

<論 文>

수평원관 주위에서 가열 벽면을 고려한 상변화 열전달 해석

이윤표* · 유호선** · 김민수* · 노승탁***

(1989년 7월 27일 접수)

Analysis of the Phase Change Heat Transfer around a Horizontal Cylinder Considering the Conducting Wall

Yoon Pyo Lee, Hoseon Yoo, Min Soo Kim and Sung Tack Ro

Key Words: Phase Change(상변화), Moving Boundary Problem(이동경계문제), Initial Condition(초기조건), Coordinate Transformation(좌표변환), Molten Mass Fraction(용해질량비)

Abstract

Analysis on the phase change heat transfer around a horizontal cylinder was carried out considering the conducting wall. Numerical simulation was performed for the combined system composed of the phase change material and the wall with finite thickness. This system was adopted in order to remove the irrationality when a thin liquid layer should be arbitrarily assumed by conduction at the initial stage of calculation. Governing equations were transformed with the time dependent boundary-fitted coordinate system, and discretized with the power-law scheme. The molten mass fraction and the average wall and interface Nusselt numbers were obtained as a function of time for various Rayleigh numbers. The calculated results show that there exist peaks of the Nusselt numbers at early stage and the time for the peak is retarded as the thermal conductivity of the wall material decreases. The melting rate increases as the Rayleigh number becomes higher.

기 호 설 명

c : 비열

Fo : Fourier수, $Fo = \alpha t / R_{wo}^2$

g : 중력 가속도

h_f : 잠열

J : Jacobian

k : 열전도율

n : 법선 방향 길이

Nu : Nusselt수, $Nu = hR_{wo}/k$

R : 수평원관의 반경

Ra : Rayleigh 수, $Ra = \frac{\beta_T g R_{wo}^3 (T_h - T_f)}{\alpha_i \nu_i}$

Ste : Stefan 수, $Ste = \frac{c_i (T_h - T_f)}{h_f}$

T : 온도

t : 시간

u, v : 속도 성분

X : 상변화면의 이동 거리

x, y : 좌표계

α, β, γ : 좌표 변환과 연관된 metric 계수

α_i : 액체의 열확산계수

β_T : 액체의 열팽창계수

Γ : 영역의 경계

*정회원, 서울대학교 대학원

**정회원, 경상대학교 공과대학 기계공학과

***정회원, 서울대학교 공과대학 기계공학과

- v : 동점성계수
 ω : 와도
 ϕ, χ : 좌표변환과 관련된 함수
 ψ : 유동함수
 ρ : 밀도
 τ : 무차원시간, $\tau = Ste \cdot Fo$
 θ : 무차원 온도, $\theta = \frac{(T - T_f)}{(T_h - T_f)}$
 ξ, η : 변환된 좌표계

참 자

- f : 융점
 h : 가열면
 i : 상변화면, 내측
 l : 액상
 o : 외측
 w : 벽면
 x, y, ξ, η, τ : 편미분

1. 서 론

열이 전달됨에 따라 물질이 고상에서 액상으로, 또는 액상에서 고상으로 상이 변화하는 상변화문제는 상변화의 경계가 시간에 따라 이동하는 대표적인 이동경계문제 중의 하나이다. 따라서 상변화문제는 식의 형태가 포물선형이며 경계조건과 초기조건으로부터 다음 시간스텝의 해가 축차적으로 결정되어야 한다.

대부분의 상변화 문제에서는 액상 또는 고상이 균일한 온도에 있다가 순간적으로 외부 경계가 상변화 온도보다 높거나 낮은 온도로 변할 때 물질내의 온도 변화와 상이 변화하는 경계의 위치를 시간의 함수로 구한다. 융해의 경우, 외부 경계의 온도가 융점보다 높게 순간적으로 바뀌어 유지되면 경계 주위에서는 융해가 시작된다. 이때, 자연대류가 열전달에서 중요한 비중을 차지한다는 것은 잘 알려져 있다. 그러나 초기에는 모든 영역이 고상만으로 이루어져 있으므로 유동의 계산이 불가능하여 흔히 적당한 시간 동안은 열전달이 전도에 의한 것만으로 취급하고 있으며, 이러한 계산에서는 상변화 물질 중의 일부가 액상으로 존재한다고 가정하고 있다⁽¹⁾. 또한 대부분의 상변화 물질의 열전도율은 그 값이 작아서 실제 실험에서는 경계의 온도를 순간적으로 낮추는 것이 불가능하다.

따라서, 본 논문에서는 비교적 많은 계산이 수행되어온 수평원관 주위의 상변화열전달 문제⁽²⁻⁶⁾를 예로 들어, 상변화 물질이 유한한 열전도율을 갖는 일정 두께의 원관 주위에 존재할 때의 상변화 문제에 대하여 초기 액상의 영역을 임의로 가정하는 불합리점을 제거하고 문제를 풀 수 있는 수치해석 방법을 제시하고자 한다.

2. 융해과정의 공식화

2.1 상변화 초기의 액상 영역을 가정할 때의 문제점

일반적인 포물선형 방정식과 마찬가지로 상변화 열전달문제를 해석할 때에도 초기조건으로부터 시간을 증가시켜가며 다음 시간스텝을 계산하여야 한다. 상변화문제에서 액상만을 고려할 때에 융해가 진행되지 않은 초기에는 액상이 존재하지 않으므로 해석의 영역이 정의될 수 없으며 따라서 대단히 짧은 시간 동안 순수 열전도에 의해 융해가 진행된 것으로 가정하여 초기 영역을 결정한 후에 계산을 진행시켜 왔다. 그러나 이러한 초기 액상 영역의 가정에 의한 계산 진행 방법은 많은 문제점을 내포하고 있다. 구체적으로 Fig. 1에 나타난 수평원관 주위의 상변화 열전달문제를 해석할 때를 예로 들기로 한다. 수평원관 주위에 고상의 상변화물질이 존재하여 고상과 원관 벽면의 온도가 모두 상변화 온도인 T_f 로 유지되어 있을 때 임의의 시간 t_0 에서 벽면 전체의 온도가 상변화온도보다 높은 T_h 로 상승된다. 이 경우 벽면이 가열된 초기에는 아직 액상이 존재하지 않으므로 계산영역을 정하는 데에 어려움이 있다. 따라서 $r=R_i$ 까지 고상의 상변화 물질이 액상으로 바뀌었으며 이때의 열전달은 전도

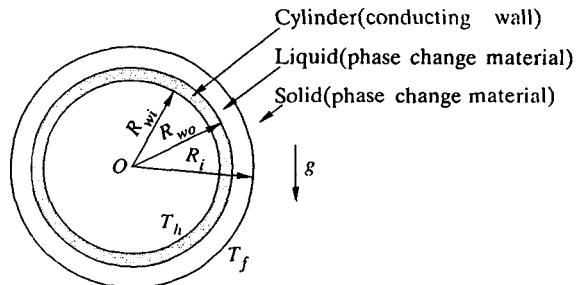


Fig. 1 Physical model of phase change problem around a horizontal cylinder

만으로 이루어졌다고 가정한다. 이 경우, 액체내의 온도분포는 전도방정식의 해로서 다음과 같이 주어진다.

$$\frac{(T - T_h)}{(T_f - T_h)} = \frac{\ln r/R_{wo}}{\ln R_f/R_{wo}} \quad (1)$$

이 식에서 하첨자 f 는 상변화면을 나타낸다. 상변화면의 이동속도 \dot{X}_f 는 식 (1)을 이용하여

$$h_f \rho \dot{X}_f = -k_l \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{r=R_f} \quad (2)$$

로부터 계산한다. 식 (1)에 의하여 구한 액상내의 온도분포는 이후의 응해 과정의 계산에서 초기조건으로 사용된다.

그러나 전도만에 의해서 초기의 상변화가 일어났다고 가정했을 때 원관의 중심으로부터 초기 상변화면까지의 거리 R_i 를 가정하는 특별한 근거는 없으며 계산모델에 대해서 일정하지도 않다. 열전도에 의한 해를 적용하고 원관 중심으로부터 초기 상

변화면까지 거리와 원관 외경의 비인 R_i/R_{wo} 를 각각 1.1과 1.2로 다르게 가정한 경우 동일한 시간이 경과하였을 때의 온도장을, Fig. 2 (a)와 (b)에 나타내었고, Fig. 3 (a)와 (b)는 같은 경우의 속도장을 각각 나타낸 것이다. 두 경우 모두 열전도에 의한 초기 상변화 경계면까지의 영역의 크기를 어떻게 가정하는가에 따라 이후의 온도와 속도가 다르게 됨을 보여준다. 즉 동일한 시간을 기준으로 볼 때 유동 효과를 좀 더 일찍부터 고려한 $R_i/R_{wo}=1.1$ 로 가정한 경우가 1.2로 가정한 경우보다 마치 자연대류가 더욱 발달한 것으로 계산된다. 전도에 의한 초기의 상변화가 조금 진행되었다고 가정한 경우가 많이 진행되었다고 가정한 경우보다 유동이 더 활발한 것으로 계산된다. 따라서 원관상부의 벽면과 접한 액상에서의 온도기울기는 $R_i/R_{wo}=1.1$ 인 경우가 더 크게 되어 원관벽면에서 열전달량을 나타내는 무차원수인 국소 Nusselt 수 Nu_w 는 Fig. 4에서와 같이 원관상부에서 더 낮게 나타난다. Fig. 4는 벽면에서의 국소 Nusselt 수를 각도의 함수로서 나타내어 전도로 가정하는 초기 응해 영역의 크기에 따른 영향을 비교한 것이다. 한편 상경계면에서의 국소 열전달 계수 Nu_i 는 Fig. 5에 나타내었다. 이 값은 벽면에서와는 달리 $R_i/R_{wo}=1.1$ 인 경우가 상부 상변화경계면에서 더 크게 나타난다. 이 결과 원관중심에서 상변화면까지의 거리와 외경의 비는 Fig. 6에 나타낸 바와 같이 R_i/R_{wo}

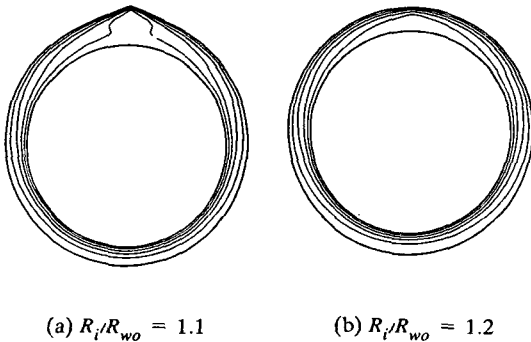


Fig. 2 Effect of the initially assumed interface on the temperature fields for the case that $Ra=1 \times 10^6$ and $\tau=2.5 \times 10^{-2}$

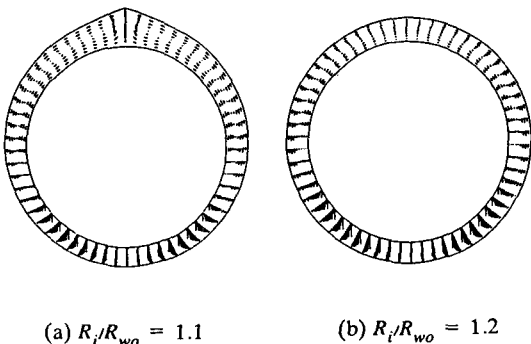


Fig. 3 Effect of the initially assumed interface on the velocity fields for the case that $Ra=1 \times 10^6$ and $\tau=2.5 \times 10^{-2}$

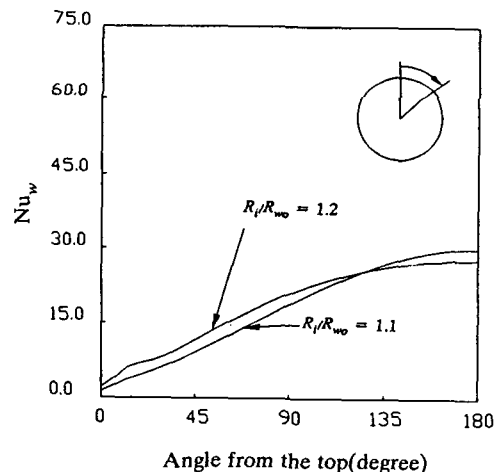


Fig. 4 Effect of the initially assumed interface on the local wall Nusselt number at $\tau=2.6 \times 10^{-2}$ for $Ra=1 \times 10^6$

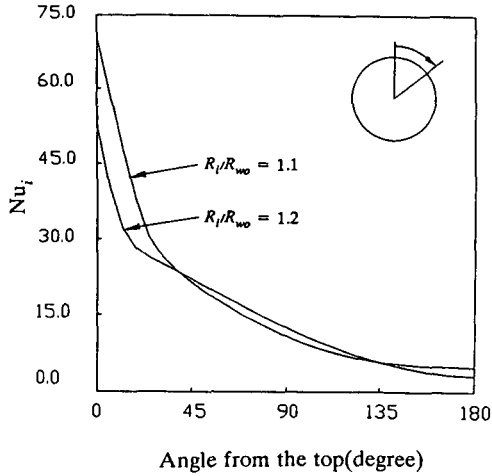


Fig. 5 Effect of the initially assumed interface on the local interface Nusselt number at $\tau = 2.6 \times 10^{-2}$ for $Ra = 1 \times 10^6$

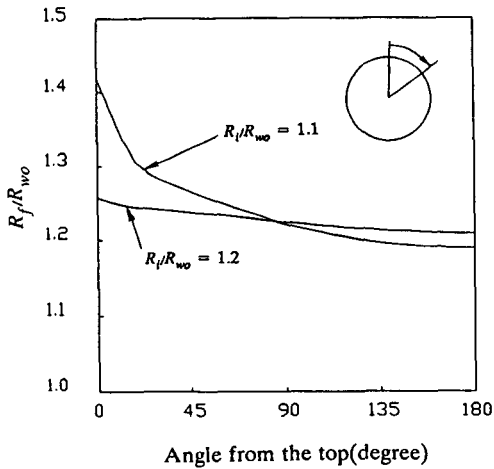


Fig. 6 Effect of the initially assumed interface on the local interface distance R_f relative to the outside radius of wall R_{w0} at $\tau = 2.6 \times 10^{-2}$ for $Ra = 1 \times 10^6$

$R_{w0} = 1.1$ 인 경우에 원주방향에 따른 변화가 더욱 크게 계산된다. 이와 같이 초기 전도해를 적용하는 상변화면까지의 거리와 외경의 비 R_i/R_{w0} 를 어떻게 가정하여 주는가에 따라 해석의 결과가 달라진다.

따라서 어떤 모델에 대해 상변화 계산을 수행하려 할 때는 초기 상변화면까지의 거리비 R_i/R_{w0} 를 여러 가지로 다르게 설정하여 계산의 결과에 별로 영향을 주지 않는 R_i 값을 찾는 작업을 수행한다.

그러나 상변화경계면의 이동속도 및 상경계면 형상이 매우 중요한 급속 응고 등의 문제를 해석하고자 할 때는 전도에 의해 상변화가 진행되었다고 보는 초기영역을 어느 정도로 가정하여야 하는 지에 대한 특별한 기준이 없다. 이 때 만약 초기부터 대류가 발생하지 않고 어느 정도 열전달이 진행된 후부터 대류가 발생한다면 이 시점까지 전도의 해를 적용할 수 있을 것이나 대개의 상변화물질은 액상과 고상의 밀도차이로 인해 응해가 시작되는 순간부터 액상내에 유동이 형성된다고 보는 것이 타당하므로 전도해를 적용할 수 있는 초기 상변화면까지의 거리는 짧을수록 좋다. 그러나 이 R_i/R_{w0} 를 너무 작게 잡으면 계산상에서 외측 벽면의 T_h 와 상변화경계면의 T_f 가 인접해 있어 계산값의 수렴이 어렵다. 또한 실제 자연현상에서도 유한한 열용량을 가진 벽의 온도가 한 순간에 T_h 로 올라간다는 가정은 타당하지 않다.

2.2 가열 벽면을 고려한 응해과정의 공식화

본 논문에서는 앞에 서술된 문제점을 피하기 위해 벽 내부의 온도변화를 고려하여 이 벽면의 온도 기울기로부터 최초 상변화면을 결정하는 방법을 도입한다. 해석의 편의상 액상과 고상의 밀도차는 고려하지 않는다.

유한한 열용량을 가진 벽 전체의 온도가 순간적으로 T_h 로 올라가는 것은 불가능하며 따라서 상변화물질과 접하지 않은 원관내부 R_{wi} 의 온도만 어느 순간 T_h 로 올라갔다고 가정한다. 계산초기에는 원관 내벽면이 아닌 벽면 전체의 온도는 T_f 로 거의 균일하여 상변화물질과 접한 벽면에서의 온도기울기는 매우 작으므로 벽면에서 고상으로의 열전달량 또한 잠열에 비해 매우 작다. 따라서 아직 상변화는 일어나지 않으므로 액상은 존재하지 않는다. 이 때의 지배방정식은 원관벽면의 열전도방정식으로 직교좌표계로 표시할 때 (Fig. 7 참조),

$$\frac{\partial T_w}{\partial t} = \alpha_w \left(\frac{\partial^2 T_w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_w}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

만이 되며 R_{wi} 에서 온도는 T_h 로 고정된다.

벽면의 온도분포는 시간이 경과함에 따라 전반적인 온도가 상승하여 고상과 접한 벽면의 온도기울기가 어느 정도 형성되어서 이 열이 유한한 양 만큼의 고상을 액상으로 바꾸는 잠열에 해당할 때 최초의 액상을 형성시킨다. 즉 상변화경계면의 이동속도를 \dot{X}_f , 잠열을 h_f 라 할 때 R_{w0} 에서 상변화면

이 형성될 조건은 다음과 같다.

$$-k_w \frac{\partial T_w}{\partial n} \Big|_{r=R_{wo}} \geq h_f \rho \dot{X}_f. \quad (4)$$

이를 차분화의 형태로 다시 쓰면

$$-k_w \frac{\Delta T_w}{\Delta n} \Big|_{r=R_{wo}} \geq h_f \rho \frac{\Delta X_f}{\Delta t} \quad (5)$$

이 되며 벽면에서의 열전달량이 증가하여 위 식을 만족할 때 최초의 액상이 형성된다. 이 때 \dot{X}_f 를 무한히 작게 잡으면 원관 내벽 온도가 T_h 로 올라간 직후 상변화면이 형성된다고 볼 수도 있으나 원래 수치해석이 연속적인 자연현상을 유한한 시간스텝으로 나누어 계산하는 것이므로 Δt 동안에 유한한 양인 ΔX_f 정도의 액상을 형성시킬 수 있는 온도기울기를 가질 때까지 액상은 형성되지 않는 것으로 가정한다. 이 때 ΔX_f 는 매우 작은 값이 선택되어도 형성된 액상 내의 온도분포가 거의 상변화온도로 균일하므로 수렴에 대한 불안정은 일어나지 않는다.

일단 액상이 형성되면 계산의 영역은 벽면과 액상이 된다. 따라서 지배방정식도 벽 내부의 에너지 방정식과 액상의 연속방정식, 운동량방정식, 에너지 방정식이 되며 Boussinesque 근사와 운동량방정식에서 압력항을 소거하고 와도-운동량수방정식으로 변환하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{D\omega}{Dt} = \nu_i \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) + \beta \tau g \frac{\partial}{\partial x} (T - T_f), \quad (6)$$

$$-\omega = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \quad (7)$$

$$\frac{DT}{Dt} = \alpha_i \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right). \quad (8)$$

액상과 인접한 벽면의 경계조건은 벽면에서 공급된 열이 모두 액상으로 전달되고 벽면과 액상과의 열 접촉 저항을 무시한다면

$$-k_w \frac{\partial T_w}{\partial n} \Big|_{r=R_{wo}} = -k_l \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{r=R_{wo}}, \quad (9)$$

$$T_w \Big|_{r=R_{wo}} = T \Big|_{r=R_{wo}} \quad (10)$$

이 된다. 상변화면의 진행에 관한 식은 액상에서 전달된 열이 상변화면의 이동에 필요한 잠열에 쓰이며 상변화는 일정온도 T_f 에서 일어난다고 가정하면

$$h_f \rho \dot{X}_f = -k_l \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{r=R_f} \quad (11)$$

이 된다.

해석에 일반성을 부여하기 위해 지배방정식을 무차원화한다. 길이에 대한 특성길이를 원관의 외부

반경 R_{wo} 로 잡으면 무차원 변수는 다음과 같이 정의된다.

$$(x^*, y^*) = (x, y) / R_{wo}, \quad (12a)$$

$$(u^*, v^*) = (u, v) / R_{wo} / \alpha_i, \quad (12b)$$

$$\theta = (T - T_f) / (T_h - T_f), \quad (12c)$$

$$\theta_w = (T_w - T_f) / (T_h - T_f), \quad (12d)$$

$$\omega^* = \omega R_{wo}^2 / \alpha_i, \quad \psi^* = \psi / \alpha_i, \quad (12e,f)$$

$$Pr = \nu_i / \alpha_i, \quad (12g)$$

$$Ra = \beta \tau g R_{wo}^3 (T_h - T_f) / \alpha_i \nu_i, \quad (12h)$$

$$Ste = c_l (T_h - T_f) / h_f, \quad (12i)$$

$$Fo = \alpha_i t / R_{wo}^2, \quad \tau = Ste \cdot Fo. \quad (12j,k)$$

위 무차원 변수를 이용하여 식 (6), (7), (8)의 지배방정식을 무차원화하면

$$Ste \frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y} = Pr \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) + Ra \cdot Pr \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega, \quad (14)$$

$$Ste \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (15)$$

이 된다. 위 식에서 무차원 변수를 나타내는 상첨자는 생략하였다.

벽 내부의 전도방정식은 위의 무차원 변수들을 함께 사용하여

$$Ste \frac{\partial \theta_w}{\partial \tau} = \frac{\alpha_w}{\alpha_i} \left(\frac{\partial^2 \theta_w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial y^2} \right) \quad (16)$$

이 되고 액상이 최초로 형성되는 식 (5)를 무차원화하여 상변화경계면의 이동거리를 계산하면

$$X_f = x_{wo} - \frac{k_w}{k_l} \frac{\partial \theta_w}{\partial n} d\tau \quad (17)$$

이 된다. 액상이 최초로 형성된 후 상변화면의 이동에 관한 식 (11)을 무차원화하여 벡터식으로 표시하면

$$\dot{X} \cdot \mathbf{n} = -\tau \theta \cdot \mathbf{n} \quad (18)$$

이 된다.

3. 좌표변환

3.1 경계밀착 좌표계

경계밀착 좌표계는 해석하고자 하는 실제 영역의 모든 경계가 좌표선과 일치하는 곡선 좌표계로서⁽⁷⁾, 좌표변환에 의한 상변화 과정 해석에 이용된 바 있다⁽⁸⁾.

상변화문제는 상경계면의 이동으로 말미암아 해

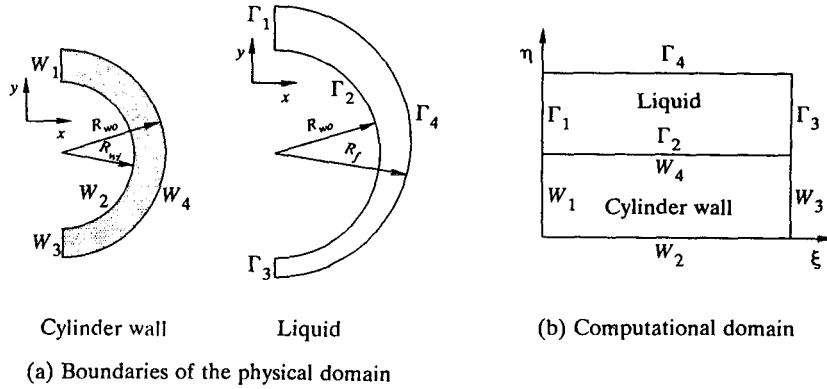


Fig. 7 Boundaries of the physical domain and the transformed computational domain

석대상 영역의 경계가 이동한다. 따라서 실제영역 (physical domain)을 계산이 편리하게 수행될 수 있는 계산영역 (computational domain)으로 좌표변환하여 계산을 수행하는 것이 편리하다. 원관은 좌우가 대칭이므로 원관의 반쪽만을 고려한다면 원관 벽면의 경계는 Fig. 7의 (a)에서 W_1, W_2, W_3, W_4 로 구분될 수 있으며 액상의 형성에 따라 액상의 네 경계는 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ 로 구분할 수 있다. 이를 계산영역으로 좌표변환된 형태는 Fig. 7의 (b)와 같다. 본 해석과 같이 두 개의 서로 다른 영역, 즉 액상과 벽면 두 개의 영역이 연결되어 경계에서 에너지 균형식을 적용할 때에는 비록 계산영역으로 변환한 후 계산영역에서 인접한 두 영역의 격자가 연속적이라고 하여도 실제영역에서 연속하지 않으면 에너지균형식을 적용하는데 무리가 있다. 따라서 실제영역에서 격자배치가 액상과 벽면의 경계에서 극소적으로 수직하도록 격자를 배치하는 것이 필요하

다. 본 연구에서 선정한 격자계를 Fig. 8에 나타내었다.

일정시간에서 (x, y) 좌표로 정의된 실제영역을 (ξ, η) 좌표로 정의된 계산영역으로 사상할 때 (x, y) 와 (ξ, η) 사이의 격자생성식을 유도하면

$$\alpha(x_{\xi\xi} + \phi x_{\xi}) - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma(x_{\eta\eta} + \chi x_{\eta}) = 0, \quad (19a)$$

$$\alpha(y_{\xi\xi} + \phi y_{\xi}) - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma(y_{\eta\eta} + \chi y_{\eta}) = 0 \quad (19b)$$

가 된다⁽⁹⁾. 식 (19a,b)에서 α, β, γ 및 ϕ, χ 는 각각 좌표변환 및 경계에서의 격자 간격을 영역내부까지 유지시키는 데 필요한 함수들로 다음과 같이 정의된다.

$$\alpha = x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2, \quad (20a)$$

$$\beta = x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta}, \quad (20b)$$

$$\gamma = x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2, \quad (20c)$$

$$\phi = -(x_{\xi}x_{\xi\xi} + y_{\xi}y_{\xi\xi}) / (x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2), \quad (21a)$$

$$\chi = -(x_{\eta}x_{\eta\eta} + y_{\eta}y_{\eta\eta}) / (x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2) \quad (21b)$$

로 정의된다.

3.2 지배방정식의 변환

본 연구에서는 벽면의 영향을 고려하여 초기에 액상영역이 형성되는 경우를 해석에 포함시킨다. 따라서 이 때에는 상변화면의 이동속도가 큰 값을 지니므로 상경계면의 이동속도가 해석에 포함되는 것이 필요하다. 경계의 이동이 반영될 수 있는 시간의존 좌표계를 이용하여 좌표변환하면 아래와 같이 된다⁽¹⁰⁾.

$$\begin{aligned} Ste(J\omega)_{\tau} + (\hat{u}\omega)_{\xi} + (\hat{v}\omega)_{\eta} = Pr [& (\frac{\alpha}{J}\omega_{\xi})_{\xi} \\ & - (\frac{\beta}{J}\omega_{\eta})_{\xi} + (\frac{\gamma}{J}\omega_{\eta})_{\eta} - (\frac{\beta}{J}\omega_{\xi})_{\eta}] \\ & + Ra \cdot Pr [(y_{\eta}\theta)_{\xi} - (y_{\xi}\theta)_{\eta}], \end{aligned} \quad (22)$$

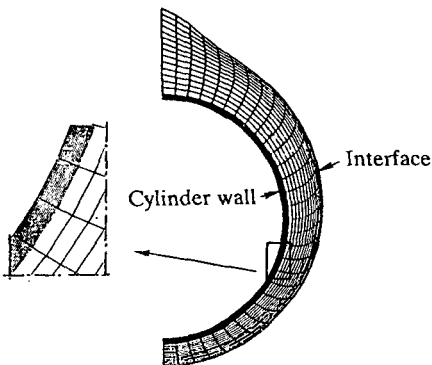


Fig. 8 Grid systems of the present study

$$-J\omega = \left(\frac{\alpha}{J}\psi_\epsilon\right)_\epsilon - \left(\frac{\beta}{J}\psi_\eta\right)_\epsilon + \left(\frac{\gamma}{J}\psi_\eta\right)_\eta - \left(\frac{\beta}{J}\psi_\epsilon\right)_\eta, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} Ste(J\theta)_\tau + (\hat{u}\theta)_\epsilon + (\hat{v}\theta)_\eta &= \left(\frac{\alpha}{J}\theta_\epsilon\right)_\epsilon \\ &- \left(\frac{\beta}{J}\theta_\eta\right)_\epsilon + \left(\frac{\gamma}{J}\theta_\eta\right)_\eta - \left(\frac{\beta}{J}\theta_\epsilon\right)_\eta. \end{aligned} \quad (24)$$

여기서 속도성분 (\hat{u}, \hat{v}) 는

$$\hat{u} = y_\eta(u - Ste x_\tau) - x_\eta(v - Ste y_\tau), \quad (25a)$$

$$\hat{v} = x_\epsilon(v - Ste y_\tau) - y_\epsilon(u - Ste x_\tau) \quad (25b)$$

이며 x_τ, y_τ 는 상변화면의 이동속도를 나타낸다. 마찬가지로 벽면 내부의 열전도방정식을 좌표변환하면

$$\begin{aligned} Ste(\theta_w)_\tau &= \frac{\alpha_w}{\alpha_t} \left[\left(\frac{\alpha}{J}\theta_{w\epsilon}\right)_\epsilon - \left(\frac{\beta}{J}\theta_{w\eta}\right)_\epsilon \right. \\ &\left. + \left(\frac{\gamma}{J}\theta_{w\eta}\right)_\eta - \left(\frac{\beta}{J}\theta_{w\epsilon}\right)_\eta \right] \end{aligned} \quad (26)$$

이 된다.

4. 수치 계산

4.1 지배방정식의 수치근사

적절히 선정한 계수를 c_1, \dots, c_5 라 하고 생성함을 S 로 표시할 때 각 영역의 좌표변환된 지배방정식의 각 항들을 적절히 재배열하면 모두 다음과 같은 하나의 꼴로 표시할 수 있다.

$$(c_1 J f)_\tau + (c_2 u f - c_4 f_\epsilon)_\epsilon + (c_3 v f - c_5 f_\eta)_\eta = S \quad (27)$$

여기서 f 는 대표 종속변수로서 액상에선 와도 ω , 유동함수 ψ , 온도 θ 이며, 벽 내부의 영역에선 벽 내부의 온도 θ_w 가 된다.

공간좌표에 대해서 근사시키는 방법은 유한한 체적에 대한 검사체적 근사 방법⁽¹¹⁾을 적용하는 것이 일반적이며, 대류항과 확산항의 상대적 크기에 따라 수치해의 불안정성을 보정할 수 있는 power-law 기법을 사용하였다.

4.2 경계조건

Fig. 7에서 볼 수 있는 바와 같이 경계는 다음과 같이 구분된다. 즉 액상에서 Γ_1 은 상부대칭면, Γ_2 는 원관 외벽면, Γ_3 는 하부대칭면, Γ_4 는 상변화면이며 원관벽면에서는 W_1 이 상부대칭면, W_2 는 T_h 인 원관 내벽면, W_3 는 하부대칭면, W_4 는 상변화 물질과의 접촉면이 된다.

초기에 벽면 W_4 에서의 열전달량이 충분하지 않

아 아직 상변화가 일어나지 않을 때는 고상과 벽면이 직접 접촉하므로 벽면의 경계조건은

$$W_1, W_3 : \nabla \theta_w \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (28a)$$

$$W_2 : \theta_w = 1, \quad (28b)$$

$$W_4 : \theta_w = 0 \quad (28c)$$

이 된다. 이 때 고상 내에선 과냉이 없이 T_f 로 균일하므로 고상 내의 온도분포는 고려할 필요가 없다. 그러나 벽면의 W_4 부근의 온도기울기가 커져서 열유속이 증가하면 액상이 형성된다. 액상이 형성된 후의 액상 내의 온도에 관한 경계조건은

$$\Gamma_1, \Gamma_3 : \nabla \theta \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (29a)$$

$$\Gamma_2 : \nabla \theta \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_2} = \frac{k_w}{k_1} \nabla \theta_w \cdot \mathbf{n}|_{W_4}, \quad \theta = \theta_w \quad (29b)$$

$$\Gamma_4 : \theta = 0 \quad (29c)$$

이 된다. 유동함수의 경계조건은 밀도차를 고려하지 않았으므로 상변화경계면에서 밀도차에 의한 체적 발생원이 없다고 가정하여 기준값 0으로 두었으며 상하 대칭면과 원관벽면에서도 기준값인 0으로 두었다. 와도에 대한 경계조건은 대칭면에서의 정의로부터 구하여지며 Γ_2, Γ_4 에서는 인접격자에서의 계산된 유동함수의 값들로부터 구해진다. 따라서 와도에 대한 좌표 변환된 경계조건은 아래와 같다.

$$\Gamma_1, \Gamma_3 : \omega = 0, \quad (30a)$$

$$\Gamma_2, \Gamma_4 : \omega = -2 \left(\frac{\gamma}{J^2}\right) (\psi_{nw} - \psi_{sw}). \quad (30b)$$

여기서 하첨자 nw 는 경계에 수직인 인접격자점이며, 하첨자 sw 는 경계의 격자를 가리킨다.

액상이 생성된 후 벽에서의 경계조건 중 W_4 의 온도는 식 (29b)에서 계산된 액상의 온도와 일치시킨다. 상변화된 이동속도벡터 \dot{X} 의 성분 (x_τ, y_τ) 은

$$\begin{bmatrix} x_\tau \\ y_\tau \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} \quad (31)$$

이 되며 상변화면의 온도는 상변화온도로 일정하게 유지된다고 가정하면 상변화면의 ξ 방향 온도구배 θ_ϵ 는 0이다. 따라서 상변화면의 이동속도는 좌표변환하면

$$\begin{bmatrix} x_\tau \\ y_\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y_\epsilon \theta_\eta}{J} \\ -\frac{x_\epsilon \theta_\eta}{J} \end{bmatrix} \quad (32)$$

가 된다.

4.3 계산 방법

미지수가 액상의 θ, ω, ψ , 벽면 내부의 온도

θ_w , 상변화면 이동속도 x_r, y_r 이므로 하나의 시간 스텝 내에서 해를 구하는 과정은 다음과 같다. 즉 앞 시간스텝의 정보에서 x_r, y_r 를 구하고 $\Delta\tau$ 를 곱하여 새로운 경계위치 결정한다. 새로운 액상영역에 대한 격자를 생성한 후 벽면의 온도분포 및 액상의 온도-와도-유동함수를 계산한다. 이때 수렴조건을 만족하면 벽면의 상변화물질과 접한 벽면 W_4 의 온도를 계산함으로써 이번 계산시스템에서의 계산을 완료한다. 벽 영역은 변화하지 않으므로 격자를 매번 새로 생성할 필요가 없다. 각 영역에서 격자수는 31×15 로 고정하였으며 $\Delta\tau$ 도 1×10^{-4} 로 고정하였다. 지배방정식이 비선형이므로 Relaxation Factor는 0.2로 취했다. 실제 계산에 사용한 상변화 물질의 물성치는 그 값이 비교적 잘 알려진 n-Octadecane의 물성치를 사용하였으며 벽면은 구리, 철, 유리 및 PVC로 바꾸어 가며 계산을 수행하였다.

5. 결과 및 검토

5.1 특성인자의 정의

계산의 결과는 특성인자를 정의하여 비교하면 편리하므로 가열면 및 상변화면에서의 열전달계수, 용해질량비 등을 아래와 같이 정의하였다. 즉 열전달량을 나타내는 열전달계수 h 는 순수 전도에 대한 대류의 상대적인 크기인 Nusselt 수로 무차원화할 수 있으며 벽면과 상변화면에서 열전달면의 길이 $l(\tau)$ 에 대한 평균 Nusselt 수 $\overline{Nu}_w, \overline{Nu}_i$ 는 무차원화하여 좌표변환하면

$$\overline{Nu}_w = \frac{1}{l_w(\tau)} \int \left(\frac{\gamma}{j} \theta_n \right)_w d\xi, \quad (33a)$$

$$\overline{Nu}_i = \frac{1}{l_i(\tau)} \int \left(\frac{\gamma}{j} \theta_n \right)_i d\xi \quad (33b)$$

이 된다.

용해질량비는 원관자체의 면적으로 무차원화하여 다음과 같이 정의하였다.

$$r_f = \frac{1}{\pi R_{wo}^2} \int_A dx dy. \quad (34)$$

5.2 상변화경계면의 형상 및 온도분포

Rayleigh 수가 5×10^6 이고 벽면이 구리인 경우에 시간에 따른 상변화면의 형상 및 온도장의 변화를 Fig. 9에 나타내었다. 시간이 별로 경과하지 않은 경우는 온도장과 상변화면이 모두 동심원을 이루나 시간이 경과할수록 온도장에서 원관상부 상변화면 부근의 온도기울기가 급격해지며 액상의 영역도 더욱 넓어진다. 이는 원관벽면에서의 가열로 인해 액상 내에 자연대류가 발생하여 벽면근처에서 원관상부로 상승한 액체가 상변화면으로 이동한 후 고상으로 잠열의 형태로 열을 빼앗기고 온도가 낮아져 하강하기 때문이다.

5.3 Rayleigh 수의 영향

Fig. 10은 Rayleigh 수를 변화시켰을 때 시간 경과에 따른 원관 외벽면에서의 평균 Nusselt 수를 나타낸 것이다. 벽면이 존재함으로써 상변화 물질 이외에 또 하나의 열전도 영역이 추가될 때 Nusselt 수의 시간에 따른 변화의 특징은 초기에 극대값을 갖는다는 것이다. 모든 Rayleigh 수에 대하여 상변화 물질과 접한 R_{wo} 의 온도가 낮을 때는 액상의 영역도 작으며 벽면과 접한 액상의 온도 기울기도 거의 균일하여 벽면에서의 평균 Nusselt

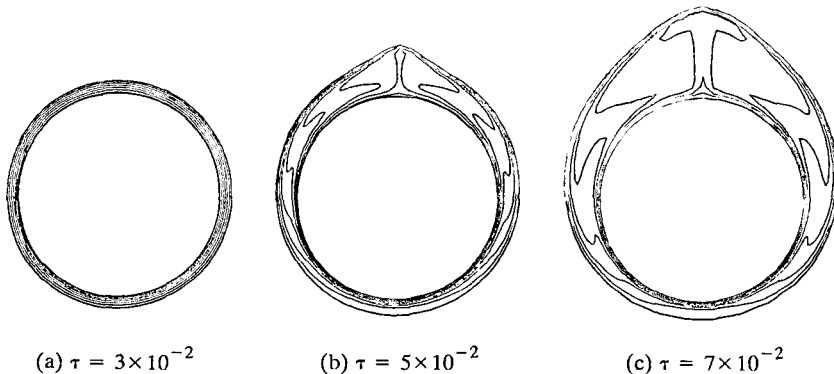


Fig. 9 Timewise change of the temperature fields for the case that $Ste=2 \times 10^{-2}$ and $Ra=5 \times 10^6$

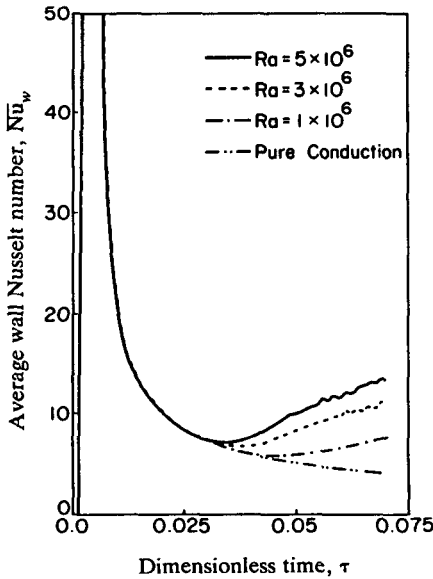


Fig. 10 Effect of Rayleigh number on the average wall Nusselt number

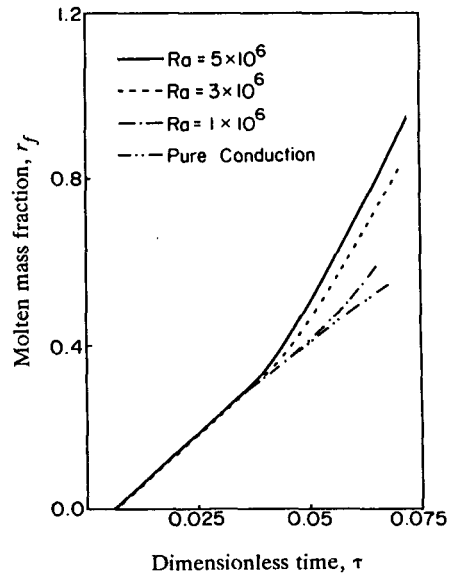


Fig. 12 Effect of Rayleigh number on the molten mass fraction

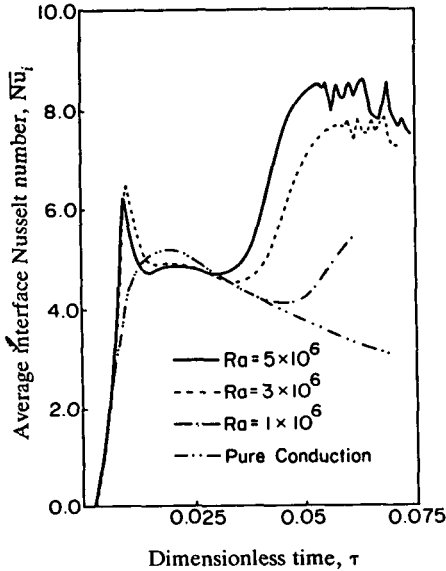


Fig. 11 Effect of Rayleigh number on the average interface Nusselt number

수는 작다. 벽면의 온도가 증가함에 따라 액상간격에 비해 액상의 온도기울기가 크므로 Nusselt 수는 급격히 증가하나, 액상영역이 넓어지면 액상의 온도기울기가 다시 낮아지므로 Nusselt 수도 감소하는 것을 알 수 있다. Rayleigh 수가 커질수록 순수

전도해와의 차이가 커짐을 알 수 있다. Fig. 11은 상변화면의 형상에 직접 영향을 미치는 상변화면에서의 평균 Nusselt 수를 나타낸다. 벽면에서의 평균 Nusselt 수와 마찬가지로 초기에는 시간이 경과함에 따라 상변화면의 평균 Nusselt 수가 증가하나 액상영역이 확대되어 액상 내 온도기울기가 완만해지면 감소함을 알 수 있다. 시간이 더욱 경과하면 자연대류가 강하게 발달하고 다시 그 값이 증가하게 된다. 이 또한 순수 전도해와의 차이는 Rayleigh 수가 증가할수록 커진다. Fig. 12는 시간에 따른 용해질량비를 나타낸다. 용해질량비도 Rayleigh 수가 커질수록 순수전도에 의한 값보다 증가함을 알 수 있으며 순수 전도해로부터 벗어나는 시점은 Fig. 10, Fig. 11의 극대값이 나타나는 시간과 거의 일치한다. 용해율도 Rayleigh 수가 증가함에 따라 커진다.

5.4 벽면 재료의 열전도율의 영향

Fig. 13은 원관의 재질을 열전도율이 서로 다른 구리, 철, 유리 및 PVC로 생각하였을 경우 벽면에서의 시간에 따른 평균 Nusselt수의 변화를 나타낸 것이다. 각 재료의 열전도율의 대표적인 값은 구리 : 386W/m°C, 철 : 73W/m°C, 유리 : 0.78W/m°C, PVC : 0.05W/m°C로서 그 차이가 대단히 크

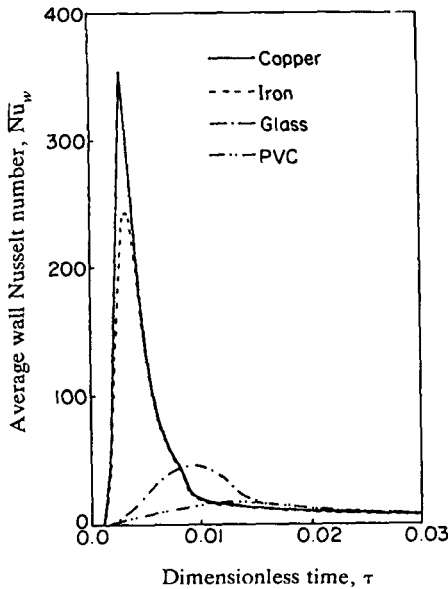


Fig. 13 Effect of the wall conductivity on the average wall Nusselt number for $Ra=1 \times 10^6$ and $(R_{wo} - R_{wi})/R_{wo} = 5 \times 10^{-2}$

다. 구리의 경우는 극대값이 매우 크고 극대값 근처에서의 변화도 매우 급격하다. 철의 경우 다소 극대값이 감소하나 극대값을 나타내는 시간은 거의 일치한다. 그러나 유리 및 PVC에서 이 극대값은 훨씬 낮아지고 변화도 완만해지며 극대값이 형성되는 시간도 늦어진다. 이 이유는 구리나 철 등 열전달계수가 큰 재료의 경우에는 액상영역이 좁을 때 벽면온도의 급격한 상승이 있어 액상의 온도기울기가 급격하기 때문이다. 반면 열전도계수가 낮은 유리 및 PVC의 경우는 벽면의 온도상승 속도도 낮아 벽면의 온도 상승이 어느 정도 이루어진 후에는 이미 액상의 영역도 확대되어 온도 구배도 완만해지기 때문이다.

6. 결 론

벽면온도가 T_h 로 순간적으로 올라갔다고 생각하여 초기 액상의 존재를 가정하던 종래의 방법에 대해 벽 내부의 온도변화를 고려하여 초기 액상의 존재를 가정하지 않고 상변화 과정을 해석하는 방법을 제시하였다. 이 방법을 실제 수평원관 주위의 상변화 열전달과정에 적용하여 수치해석하였고 무차원 변수 및 재료의 열전도율의 변화에 따른 영향

을 고찰하였다. Rayleigh 수는 용해과정에서 그 특성을 결정하는 지배적인 인자로서 그 값이 증가할수록 시간 경과에 따른 용해 속도가 증가한다. 시간 경과에 따라 평균 벽면 Nusselt 수는 극대값을 갖게 되며, 이 극대값은 열전도율이 낮은 재질일수록 작으며 극대값이 발생하는 시간도 지연된다. 상변화 과정 해석에서 초기의 용해 영역을 가정하는데 기인하는 불합리성을 제거하기 위하여 가열 벽면을 고려하는 것이 바람직하다.

후 기

본 연구는 1985년도 과학재단 연구비(852-0901-010-2)의 지원하에 이루어진 연구결과의 일부로써 관계자에게 감사한다.

參 考 文 獻

- (1) Ho, C.-J. and Viskanta, R., 1984, "Heat Transfer During Inward Melting in a Horizontal Tube", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 27, pp. 705~716.
- (2) Bathelt, A.G., Viskanta, R. and Leidenfrost, W., 1979, "An Experimental Investigation of Natural Convection in the Melted Region around a Heated Horizontal Cylinder", *J. Fluid Mech.*, Vol. 90, pp. 227~239.
- (3) Nicholas, D. and Bayazitoglu, Y., 1980, "Heat Transfer And Melting Front within a Horizontal Cylinder", *J. Solar Energy Eng.*, Vol. 102, pp. 229~232.
- (4) Yao, L.S. and Chen, F.F., 1980, "Effects of Natural Convection in the Melted Region around a Heated Horizontal Cylinder", *J. Heat Transfer*, Vol. 102, pp. 667~672.
- (5) Bathelt, A.G. and Viskanta, R., 1980, "Heat Transfer at the Solid-Liquid Interface during Melting from a Horizontal Cylinder", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 23, pp. 1493~1503.
- (6) Rieger, H., Projahn, U. and Beer, H., 1982, "Analysis of the Heat Transport Mechanisms During Melting Around a Horizontal Circular Cylinder", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 25, pp. 137~147.
- (7) Thomson, J.F., Warsi, Z.U.A. and Mastin, C.W., 1982, "Boundary-Fitted Coordinate Systems for Numerical Solution of Partial Differential Equations-A Review", *J. Comp. Phys.*, Vol. 47, pp. 1~108.

- (8) 유호선, 노승탁, 1986, “좌표변환에 의한 상변화 과정의 수치해석”, 대한기계학회논문집, 제10권, 제 4 호, pp. 585~592.
- (9) Thomas, P.D. and Middlecoff, J.F., 1980, “Direct Control of the Grid Point Distribution in Meshes Generated by Elliptic Equations”, AIAA J., Vol. 18, pp. 652~656.
- (10) Yoo, Hoseon and Ro, Sung Tack, 1988, “Melting with Solid-Liquid Density Change and Natural Convection in a Rectangular Cavity”, Proc. of 1st KSME-JSME Thermal and Fluids Engineering Conference, Vol. 1, pp. 100~105.
- (11) Patankar, S.V., 1980, Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Hemisphere.