

〈論 文〉

## 판재인발 슬립라인장의 변형해석

구 인 회

(1989년 3월 9일 접수)

### Strain Analysis in the Slipline Field for Strip Drawing

Inhoy Gu

**Key Words :** Strip Drawing(판재인발), Slipline Field(슬립라인장), Mid-Plane Cracking  
(중간면 균열)

#### Abstract

The strain distribution in a wide strip drawn through a wedge-shaped die is obtained from the numerical integration of strain increments along the flow path of material points in the slipline field for a non-hardening material under the plane strain condition. It is shown that the strain in the surface layer increases with friction and that the strain at the mid-plane is a function of area reduction only. The redundant deformation factor, obtained from the average strain in a drawn strip, increases with friction. For the workability analysis of a strip drawing process, the strain states along with hydrostatic stresses are needed for the evaluation of a damage function based on the hole-growth mechanism of ductile fracture. The critical maximum of the damage function is assumed to be a material constant. As a result, mid-plane cracking is likely to occur in a process at a small reduction, with a large die angle, and in poor lubrication. Distortions of an initially transverse line are also calculated.

#### 1. 서 론

이 연구는 썬기형 다이를 이용한 판재의 인발에 대한 슬립라인장에서 스트레인을 구하는 방법을 제시하고 이로부터 가공중에 생길 수 있는 역학적 문제의 공학적 해석을 얻고자 한다. 평면변형 상태의 비경화성 재료에 대한 소성변형 해석에 많이 이용되는 슬립라인장 중에서 일찍 알려진 것이 Hill과 Tupper<sup>(1)</sup>에 의한 Fig. 1의 슬립라인장이다. 이것의 구성은 두개의 부채꼴 영역과 원호 슬립라인으로 정의되는 영역이다. 처음에는 다이면의 마찰이 고려되지 않았으나 뒤에 두 부채꼴의 크기를 변화시

켜 마찰을 고려하였다. 이 슬립라인장의 정당한 범위는 재료가 다이면에 처음 닿은 부분에서 업셋팅이 생기지 않게하고 또한 재료가 다이면을 떠날 때 부채꼴 꼭지점에서 과응력이 되지않도록하는 범위가 되며 이들은 각각 Rogers와 Coffin<sup>(2)</sup>과 Dodd와 Scivier<sup>(3)</sup>에서 찾을 수 있다. 이 슬립라인장은 Dodd와 Kudo<sup>(4)</sup>에 의해 중간면 균열의 경우도 포함될 수 있도록 더욱 발달하였다. 이와 아울러 슬립라인장의 일반적인 이론은 Johnson 등<sup>(5)</sup>과 Chakrabarty<sup>(6)</sup>등에서 잘 설명되어있다. 그러나 소성영역 내에서 정확해에 해당되는 이 슬립라인장으로 부터 얻은 이론적인 스트레인 계산은 아직 없다.

가공스트레인계산의 필요성은 그것이 재료의 가공정도를 표시할 뿐만 아니라 인발가공의 성형성을 판단하는데 이용될 수 있다. 판재인발에 대한 슬립

\*정회원, 중앙대학교 공과대학 기계공학과

라인장이 운동학적 혹은 정역학적 타당성을 갖는다 할지라도 사용되는 재료의 인성과 연성을 초과하는 물성이 요구되는 인발에는 사용될 수 없다. 예를들면 가공면의 표면 균열이나 인발 압출에서 있을 수 있는 중간면 균열(mid-plane cracking)의 연성파괴는 소성가공에서 가공한계를 결정하는 중요한 요인이 된다. 금속재료의 파괴해석에는 응력과 스트레인해석 사용되는 재료의 성질이 일반적으로 요구된다. 열림형태에 의한 재료의 연성파괴는 미시역학적으로 기공의 성장과 성장된 기공의 결합에 기인한다. 여기서 기공은 금속의 모체에 존재하는 비금속 입자 혹은 제 이상의 입자가 비교적 낮은 응력 하에서 모체로부터 분리되어 형성되는 기공을 말한다. 기공의 성장해석을 위한 두개의 이론적 모델을 소개하면 첫째 응력과 변형률의 관계가  $\sigma = \sigma_0 \varepsilon^n$ 으로 표시되는 지수경화재료에서 반경  $\rho_0$ 의 원통형 기공이 삼축방향의 평균 수직응력  $\sigma$ 와 전단응력  $\tau$ 를 받아서 생긴 전단스트레인  $\gamma$ 의 전단대에 놓여 성장된 기공의 반경  $\rho$ 는 McClintock<sup>(7)</sup>에 의해 다음식으로 표시된다.

$$\ln(\rho/\rho_0) = \frac{\gamma}{2(1-n)} \sin h\left(\frac{1-n}{\tau}\sigma\right) \quad (1)$$

또한 전단 항복응력  $k$ 의 비경화성 재료에 있는 반경  $\rho_0$ 의 구형기공(spherical cavity)의 성장에 대한 해석은 Rice와 Tracey<sup>(8)</sup>에 의해 주어졌다.

$$\ln(\rho/\rho_0) = 0.558 \varepsilon \left[ \sin h\left(\frac{\sqrt{3}\sigma}{2k}\right) + C \right] \quad (2)$$

이 식에서  $\varepsilon$ 는 등가 스트레인(effective strain)이고 상수  $C$ 에 대한 논의는 Budiansky 등<sup>(9)</sup>에서 찾을 수 있다. 위의 두 식에서 얻을 수 있는 결론은 두 식이 비경화성 재료( $n=0$ )에 대해 거의 같은 형태의 함수이고 공통적으로 전단 스트레인  $\gamma$ 에 비례하고 평균 수직응력  $\sigma$ 에 대해 지수적으로 변한다. 소성가공에서의 연성파괴와 관련하여 기공의 성장에 대한 이 식을 파괴예측에 이용하고자 한다. 즉 기공의 성장을 재료의 파손된 정도를 나타내는 값으로 간주하면 기공성장의 한계값을 재료상수로 생각할 수 있다. 비경화성 재료에 대해 파손함수(damage function)  $D (= \ln \frac{\rho}{\rho_0})$ 는 식 (1)로부터 전단 스트레인, 평균수직응력, 전단항복응력의 함수로 제시된다( $\tau=k, n=0$ ).

$$D = \frac{\gamma}{2} \sin h(\sigma/k) \quad (3)$$

여기서 파괴조건(fracture criterion)은  $D=D_c$ 이고  $D_c$ 값은 실험에서 중간면 균열이 생기는 상태에 해당되는 해석적 응력과 스트레인값으로 윗식에서 결정되는 재료상수이다. 이 상수가 결정된 후, 중간면 균열이 생기지 않기 위해서 파손함수  $D$ 가 상수  $D_c$ 를 넘지 않도록 가공변수 즉 단면감소율, 다이 각, 다이면의 마찰계수를 조정할 수 있다. 따라서 재료의 인발가공성을 미리 판단할 수 있다.

소성가공의 성형성(formability)은 응력 혹은 변형률 중 어느 한 가지를 기준으로 논의될 수 없으므로 Dodd와 Kudo<sup>(4)</sup>에 의해 언급된 판재인발에서 중간면의 파단조건(중간면의 평균 수직응력이 전단 항복응력 보다 크다)은 정당할 수 없다. 식 (1, 2)에서 정확한 파손함수는 사용되는 모델에 따라서 다를 수 있지만 기본적으로 파손이 스트레인에 비례하고 평균 수직응력에 지수적으로 변한다는 것은 Lemaitre<sup>(10)</sup>에 의해 이론과 시험으로 확인되었다. 따라서 식 (3)은 정당하다 할 수 있다. 식 (3)의 파손함수가 기공의 성장모델에 기초하고 있으므로 비틀림파괴에서와 같이 전단대의 불안정으로 생긴 전단파괴에는 이용될 수 없다. 따라서 Vujovic와 Shabaik<sup>(11)</sup>에 의해 제안된 인장, 압축, 전단 실험으로 얻어지는 성형한계곡선(forming limit curve)은 실험적 상관관계는 될 수 있어도 이론적 배경은 결여되어 있다. 왜냐하면 인장과 전단 상태에서의 파괴를 미시역학적으로 설명할 수 있는 통일된 이론이 없기 때문이다.

인발 후 부재의 스트레인 분포는 Cetlin<sup>(12)</sup>에서 보듯이 상당한 연구가 수행되었다. 인발된 단면의 경도분포에서 대략의 스트레인 분포를 얻는 방법을 포함하여, 인발된 부품의 가공정도를 표시하는 잉여 변형계수(redundant deformation factor)를 얻기 위한 실험식이 주로 연구되어 왔다. 이 계수는 같은 단면감소율에 대한 인발부품의 평균 스트레인과 단순인장에서의 균일 스트레인의 비이다. 본 연구에서는 이 계수를 직접 계산하는 방법이 제시되었다.

## 2. 슬립라인장

Fig. 1은 두께  $H$ 의 판재를 다이반각  $\theta_a$ 의 쉐기형 다이를 통해 인발하여 두께  $h$ 로 감소시킬 경우

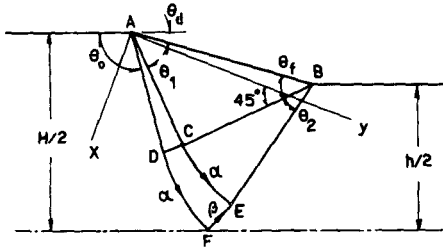


Fig. 1 A Slipline field for strip drawing through a wedge-shaped die

에 대한 슬립라인장을 보여준다. 그림에서  $\alpha$ 와  $\beta$  슬립라인이 표시되어있고 이들 선을 따라 접선의 반시계 회전을 양의 각으로 하는 곡선 각 좌표( $\alpha, \beta$ )가 점 C를 원점(0, 0)으로 하여 정의된다. 다이면의 마찰은 슬립라인이 다이면과 만나는 각  $\theta_f$ 에서 고려되고 다이면에 접한 일정응력 영역 ABC에서 평균 수직응력을  $\sigma_c$ 로 표시하면 다이면의 마찰계수는 다음과 같다.

$$\mu = \frac{\cos 2\theta_f}{-\sigma_c/k + \sin 2\theta_f} \quad (4)$$

마찰이 없는 경우  $\mu=0$ 에서 각  $\theta_f=45^\circ$ 가 되고 부채꼴 영역의 두 반경은 같다. 그러나 일반적인 경우에 두 부채꼴의 최대반경 AC와 BC는 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{(H-h) \sin \theta_f}{2 \sin \theta_a} \\ r_2 &= \frac{(H-h) \cos \theta_f}{2 \sin \theta_a} \end{aligned} \quad (5)$$

이들 두 반경으로 정의되는 원호 슬립라인 CD와 CE는 각각  $\beta$ 와  $\alpha$ 선이 되고 이로부터 영역 CDFE 내의 슬립라인 망이 수치적으로 구성된다. 곡선 좌표계( $\alpha, \beta$ )를 사용하면 점 D는  $(0, -\theta_1)$ 이고 점 E는  $(\theta_2, 0)$ 이 된다. 여기서 각  $\theta_1, \theta_2$ 는 점 F( $\theta_2, \theta_1$ )에서  $\alpha, \beta$ 선이 중간면과  $45^\circ$ 를 이룬다는 사실에서 구해진다. 임의의 좌표각( $\alpha, \beta$ )에 대한 직선좌표( $x, y$ )를 구하기 위해 유한차분법을 이용한다. 이 수치적 방법은 일찌기 Hill<sup>(13)</sup>에 의해 설명되었다. 점 A를 중심으로 좌표계( $x, y$ )를 세우고 점 C에서  $\alpha$ 선이  $x$ 축과  $45^\circ$ 를 이루도록 방향을 잡는다. 임의의 좌표각( $\alpha, \beta$ )에서  $\alpha$ 선이  $x$ 축과 이루는 각은  $\theta=45+\alpha+\beta$ 이고  $\alpha, \beta$ 선은 직교하므로

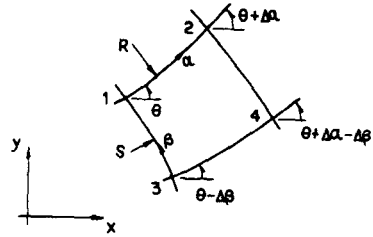


Fig. 2 A Slipline net and its notations used in numerical calculation

$$\frac{dy}{dx} = \tan \theta \text{ along an } \alpha\text{-line}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\cot \theta \text{ along a } \beta\text{-line} \quad (6)$$

Fig. 1의 영역 CDFE에서 일정한 증분각(본 계산에서  $0.5^\circ$ )의 각 좌표( $\alpha, \beta$ )에 대한 슬립라인망을 구성한다. Fig. 2의 한 개의 세포에 대해 식 (6)은 유한차분으로 다음과 같이 표시되고 점 2의 좌표값( $x_2, y_2$ )와 점 3의 좌표값( $x_3, y_3$ )에서 점 4의 좌표값( $x_4, y_4$ )이 결정된다.

$$\frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} = \tan(\theta - \Delta\beta + \Delta\alpha/2)$$

$$\frac{y_4 - y_2}{x_4 - x_2} = -\cot(\theta + \Delta\alpha - \Delta\beta/2) \quad (7)$$

Fig. 1에서 CD와 CE상의 증분각에 대한 각 절점의 좌표를 알고 있으므로 이로부터 영역내의 좌표값은 윗식을 이용하여 얻어진다. 슬립라인 곡률반경은 Fig. 2에서  $\alpha, \beta$ 선의 반경을 각각 R과 S로 표시하고 곡률중심은 증가하는 좌표각 방향의 원편에 있다. 이때 Hencky의 정리는

$$dS = R d\alpha \text{ along an } \alpha\text{-line}$$

$$dS = -S d\beta \text{ along a } \beta\text{-line} \quad (8)$$

Fig. 1의 슬립라인 CE는  $\alpha$ 선으로  $R=r_2$ 이고 슬립라인 CD는  $\beta$ 선으로  $S=r_1$ 의 일정한 값을 갖는다. 이를 식 (8)에 대입하면

$$S = r_1 + r_2 \alpha \quad \text{on CE}$$

$$R = r_2 - r_1 \beta \quad \text{on CD} \quad (9)$$

영역 CDFE내부에 대해서는 Fig. 2의 한 세포에 대한 표기를 이용하여 식 (8)을 유한차분 방식으로 나타내어  $R_2, R_3, S_2, S_3$ 로부터  $R_4, S_4$ 가 계산된다.

$$S_4 - S_3 = (R_3 + R_4) \Delta\alpha/2$$

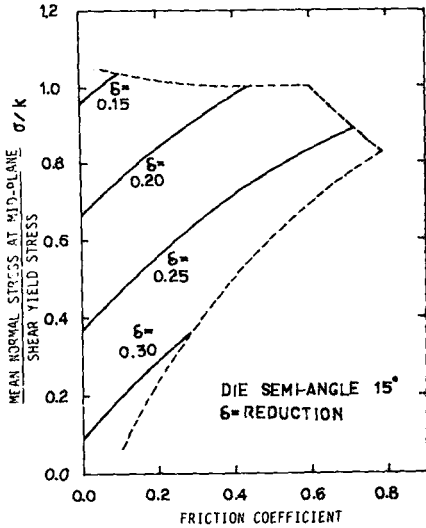


Fig. 3 Mid-plane hydrostatic stress vs. friction coefficient for various reductions in the statically admissible range of the slipline field of Fig. 1.

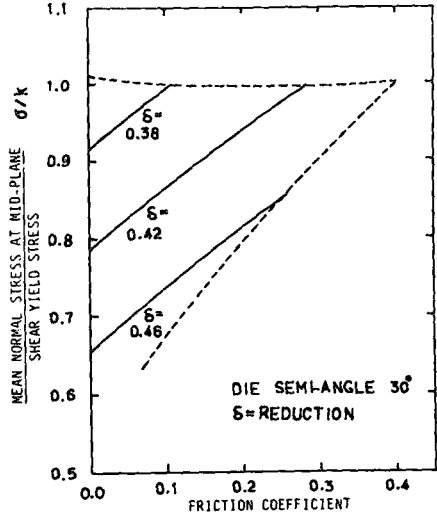


Fig. 4 Mid-plane hydrostatic stress vs. friction coefficient for various reductions in the statically admissible range of the slipline field of Fig. 1.

$$R_2 - R_4 = -(S_2 + S_4)\Delta\beta/2 \quad (10)$$

일정한 증분각  $\Delta\alpha = \Delta\beta = 0.5^\circ$ 의 슬립라인망 절점의 좌표값  $(x, y)$ 와 곡률값  $(R, S)$ 가 계산되어 컴퓨터에 저장된다. 절점이 아닌 좌표각  $(\alpha, \beta)$ 에 대한 값은 이웃하는 절점의 값과 식 (7)과 (10)에서 증분값  $\Delta\alpha < 0.5$ 와  $\Delta\beta < 0.5$ 에 대한 값을 계산한다. 유한차분 방식으로 얻은 계산값은 Ewing<sup>(14)</sup>의 수열함수로 구성된 해석적 결과와 비교하여 거의 동일하였다. 예를들면  $r_1 = r_2 = 1$ 의 슬립라인장에서 좌표각  $(\alpha, \beta) = (60, -60)$ 에 해당되는 해석하는  $x = 3.84243$ 과  $R = S = 4.17299$ 인데 수치해는  $x = 3.84246$ 과  $R = S = 4.17300$ 이다.

Fig. 1에서  $\theta_f$ 에 대한  $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ 의 결정은 슬립라인장이 중간면에 대해 대칭이므로 점  $F(\alpha = \theta_2, \beta = -\theta_1)$ 의 좌표를  $(x_f, y_f)$ 라 할 때 다음 식들에서 얻어진다.

$$\begin{aligned} x_f \cos(135 - \theta_0 - \theta_1) \\ + y_f \sin(135 - \theta_0 - \theta_1) &= H/2 \\ \theta_0 + \theta_2 &= 135 \\ \theta_0 + \theta_1 &= \theta_f - \theta_a + 90 \end{aligned} \quad (11)$$

슬립라인장의 기하학적 형태가 결정된 후 응력장을 계산하기 위해 먼저 슬립라인장 이론으로부터  $\alpha, \beta$ 의 변화에 따른 평균 수직응력  $\sigma$ 는 다음 식에서

얻어진다.

$$\begin{aligned} d\sigma &= 2kda \quad \text{along an } \alpha\text{-line} \\ d\sigma &= -2kd\beta \quad \text{along a } \beta\text{-line} \end{aligned} \quad (12)$$

인발의 경우 Fig. 1에서 전방의 슬립라인 ADF( $\alpha$ 선)를 따라 수평력의 합이 영이 되도록하는 중간면 응력  $\sigma_f$ 를 구한다. 이때 DF면을 0.01도 구간으로 나누고 각 구간의 중간 응력값과 중간 곡률반경  $R$  값을 취하여 적분한다. 또한 식 (12)에서 얻은  $\sigma_f - 2k\theta_1 - 2k\theta_2 = \sigma_c$ 를 식 (4)에 대입하여 마찰계수  $\mu$ 를 결정한다. 이렇게 얻은 중간면의 평균 수직응력  $\sigma_f$ 와 마찰계수의 관계가 각각의 단면감소에 대해 Fig. 3과 Fig. 4에 다이반각  $15^\circ$ 와  $30^\circ$ 의 경우에 각각 나타나 있다. 이들 그림에서 Fig. 1의 슬립라인장의 정당한 범위가 표시되어 있는데 이는 Dodd와 Scriver<sup>(9)</sup>에 의해 논의 되었으므로 여기서는 생략한다.

### 3. 속도장

Fig. 1의 슬립라인장 내의 임의의 점에서 속도벡터를 구하기 위해 먼저 슬립라인장 이론에서  $\alpha, \beta$ 각의 변화에 따른  $\alpha, \beta$ 선 방향 속도벡터( $v_\alpha, v_\beta$ )는 다음 식으로 결정된다.

$$\begin{aligned} dv_\alpha - v_\beta d\alpha &= 0 && \text{along an } \alpha\text{-line} \\ dv_\beta + v_\alpha d\beta &= 0 && \text{along a } \beta\text{-line} \end{aligned} \quad (13)$$

Geiringer방정식이라 불리는 이 식을 유한차분 방식으로 적분하기 위해서는 경계조건이 필요해진다. Fig. 1에서 입구의 판재속도를 단위 속도 1로 하면 출구에서의 속도는  $H/h$ 가 된다. 강소성 경계면 DF( $\alpha$ 선)에서 수직속도의 연속조건을 이용하여  $v_\beta$ 가 얻어지고 이를 식 (13)에 대입하여  $v_\alpha$ 가 결정된다.

$$\begin{aligned} v_\alpha &= (H/h - 1)/\sqrt{2} - \cos(\theta_0 + \alpha) \\ v_\beta &= \sin(\theta_0 + \alpha) \end{aligned} \quad (14)$$

경계면 EF( $\beta$ 선)에서 연속조건으로  $v_\alpha$ 를 얻고 식 (13)에 대입하여  $v_\beta$ 가 얻어진다.

$$\begin{aligned} v_\alpha &= (H/h) \sin(45 + \theta_1 + \beta) \\ v_\beta &= (1 - H/h)/\sqrt{2} + (H/h) \cos(45 + \theta_1 + \beta) \end{aligned} \quad (15)$$

영역 CDFE 내부에서의 속도벡터는 Fig. 2의 환 세포에 관하여 점 2의 속도 ( $v_{\alpha 2}$ ,  $v_{\beta 2}$ )와 점 3의 속도 ( $v_{\alpha 3}$ ,  $v_{\beta 3}$ )를 알고 점 1의 속도 ( $v_{\alpha 1}$ ,  $v_{\beta 1}$ )을 구하는 문제의 해석에서 얻어진다.

$$\begin{aligned} v_{\alpha 2} - v_{\alpha 1} &= (v_{\beta 1} + v_{\beta 2}) \Delta\alpha / 2 \\ v_{\beta 1} - v_{\beta 3} &= -(v_{\alpha 1} + v_{\alpha 3}) \Delta\beta / 2 \end{aligned} \quad (16)$$

식 (16)의 계산에서 전과 같이  $\Delta\alpha = \Delta\beta = 0.5$ 의 일정한 증분각의 좌표 ( $\alpha$ ,  $\beta$ )에서의 속도벡터 ( $v_\alpha$ ,  $v_\beta$ )가 계산되어 컴퓨터에 저장된다. 이때 Fig. 1의 각  $\theta_1$ 과  $\theta_2$ 가 0.5도의 배수가 아닐 경우 경계면 DF에서  $\beta$ 선 방향의 첫번째 증분각  $\Delta\beta$ 는 0.5도 보다 작고 경계면 EF에서  $\alpha$ 선 반대방향의 첫번째 감소각  $\Delta\alpha$ 는 0.5도 보다 작다. 임의의 각 ( $\alpha$ ,  $\beta$ )에서 속도벡터는 이웃하는 절점의 속도벡터를 이용하여 식 (16)에서 계산된다.

#### 4. 스트레인 계산

재료가 소성영역을 통과하면서 스트레인을 받으므로 입의 재료점의 유동 경로를 따라 스트레인 증분을 적분하여 스트레인 분포를 계산한다. 스트레인 계산은 재료점의 위치에 따라 다르므로 영역을 구분하여 Fig. 1에서 입구와 출구의 강소성 경계 통과, 두개의 부채꼴 영역, 두개의 부채꼴 원호로 정의되는 영역으로 나눈다. 먼저 Fig. 5의 표시로 강소성 경계를 지날 때의 스트레인 증분은

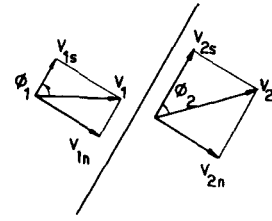


Fig. 5 Notations for velocity components across the rigid-plastic boundary

$$\Delta\gamma = \frac{v_{2s} - v_{1s}}{v_{1n}} \quad (17)$$

연속조건은  $v_{1n} = v_{2n}$ 이 된다. 경계면 ADF 통과시  $\phi_1 = \theta_0 + \alpha$ 이고  $v_{2s}$ 와  $v_{2n}$ 은 식 (14)의  $v_\alpha$ 와  $v_\beta$ 가 된다. 이들을 식 (17)에 대입하면

$$\Delta\gamma = \frac{(H/h - 1)}{\sqrt{2} \sin(\theta_0 + \alpha)} \quad (18)$$

출구쪽 경계면 BEF 통과시  $\phi_2 = 45 + \theta_1 + \beta$ 이고  $v_{1n}$ 과  $v_{2s}$ 는 식 (15)의  $v_\alpha$ 와  $v_\beta$ 이다. 식 (17)에 대입하여 얻은 스트레인 증분은

$$\Delta\gamma = \frac{(1 - h/H)}{\sqrt{2} \sin(\theta_1 + \beta + 45)} \quad (19)$$

부채꼴 영역에서 극좌표 ( $r$ ,  $\phi$ )를 사용하여 반경 및 원주방향 속도는  $v_r$ ,  $v_\phi$ 로 표시되고 미소시간  $\Delta t$  동안의 미소변위는

$$\begin{aligned} \Delta r &= v_r \Delta t \\ \Delta \phi &= v_\phi \Delta t / (r + \Delta r / 2) \end{aligned} \quad (20)$$

여기서  $\Delta t$ 는 각변화  $\Delta\phi$ 가 0.01정도 되도록 충분히 작게 잡는다. 이 좌표계에 대한 스트레인률은

$$\dot{\gamma} = \frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r} + \frac{\partial v_r}{\partial \phi} \quad (21)$$

이 식에서 스트레인 증분  $\Delta\gamma = \dot{\gamma} \Delta t$ 이 계산된다. Fig. 1의 입구쪽 부채꼴 영역 ADC에서 ( $v_r$ ,  $v_\phi$ )는 각각 ( $v_\alpha$ ,  $v_\beta$ )에 해당되고  $\alpha = 0$ ,  $d\phi = d\beta$ 의 관계가 있다. 반경방향의 직선 슬립라인 ( $\alpha$ 선)을 따라 각의 변화가 없으므로 식 (13)에서  $v_\alpha$ 는 일정하다. 따라서 식 (13)의  $\beta$ 선을 따라  $v_\beta$ 의 변화는  $\beta$ 각과  $v_\alpha$ 에만 의존하므로 반경에 무관하다. 또한 AD상의  $v_\beta$ 는 반경에 관계없이 일정하다. 결국 부채꼴 영역내의 모든 속도는 반경에 무관하고 식 (21)의 첫째항이  $\frac{\partial v_\phi}{\partial r} = 0$ 가 된다. 식 (21)을 영역 ADC에 대해 계산할 때 미분항은 아주 작은 각  $\epsilon$

(0.01° 정도)을 취하여 유한 차분 방식으로 다음과 같이 표시된다.

$$\frac{\partial v_r}{\partial \phi} = \frac{v_a(0, \beta + \epsilon) - v_a(0, \beta)}{\epsilon} \quad (22)$$

Fig. 1의 영역 ACD에서 재료는 AC면 ( $\beta=0$ )을 통과하여 일정응력 영역 ABC에 진입하거나 면 CD( $r=r_1$ )을 통과하여 영역 CDFE로 진입할 수 있다. 일정응력 영역 ABC에서 속도는 다이면에 평행하고 일정한 값  $v_a(0, 0)$ 과  $v_\beta(0, 0)$ 을 갖는다. 앞에서 설명된대로 면 AC를 따라서  $v_\beta$ 가 일정하고 영역 ABC내에서  $\beta$ 각이 변하지 않으므로 식 (13)에서  $v_\beta$ 는 일정하다. 마찬가지로 이 영역 내에서  $v_a$ 도 일정하다. 이와같이 유동방향의 변화가 없는 일정한 속도장에서 스트레인은 발생하지 않는다. 출구쪽 부채꼴 영역 BCE에서 극좌표 항의 속도( $v_r, v_\beta$ )는 각각 슬립라인 속도( $-v_\beta, v_a$ )에 해당된다. 또한  $\beta=0$ 와  $d\phi=d\alpha$ 가 성립하고 입구쪽 부채꼴 영역에서와 같이 속도성분은 반경  $r$ 에 무관하므로 식 (21)에서  $\frac{\partial v_\beta}{\partial r} \phi=0$ 이고 미분항은 다음과 같이 계산된다.

$$\frac{\partial v_r}{\partial \phi} = -\frac{v_\beta(\alpha + \beta, 0) + v_\beta(\alpha, 0)}{\epsilon} \quad (23)$$

Fig. 1의 영역 CDFE에서 재료점의 위치는 각 ( $\alpha, \beta$ ) 혹은 이들각에 대한 좌표 ( $x, y$ )로 나타낼 수 있다. 또한 각 점에서  $\alpha, \beta$ 선의 곡률반경 값 ( $R, S$ )와 속도벡터( $v_a, v_\beta$ )가 이미 설명한대로 구해진다. 미소시간  $\Delta t$ 동안 각좌표의 이동은

$$\begin{aligned} v_a \Delta t / R &= \Delta \alpha \\ v_\beta \Delta t / S &= \Delta \beta \end{aligned} \quad (24)$$

이들 각의 변화가 0.01정도 되게  $\Delta t$ 를 잡는다. 이 동안 스트레인 증분은 다음 식에서 얻어진다.

$$\Delta \gamma = \left( \frac{\partial v_\beta}{S \partial \alpha} + \frac{\partial v_a}{S \partial \beta} + \frac{v_a}{R} - \frac{v_\beta}{S} \right) \Delta t \quad (25)$$

이 식의 계산에서 음의 양은 반대방향의 전단을 의미하여 전단스트레인의 감소가 아니다. 왜냐하면 재료의 변형이 진행되면서 가공스트레인이 감소하는 것은 있을 수 없으므로 식 (25)는 항상 절대값을 취한다. 이것은 앞의 경우에도 적용된다. 미분항의 미소 각  $\epsilon(0.01^\circ$  정도)에 대해

$$\frac{\partial v_\beta}{\partial \alpha} = \frac{v_\beta(\alpha + \epsilon, \beta) - v_\beta(\alpha, \beta)}{\epsilon}$$

$$\frac{\partial v_a}{\partial \beta} = \frac{v_a(\alpha, \beta + \epsilon) - v_a(\alpha, \beta)}{\epsilon} \quad (26)$$

이 영역에 있는 점이  $\beta=0$ 가 되면 부채꼴 영역 BCE로 들어가고  $\alpha=\theta_2$ 가 되면 강소성 경계를 지나 출구로 나간다.

지금까지 슬립라인장, 속도장, 구분된 영역내에서 스트레인 증분계산방법과 유동에서 각 영역의 통과조건이 설명되었고 그에 따라 컴퓨터 프로그램을 구성하였다. 예를 들어 Fig. 1에서 입구쪽 두께  $H=2$ , 다이반각  $\theta_a=15^\circ$ , 단면 감소율 0.15, 각 ABC  $\theta_f=35^\circ$ 에 대해 0.5° 간격의 유한차분 방법으로 계산된 결과의 일부가 Table 1에 주어져있다. 여기서 입구쪽 판재속도가 단위속도인 경우에 대한 속도장과 영역 CDFE내의 스트레인률이다. 인발된 판재의 가공 스트레인 분포를 계산하기 위해 Fig. 1의 입구쪽 경계면 ADF에서 다수의 일정간격의 점에서 출발한다. 예를들어 중간면 부근에서 경계면 DF를 지나는 점에 대해 설명하면, 먼저 임의각  $\alpha$ 에 대한 경계면 통과 스트레인이 식 (18)에서 계산된다. 이 점의 좌표각 ( $\alpha, -\theta_1$ )에 해당되는 곡률 ( $R, S$ )와 속도벡터 ( $v_a, v_\beta$ )를 구하여 식 (24)에 대입하면 미소시간  $\Delta t$ (예로 0.0002초)동안의 각변화  $\Delta \alpha, \Delta \beta$ 가 얻어지고 새로운 좌표각( $\alpha + \Delta \alpha, -\theta_1 + \Delta \beta$ )을 찾는다. 이동간의 스트레인 증분을 식 (25)에서 구한후 이전의 스트레인에 더한다.

다시 새 좌표각에 대한 곡률과 속도벡터를 구하여 식 (24)에 대입하고  $\Delta t$ 동안의 각변화를 구하여 더하면 또다시 새로운 좌표각을 얻고 이동간의 스트레인 증분을 구하여 더하는 과정을 반복한다. 좌표각이  $\alpha=\theta_2$ 에 도달하면 Fig. 1의 EF면을 통과하고 이때의 스트레인 증분은 식 (19)에서 계산되어 더한다. 만약  $\alpha=\theta_2$ 가 되기전  $\beta=0$ 에 먼저 도달하면 CE를 통과하여 영역 BCE로 들어오고 여기서 ( $v_r, v_\beta$ )= $(-v_\beta, v_a)$ 와  $\beta=0$ 이다. 면 CE의 반경  $r=r_2$ 는 식 (5)에서 주어지고 좌표각 ( $\alpha, 0$ )에 대한 속도벡터 ( $v_a, v_\beta$ )를 구하여 식 (20)에 대입하면  $\Delta r = -v_\beta \Delta t$ 와  $\Delta \alpha = v_a \Delta t / (r + \Delta r / 2)$ 가 된다. 미소시간  $\Delta t$ 후의 위치는 반경( $r + \Delta r$ )과 각 ( $\alpha + \Delta \alpha$ )으로 주어지고 이동간의 스트레인 증분을 식 (21)에 대한  $\Delta \gamma = (\partial v_r / \partial \phi - v_\beta / r) \Delta t$ 와 식 (23)에서 계산하여 더한다. 새로운 각 ( $\alpha + \Delta \alpha, 0$ )에 대한 이상의 과정이 반복되어  $\alpha=\theta_2$ 까지 계속되고 식 (19)에서 경계면 통과스트레인을 구하여 더한다.

**Table 1** Slipline network coordinates ( $x, y$ ), curvature ( $R, S$ ), velocity vector ( $v_\alpha, v_\beta$ ), strain rate ( $\dot{\gamma}$ ), and mean stress ( $\sigma/k$ )

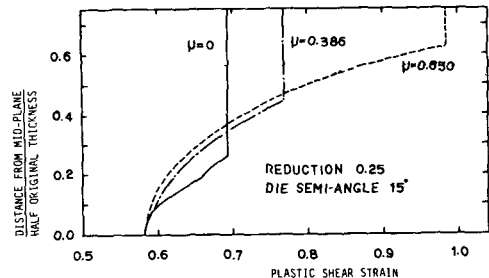
Thickness $H=2$ , Reduction 0.25, Friction coefficient 0.185									
Angles in Fig. 1 : $\theta_r=35^\circ$ , $\theta_d=15^\circ$ , $\theta_1=8.32^\circ$ , $\theta_2=33.32^\circ$									
$\alpha$	$\beta$	$x$	$y$	$R$	$S$	$v_\alpha$	$v_\beta$	$\dot{\gamma}$	$\sigma/k$
0.00	0.00	0.3918	0.3918	0.7913	0.5440	0.6311	0.9016	1.1087	-0.9067
	-2.00	0.4052	0.3779	0.8106	0.5540	0.5854	0.9228	1.0431	-0.8369
	-4.00	0.4181	0.3635	0.8299	0.5540	0.5393	0.9424	1.0077	-0.7671
	-6.00	0.4306	0.3487	0.8493	0.5540	0.4927	0.9604	0.9738	-0.6164
	-8.32	0.4443	0.3310	0.8717	0.5540	0.4382	0.9793	0.9383	-0.6164
10.00	0.00	0.4804	0.4974	0.7913	0.6921	0.7824	0.8284	0.8634	-0.5577
	-2.00	0.5000	0.4832	0.8155	0.6959	0.7410	0.8550	0.8212	-0.4879
	-4.00	0.5192	0.4682	0.8398	0.6997	0.6987	0.8801	0.7890	-0.4180
	-6.00	0.5380	0.4524	0.8643	0.7036	0.6558	0.9037	0.7584	-0.3482
	-8.32	0.5591	0.4333	0.8929	0.7080	0.6051	0.9293	0.7266	-0.2673
20.00	0.00	0.5494	0.6169	0.7913	0.8302	0.9187	0.7289	0.7130	-0.2086
	-2.00	0.5756	0.6041	0.8204	0.8387	0.8823	0.7603	0.6728	-0.1388
	-4.00	0.6015	0.5903	0.8498	0.8472	0.8449	0.7904	0.6435	-0.0690
	-6.00	0.6273	0.5754	0.8795	0.8557	0.8065	0.8193	0.6159	0.0008
	-8.32	0.6568	0.5569	0.9144	0.8657	0.7609	0.8510	0.5873	0.0818
33.32	0.00	0.6071	0.7911	0.7913	1.0142	1.0693	0.5608	0.5800	0.2563
	-2.00	0.6419	0.7832	0.8269	1.0302	1.0409	0.5976	0.5428	0.3261
	-4.00	0.6770	0.7740	0.8632	1.0463	1.0111	0.6334	0.5167	0.3959
	-6.00	0.7122	0.7635	0.9000	1.0626	0.9802	0.6682	0.4924	0.4658
	-8.32	0.7533	0.7495	0.9434	1.0816	0.9428	0.7071	0.4674	0.5467

결국 입구쪽 경계면 ADF에서 일정 간격의 점 이 각각의 유동경로를 따라 출구쪽 경계면 BEF로 나오 고 이때 미소 스트레인 증분의 합, 미소 시간의 합에서 구한 소성영역 통과시간, 좌표각과 반경으 로 부터 계산된 각점의 위치에서 스트레인 분포와 재료의 유동형태가 얻어진다.

### 5. 결과 및 고찰

Fig. 6은 다이반각  $\theta_d=15^\circ$ 와 단면감소율  $\delta=1-h/H=0.25$ 의 경우 여러 마찰계수에 대한 인발된 판재의 가공 스트레인 분포를 나타낸다. Fig. 7은 다이반각  $30^\circ$ 와 단면감소율 0.45에 대한 스트레인 분포를 보여준다. 예상한대로 중간면에서 표면

으로 나올수록 스트레인은 증가한다. 중간면의 스트레인은 감소성 경계를 통과할 때 만 발생한다. Fig. 1의 점 F의 각 좌표가  $(\alpha, \beta)=(\theta_2, -\theta_1)$ 이



**Fig. 6** Plastic shear strain distributions in the drawn strips for various friction coefficients

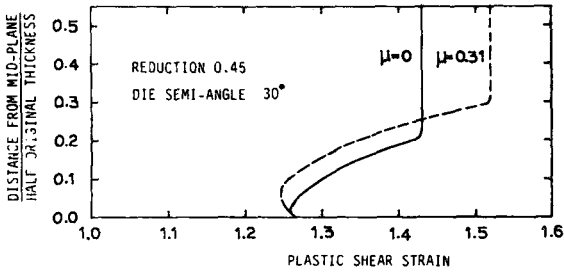


Fig. 7 Plastic shear strain distributions in the drawn strips for various friction coefficients

므로 이를 식 (18, 19)에 대입하고 더한다.

$$\gamma = H/h - h/H \quad (27)$$

여기서 중간면 스트레인은 마찰이나 다이각에 무관하고 단면감소율 만으로 결정된다. Fig. 6, 7에서 가공 스트레인이 일정한 표면층이 있고 그 두께는 마찰이 클수록 작다. 이들 스트레인 분포에서 평균 스트레인을 계산하고 단순 인장에서의 균일 변형 스트레인 값  $\gamma_e = 2\ln(H/h)$ 으로 나눈 값을 잉여 변형계수 (redundant deformation factor,  $\Phi$ )라 한다. Backofen<sup>(13)</sup>은 판재인발에 대해 경도분포로 부터 얻은 실험식을 제시했다.

$$\Phi = 0.79 + 0.21 \frac{\theta_d}{\delta} (2 - \delta) \quad (28)$$

단면 감소율  $\sigma = 0.25$ 와 다이반각  $\theta_d = 15^\circ$ 의 경우가 실험식의 값은  $\Phi = 1.748$ 이고 본 연구에서 계산된 값은 Table 2에 있는데 이는 다이면 마찰 계수  $\mu = 0.18$ 에 해당됨을 알수있다. 식 (28)에서 사용되는 재질이나 윤활 상태에 따라 달라질 수 있는 다이면 마찰을 고려하지 않았다. 실제로 둥근봉의 인발의 경우 Cetlin<sup>(12)</sup>의 문헌조사에서 여러 재질에 대해 식 (28)의 형태의 개별적인 실험식이 있음을 알 수 있다.

서론에서 기공의 성장 모델로부터 재료의 열림 형태 파괴 (opening mode fracture)를 예측하기 위한 식 (3)으로 표현된 파손함수가 제안되었다. 이식을 단면감소율 0.25와 다이반각  $15^\circ$ 의 판재인발에 적용하여 표면과 중간면에서의 파손함수 값을 비교한 것이 Table 1에 있다. 여기서 아주 큰 마찰 계수의 경우를 제외하면 중간면의 파손함수 값이 크다는 것을 알 수 있고 따라서 표면균열보다 중간면 균열이 가공성이 낮은 재료에 일어날 가능성이 크다. 여기서 가공성이란 균열 없이 가공할

Table 2 Redundant deformation factor and damage function value for strip drawing of reduction 0.25 through the die of semi-angle  $15^\circ$ .

Friction coefficient	Redundant deformation factor	Damage function value	
		Surface layer	mid-plane
0.0	1.1633	-0.021	0.110
0.185	1.1756	0.092	0.168
0.386	1.2077	0.206	0.223
0.650	1.2869	0.404	0.282

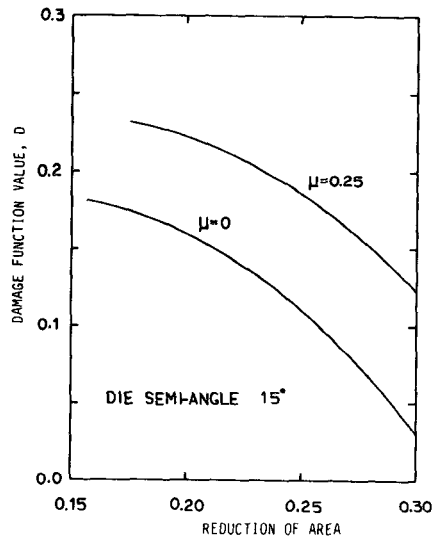


Fig. 8 Damage function value vs. reductions for strip drawing with die friction

수 있는 재료의 최대허용 파손함수  $D = D_c$ 를 의미한다. 중간면의 스트레인이 표면 스트레인 보다 작지만 중간면의 평균 수직응력 값이 크기 때문에 이곳의 파손함수 값이 크다. 판재인발의 성형성에 대한 중간면의 평균 수직응력 값의 영향은 일찍부터 인식되어 왔다. Fig. 3, 4에서 마찰이 클수록 중간면 응력은 증가하며 단면감소율이 작을수록 중간면 응력이 커진다. 중간면 균열에 대한 마찰과 단면감소율의 영향은 다이반각  $15^\circ$ 에 대해 Fig. 8과 다이반각  $30^\circ$ 에 대해 Fig. 9에 나타나있다. 중간면 응력과 마찬가지로 다이면 마찰이 클수록 단면감소율이 작을수록 중간면의 파손함수 값이 커진다. 이것은 Avitzur<sup>(16)</sup>의 상계해와 그의 실험의 경향과



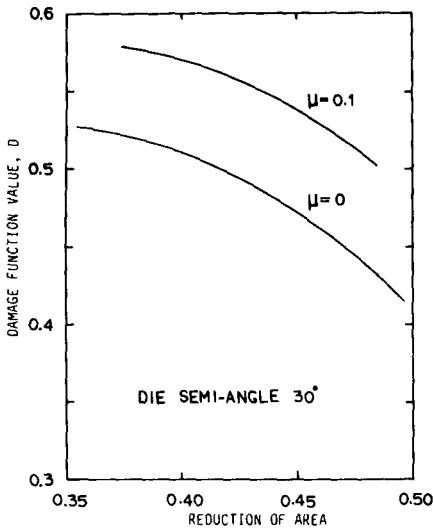


Fig. 9 Mid-plane damage function value vs. reductions for strip drawing with die friction

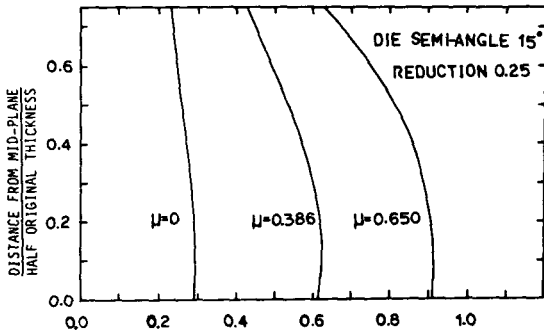


Fig. 10 Effect of friction on the distortions of transverse lines

일치한다. 즉 다이반각 8도의 다이로 1024탄소강의 원형봉을 6.6%단면 감소할 때 세브론 모양의 중간면 균열이 발생하였으나 같은 조건에서 22.4% 단면감소로 인발할 때에는 발생하지 않았다. 다이면 마찰은 식 (27)의 중간면 스트레인에 영향을 미치지 않지만 중간면 응력에 영향을 주어 마찰이 클수록 중간면 균열이 일어나기 쉽다. 이와같이 중간면 응력이 이곳의 균열에 직접적인 관련이 있지만 중간면 균열을 평균 수직응력 만의 조건으로 해석하는 것은 타당하지 않다. 예를들어 Fig. 8과 Fig. 9의 모든 경우는 중간면 평균응력  $\sigma$ 가 전단항복응력  $k$ 보다 작지만 그림 9의 다이반각 30도 일때가 그림 8의 15도에 비해 파손함수 값이 훨씬 크다. 그

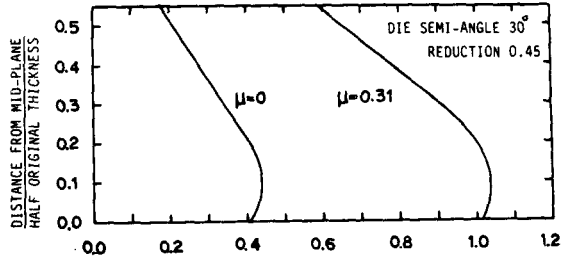


Fig. 11 Effect of friction on the distortions of transverse lines

래서 Fig. 9의 어떤 과정의 중간면 응력이 Fig. 8의 경우보다 작을지라도 전자의 파손함수 값이 크므로 중간면 균열의 가능성이 높다.

재료의 변형형태를 알기위해 가공전 두께방향의 유동에 수직인 단면의 변형된 모양이 유동경로 상의 소성영역 통과시간에서 계산되어 Fig. 10(다이 반각 15°, 단면감소율 0.25)과 Fig. 11(다이반각 30°, 단면감소율 0.45)에 주어졌다. 여기서 다이면 마찰에 의해 변형이 커짐을 알 수 있다.

### 6. 결 론

(1) 슬립라인장을 이용한 수치적 방법으로 판재의 인발가공 스트레인 분포와 잉여 변형계수가 계산되었다.

(2) 가공의 성장모델에 기초한 파손함수로 중간면 균열에 관련된 재료의 인발가공성을 정량적으로 판단할 수 있다. 즉 마찰이 클수록, 단면감소율이 작을수록, 다이 각이 클수록 파손함수 값은 증가한다.

(3) 다이면 마찰이 아주 큰 경우에 중간면 균열보다 표면균열의 가능성이 높다.

### 후 기

본 연구는 한국 과학재단의 1988년도 일반 연구비의 지원으로 수행되었으며 동재단에 사의를 표하는 바이다.

### 참 고 문 헌

- (1) Hill, R. and Tupper, S.J., 1948, "A New Theory of the Plastic Deformation in Wire Drawing", Journal

- Iron and Steel Inst., Vol. 159, pp. 353~359.
- (2) Rogers, H.C. and Coffin, Jr., L.F., 1971, "An Analysis of the Effect of Friction on Sheet Drawing", International Journal of Mechanical Science, Vol. 13, pp. 141~155.
- (3) Dodd, B. and Scivier, D.A., 1975, "On the Static Indmissibility of Some Slipline Fields for Sheet Drawing", International Journal of Mechanical Science, Vol. 17, pp. 663~667.
- (4) Dodd, B. and Kudo, H., 1980, "A Slipline Field for Mid-plane Cracking or Splitting in Sheet Drawing", International Journal of Mechanical Science, Vol. 22, pp. 67~71.
- (5) Johnson, W., Sowerby, R., and Venter, R.D., 1982, Plane Strain Slipline Field for Metal Deformation Processes, Pergamon Press, Oxford, pp. 85~92.
- (6) Chakrabarty, J., 1987, Theory of Plasticity, McGraw-Hill, New York, pp. 506~591.
- (7) McClintock, F.A., 1968, "A Criterion for Ductile Factice by the Growth of Holes", Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, Vol. 35, pp. 363~371.
- (8) Rice, J.R. and Tracey, D.M., 1969, "On the Ductile Enlargement of Voids in Triaxal Stress Fields", Journal of Mechanics and Physics of Solids, Vol. 17, pp. 201~217.
- (9) Budiansky, B., 1982, Hutchinson, J.W., and Slutsky, B., "The Mechanics of Solids," The Rodney Hill 60th Anniversary Volume, Pergamon Press, London, pp. 13~15.
- (10) Lemaitre, J., 1985, "A Continuous Damage Mechanics Models for Ductile Fracture",~ ASME Journal of Engineering Materials and Technology, Vol. 107, pp. 83~89.
- (11) Vujovic, V. and Shabaik, A.H., 1986, "A New Workability Criterion for Ductile Metals", ASME Journal of Engineering Materials and Technology, Vol. 108, pp. 245~249.
- (12) Cetlin, P.R., 1987, "Recundant Deformation Factor Evaluation Through the Stress-Strain Curves Superposition Method in Round Section Bar Drawing-A Literature Analysis", ASME Journal of Engineering Materials and Technology, Vol. 109, pp. 272~275.
- (13) Hill, R., 1950, The Mathematical Yheory of Plasticity, Oxford Press, London, pp. 140~151.
- (14) Ewing, D.J.F., 1967, "A Series Method for Constructing Plastic Slipline Fields", Journal of Mechanics and Physics of Solids, Vol. 15, pp. 105~114.
- (15) Backofen, W.A., 1972, Deformation Processing, Addison-Wesley Pub., Reading, Ma., pp. 137~141.
- (16) Avitzur, R., 1969, "Analysis of Central Bursting Defects in Extrusion and Wire Drawing", ASME Journal of Engineering for Industry, Vol. 90, p. 79.