPa}$, $E_{xx}=24.13\text{GPa}$, $G_{yx}=20.68\text{GPa}$, $\nu_{yx}=0.7$ 이고 균열각도 45°, 높이(2H) 50.8cm, 폭(2W) 25.4cm, 균열길이(2L) 7.18cm 인 복합재료 유한평판이 균일응력경계 조건일 때의 결과를 비교하였다. 이 경우 무한평판에 대한 K_1 과 K_2 는 모두 1.158이다. 본 연구결과 유한급수 항의 수가 18이면 일정한 값 1.174와 1.167로 수렴하고 그 값들은 무한평판의 그것들보다 각각 1.3%, 0.8% 큼을 알 수 있다. 즉 응력강도수정계수가 각각 1.013, 1.008이 된다. 그러나 Atluri⁽⁶⁾

의 K_1 과 Wang⁽⁷⁾의 K_1 , K_2 는 오히려 무한평판의 값보다 작음을 알 수 있다.

Figs. 2~5에는 glass/epoxy 유한평판의 결과가 나와 있고, Figs. 6~9에는 graphite/epoxy 유한평판의 결과가 나와 있다.

균열길이가 증가함에 따라 응력강도수정계수 Y_1 , Y_2 가 모두 증가함을 알 수 있고 균열길이가 평판 폭에 비해 아주 작으면 Y_1 , Y_2 는 모두 1에 가까와져서 무한평판의 결과가 됨을 보여준다.

경계조건이 균일응력일 때는 중형비가 증가함에

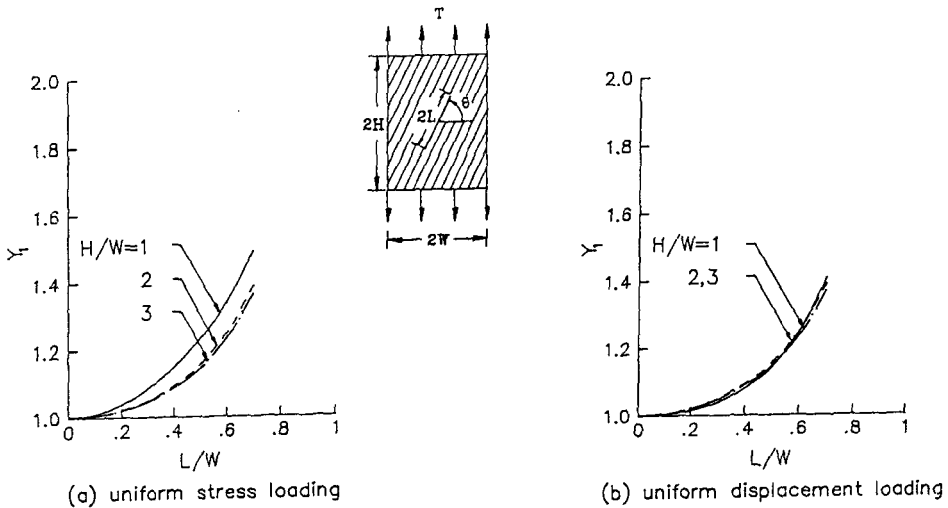


Fig. 2 Finite correction factors for various aspect ratios of glass/epoxy [0] plate

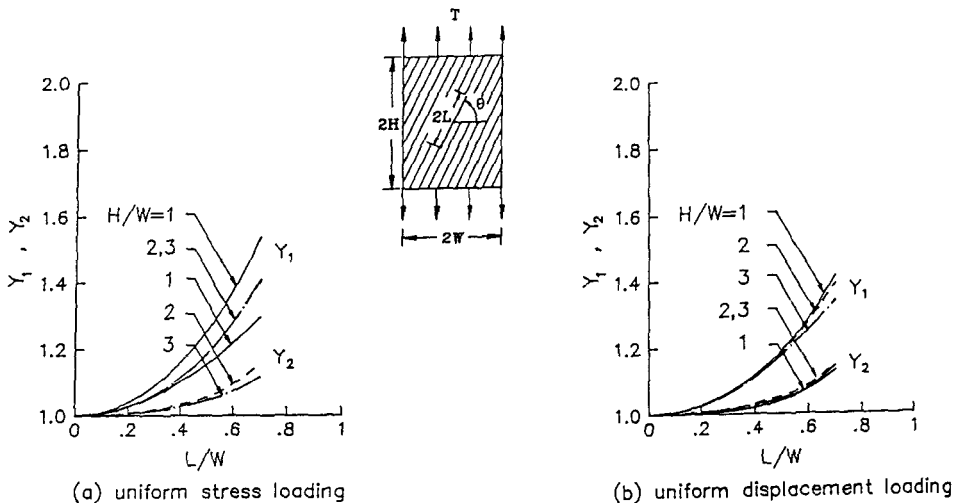


Fig. 3 Finite correction factors for various aspect ratios of glass/epoxy [30] plate

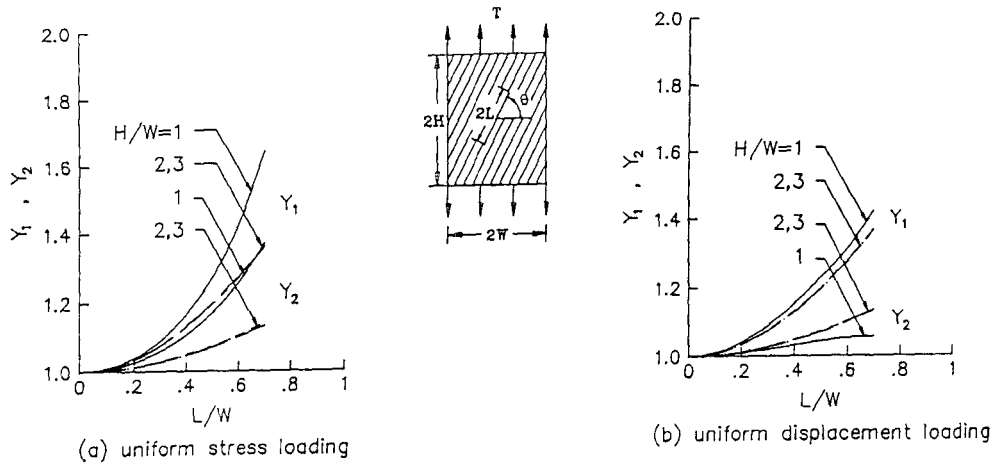


Fig. 4 Finite correction factors for various aspect ratios of glass/epoxy [45] plate

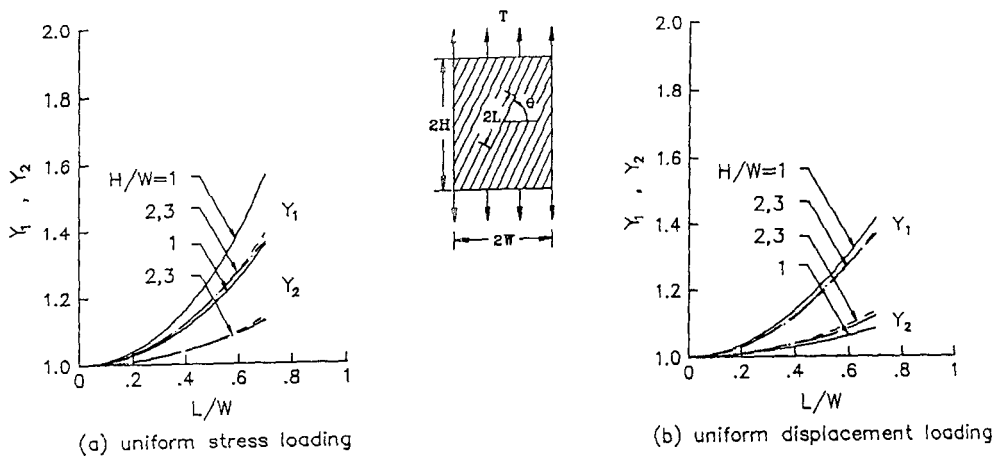


Fig. 5 Finite correction factors for various aspect ratios of glass/epoxy [60] plate

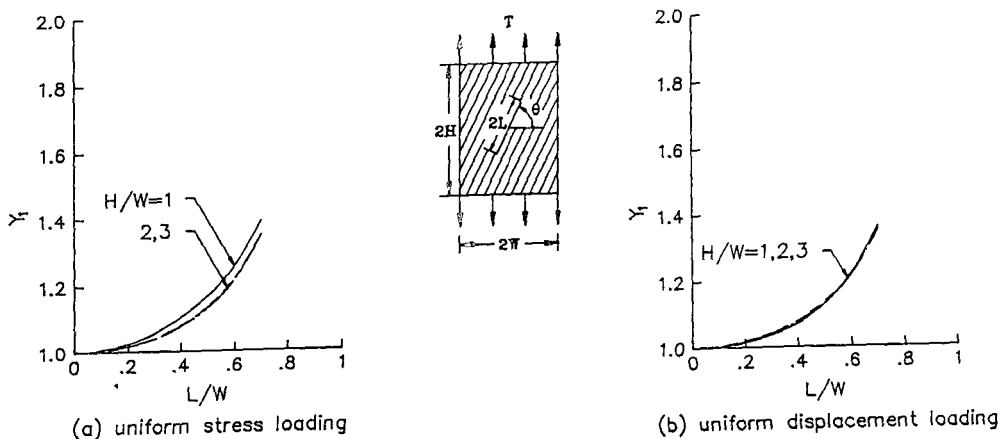


Fig. 6 Finite correction factors for various aspect ratios of graphite/epoxy [0] plate

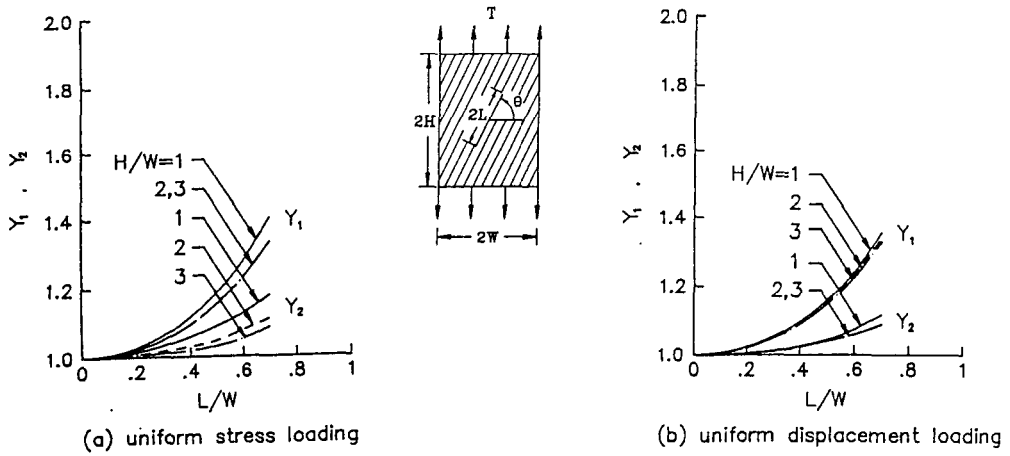


Fig. 7 Finite correction factors for various aspect ratios of graphite/epoxy [30] plate

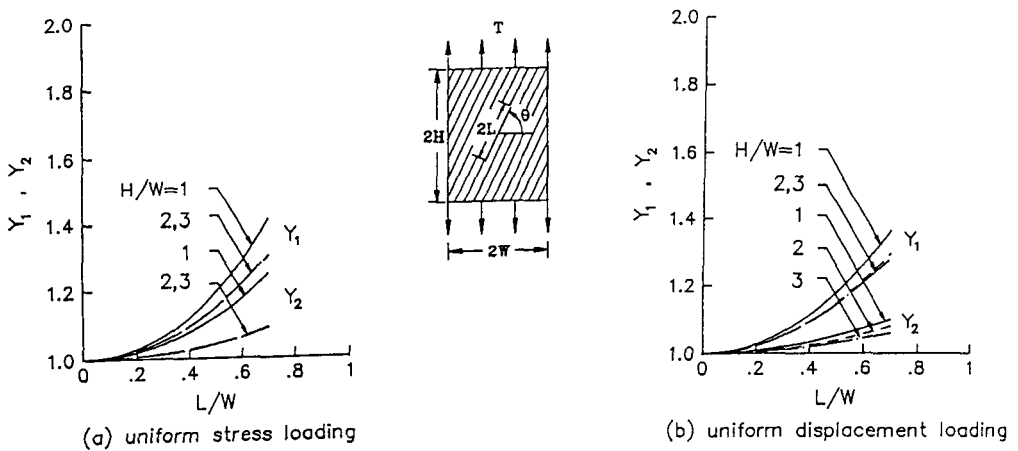


Fig. 8 Finite correction factors for various aspect ratios of graphite/epoxy [45] plate

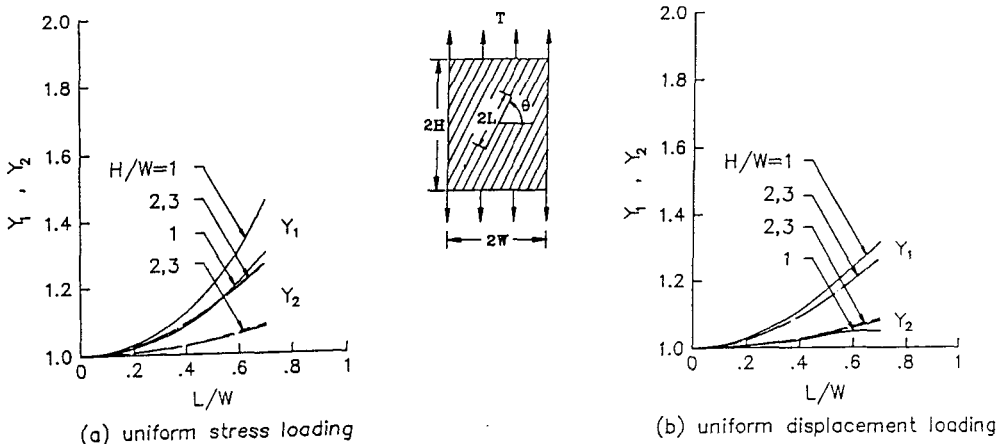


Fig. 9 Finite correction factors for various aspect ratios of graphite/epoxy [60] plate

따라 Y_1 , Y_2 가 감소함을 보이나 균일변위일 때는 반드시 그렇지 않다. 이것은 경계에서의 응력값이 변하기 때문으로 추측된다. 종횡비가 3 정도 되면 경계조건의 영향이 거의 없어진다. 즉 Y_1 , Y_2 값이 경계조건에 관계없이 거의 같은 값을 갖는다. 또 종횡비가 2일 때와 3일 때 Y_1 , Y_2 값은 거의 차이가 없음을 알 수 있다.

Fig. 10에는 균열각도가 0°일 때 즉 하중방향과 섬유방향이 수직일 때의 재료에 따른 응력강도수정

계수를 보여주는데 등방체의 응력강도수정계수는 Bowie⁽¹⁷⁾의 결과와 일치하였고 두 경계조건 모두 등방체, glass/epoxy, graphite/epoxy 순으로 응력강도수정계수가 감소함을 알 수 있다. 이것은 탄성계수의 비 E_1/E_2 가 커질수록 응력강도수정계수가 감소한다는 Bowie⁽¹⁰⁾의 결과와 일치한다. 즉 이방성이 커질수록 응력강도수정계수는 감소함을 알 수 있다. 그러나 하중방향과 섬유방향이 일치하면 반대의 결과 즉, 이방성이 커질수록 응력강도수정계

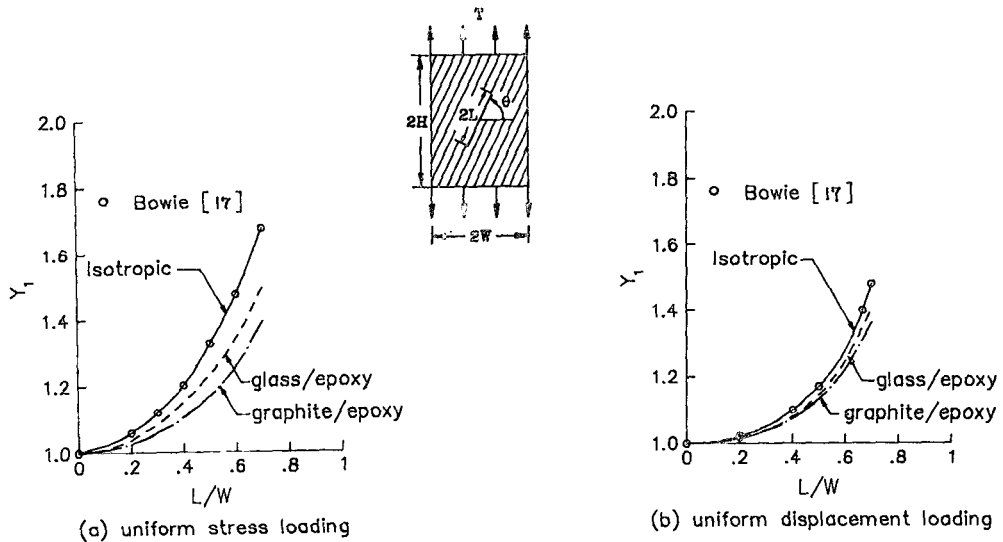


Fig. 10 Comparison with isotropic results [0] ($H/W=1$)

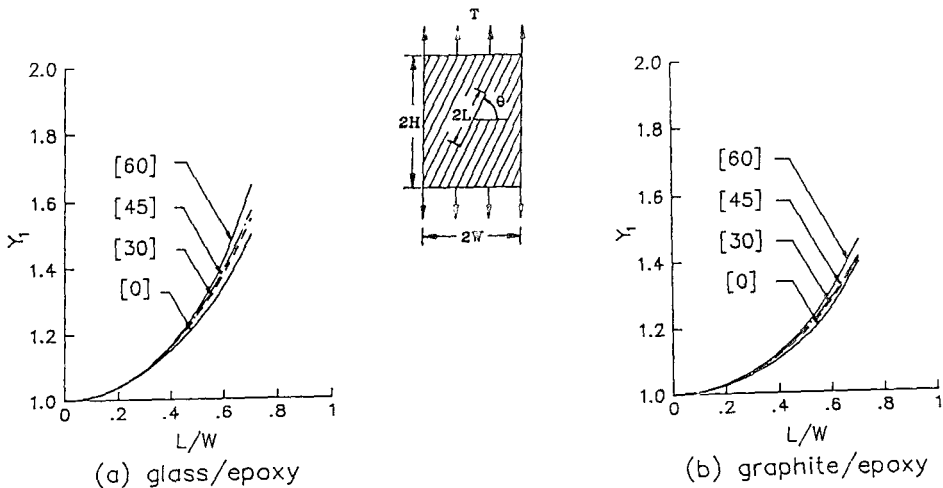


Fig. 11 Variations of finite correction factors with respect to crack angles under uniform stress loading ($H/W=1$)

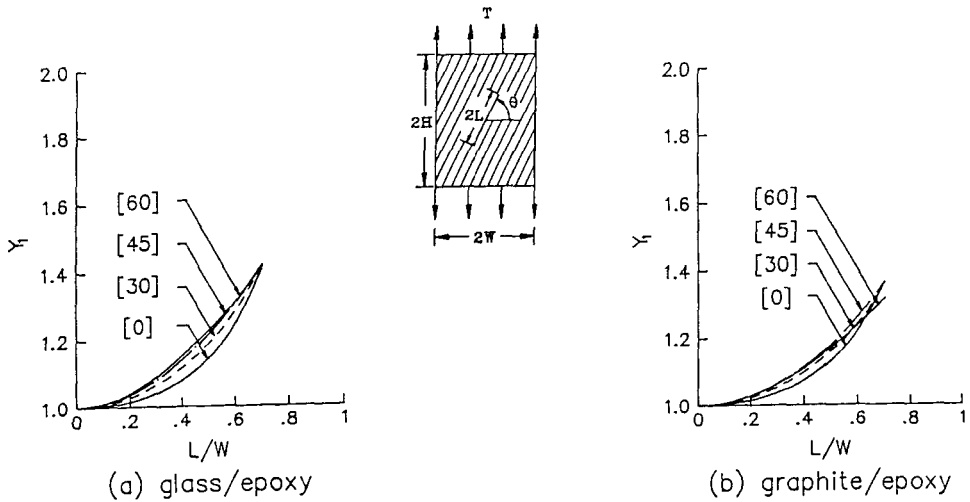


Fig. 12 Variations of finite correction factors with respect to crack angles under uniform displacement loading ($H/W=1$)

수가 증가하게 된다.

Fig. 11에는 균일응력, 종횡비가 1일 때의 균열 각도에 따른 Y_1 값을 보여주는데 균열각도가 증가함에 따라 Y_1 도 증가함을 알 수 있다.

Fig. 12에는 균일변위, 종횡비가 1일 때의 균열 각도에 따른 Y_1 값을 보여주는데 Y_1 값이 균열각도에 따라 항상 증가하지는 않는다는 것을 알 수 있다.

5. 결 론

경사진 균열을 갖는 복합재료 유한평판의 혼합모우드 파괴문제를 해석하기 위한 수정사상선점 프로그램을 개발하여 glass/epoxy, graphite/epoxy 평판에 대한 여러가지 조건, 즉, 종횡비, 균열길이, 균열각도, 경계조건을 변화시키면서 응력강도수정계수를 구하였다. 그 결과 응력강도수정계수가 이러한 조건들에 대해 현저하게 변하는 것을 알 수 있었다. 모우드 I 수정계수 Y_1 은 모우드 II 수정계수 Y_2 보다 항상 크고 균열길이가 길어짐에 따라 그 차이는 증가하였다. 또한 평판재료의 이방성이 증가할수록 응력강도수정계수는 감소하였고 종횡비가 3 이상이면 경계조건과 종횡비의 영향은 무시할 정도가 됨을 알 수 있었다.

본 연구에서 사용한 수정사상선점 프로그램은 복합재료 단층판에만 적용하여 결과를 보였으나, 일

반적인 적층판에 대해서도 쉽게 적용할 수 있다. 예를 들어 sandwich 평판의 경우 effective modulus 등을 구하여 입력시키면 응력강도수정계수를 쉽게 구할 수 있다.

참 고 문 헌

- (1) Wilson, W.K., 1971, "Numerical Method for Determining Stress Intensity Factors of Interior Crack in Finite Plate", J. of Basic Eng., Vol. 93, No. 4; pp. 685~690.
- (2) Cruse, T.A. and Wilson, R.B., 1978, "Advanced Application of Boundary-Integral Equation Methods", Nuclear Eng. and Design 46, pp. 223~234.
- (3) Karami, G. and Fenner, R.T., 1986, "Analysis of Mixed Mode Fracture and Crack Closure Using the Boundary Integral Equation Method", Int. J. of Fracture 30, pp. 13~29.
- (4) Blandford, G.E., Ingraffea, A.R. and Liggett, J.A., 1981, "Two-dimensional Stress Intensity Factor Computations Using the Boundary Element Method", Int. J. for Numerical Methods in Engineering (17), p. 387.
- (5) Gandhi, K.R., 1972, "Analysis of an Inclined Crack Centrally Placed in an Orthotropic Rectangular Plate", J. of Strain Analysis, Vol. 7, No. 3, pp. 157~162.
- (6) Atluri, S.N., Kobayashi, A.S. and Nakagaki, M., 1975, "A Finite Element Program for Fracture Mechanics Analysis of Composite Material", Fracture

Mechanics of Composites, ASTM STP 593, pp. 86~98.

(7) Wang, S.S., Yau, J.F. and Corten, H.T., 1980, "A Mixed-Mode Crack Analysis of Rectilinear Anisotropic Solids Using Conservation Laws of Elasticity", *Int. J. of Fracture*, Vol. 16, No. 3, pp. 247~259.

(8) Sih, G.C., Paris, P.C. and Irwin, G.R., 1965, "On Cracks in Rectilinearly Anisotropic Bodies", *Int. J. of Fracture*, Vol. 1, No. 3, pp. 189~203.

(9) Bowie, O.L. and Neal, D.M., 1970, "A Modified Mapping Collocation Technique for Accurate Calculation of Stress Intensity Factors", *Int. J. of Fracture Mechanics*, Vol. 6, No. 2, pp. 199~206.

(10) Bowie, O.L. and Freese, C.E., 1972, "Central Crack in Plane Orthotropic Rectangular Sheet", *Int. J. of Fracture Mechanics*, Vol. 8, No. 1, pp. 49~58.

(11) Lee, H.H., 1981, "Effects of Boundary Conditions on the Stress Intensity Factor for a Crack Emanating from a Circular Hole in Finite Sheets", M. S. Thesis KAIST.

(12) Cheong, S.K. and Hong, C.S., 1987, "Analysis of

Cracks Emanating from a Circular Hole in an Orthotropic Infinite Plate", *Trans. of KSME*, Vol. 11, No. 6, pp. 895~903.

(13) Lekhnitskii, S.G., 1968, "Anisotropic Plates", Gordon and Breach Science Publishers Inc. New York.

(14) Muskhelishvili, N.I., 1963, "Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity", P. Noordhoff Ltd. Groningen.

(15) Sih, G.C. and Liebowitz, H., 1968, "Fracture", Vol. II, ed. by H. Liebowitz, Academic Press, New York, pp. 67~190.

(16) Tada, H., Paris, P.C. and Irwin, G.R., 1973, "The Stress Analysis of Cracks Handbook", Del Research Corporation, Hellertown.

(17) Bowie, O.L., 1973, "Solutions of Plane Crack Problem by Mapping Technique", *Mechanics of Fracture*, Vol. 1, Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems, ed. by G.C. Sih, Noordhoff Int. Publishing Leyden, pp. 1~55.