

<論 文>

적층된 축대칭 복합재료 셸 구조물의 정, 동 구조해석

이 영 신\*, 이 현\*\*

(1989년 8월 18일 접수)

Static and Dynamic Analysis of Laminated Composite Axisymmetric Shells

Young-Sin Lee and Hyun Lee

**Key Words :** Laminated Composite Shell(적층 복합재료 셸), Conical Shell Element(원추 셸 요소), Fourier Harmonic Expansion(Fourier 전개)

Abstract

Static and dynamic responses of thin laminated composite axisymmetric shells are investigated using one-dimensional linear conical shell elements in the axial direction, and displacements, loads expressed by Fourier harmonic expansion in the circumferential direction. The equations of motion are derived by the principle of virtual displacements without the damping effects. Several examples for the laminated composite cylindrical shells are shown, and the effects of fiber orientations, boundary conditions and loading types are discussed. Numerical results are compared with those of MSC/NASTRAN analysis and other papers. Fairly good agreement shows the effectiveness of the present method.

기 호 설 명

[A], [B], [D] : 신장강성, 결합강성 및 굽힘강성 행렬  
 DLF : 동하중계수(Dynamic Load Factor). 동변위 대 정변위의 비  
 (e) : 요소를 나타냄  
 {E<sup>(e)</sup>} : 요소의 응력-변형도 행렬  
 E<sub>z</sub>, E<sub>t</sub>, G<sub>zt</sub> : Young 계수와 전단 계수  
 f(θ) : 상수. n=0이면 2π이고, n>0이면 π  
 {F<sup>i</sup>}, {Q<sup>i</sup>} : i번째 절점에서의 절점하중벡터와 선하중  
 {F<sup>B</sup>}, {F<sup>S</sup>}, {F<sup>C</sup>} : 단위부피당 체적력, 단위면적당 표면력 및 집중하중  
 h<sub>k</sub> : 중앙면에서 k번째 층까지의 두께방향 거리  
 J : Jacobian determinant  
 [K<sup>(e)</sup>], [M<sup>(e)</sup>] : 국부좌표계에서 요소의 강성행렬

및 질량행렬

{K<sup>(e)</sup>}, [M<sup>(e)</sup>] : 전체좌표계에서 요소의 강성행렬 및 질량행렬  
 [M], [K], [F] : 계질량행렬, 계강성행렬 및 힘벡터  
 [N], [M] : 합응력과 합모우멘트  
 n : Fourier 조화수 (n=0, 1, 2, ..., L)  
 {N<sup>(e)</sup>} : 요소의 형상함수 행렬  
 {q}, {q̇}, {q̈} : 전체좌표계에서 변위, 속도 및 가속도 행렬  
 {q<sup>(e)</sup>} : 요소의 변위 행렬  
 q̄<sub>i</sub><sup>(e)</sup>(θ), q̄<sub>i</sub><sup>(e)</sup>(θ) : 국부좌표계에서 각각 대칭과 비대칭인 요소의 축방향, 원주방향, 반경방향 및 회전 변위. (i=z, t, r, m)  
 q<sub>i</sub><sup>n</sup>(θ), q̄<sub>i</sub><sup>n</sup>(θ) : Fourier 조화수가 n일때 전체좌표계에서 각각 대칭과 비대칭인 요소의 축방향, 원주방향, 반경방향 및 회전 변위. (i=z, t, r, m)  
 q<sub>i</sub>(θ) : 전체좌표계에서 대칭과 비대칭인 변위를

\*정회원, 충남대학교 공과대학 기계설계학과  
 \*\*정회원, 충남대학교 대학원, 현 대전기계창

- 합한 최종변위. ( $i=z, t, r, m$ )
- $q_i$  : 절점의 변위. ( $i=1, 2, \dots, 15, 16$ )
- $(\overline{Q}_{ij})_k$  :  $k$ 번째 층의 변환된 축소 강성 행렬
- $\{W^{(e)}\}$  : 요소의 변형도-변위 행렬
- $[W_i^{(e)}], [W_i^{\prime(e)}]$  : 대칭 및 비대칭인 변형도-변위 행렬. ( $i=1, 2$ )
- $\rho, h, r, l$  : 요소의 질량밀도, 두께, 반경 및 길이
- $\nu_{zt}$  : 프와송 비
- $\theta, \phi$  : 원주방향 각도 및 원추 각도
- $[\phi]$  : 변환 행렬
- $\{\epsilon^{(e)}\}, \{\sigma^{(e)}\}$  : 요소의 변형도 및 응력 행렬
- $\epsilon^{(e)}, x^{(e)}$  : 임의 요소 중앙면에서의 변형도 및 곡률의 변화
- $\xi, \Phi_i^{(e)}$  : 특성좌표계와 Lagrange 형상함수

### 1. 서론

적층된 복합재료 셀 구조물은 과거 십 수년에 걸쳐 연구 대상이 되어왔으며 일반 산업기계 설비에서 핵 반응용기, 압력용기, 탄두 및 탄체 설계분야, 항공 우주분야의 구조물 설계에 이르기까지 그 응용 범위는 실로 광범위하다.

그러나, 현재까지의 연구 결과를 보면 그 해석 범위가 상당히 국한되어 왔는데, 즉, Pagano와 Whitney<sup>(1)</sup>는 축 대칭 하중을 받는 반무한 적층 복합재료 원통 셀에서 단지 신장-굽힘 결합강성  $B_{ij}=0$ 인 대칭적층인 경우에 대하여만 Donnell 이론 확장에 의하여 정해석 결과를 구하였다. Vicario와 Rizzo<sup>(2)</sup>도 역시 결합 강성  $B_{ij}=0$ 이 되는 대칭적층 셀의 경우에 대하여만 Donnell 이론에 의하여 지배 방정식을 도출하고, 균일 축방향 하중을 받는 화이버각도가 30°인 단층 복합재료 원통 셀의 정해석 결과만을 제시하였다.

Reuter<sup>(3)</sup>도 마찬가지로 Donnell 이론에 의하여 지배방정식을 표현하여 특수한 두가지 경우, 즉,  $A_{i6}=D_{i6}=B_{i1}=B_{i2}=0$ 이 되는 경우와  $B_{ij}=0$ 인 경우에 대하여 균일 축대칭 하중, 즉 내압을 받는 적층된 복합재료 원통 셀의 층수 변화에 따르는 정해석 결과로써 응력을 구하였는데 이와같이 균일 축대칭 하중으로 주어지는 문제가 아니면 해를 구할 수 없다. 또한, Uemura와 Fukunaga<sup>(4)</sup>는 내압을 받는 적층된 복합재료 원통 셀의 경우에 대하여만 Donnell 이론에 의하여 풀고 정해석 결과를 제시하였으며, Yang<sup>(5)</sup> 등은 고차곡형 셀 요소를 이

용한 유한요소법에 의하여 내압을 받는 적층 복합재료 셀 문제만을 해석하였다.

최근에 Sheinman<sup>(6,7)</sup> 등은 본 연구와 유사한 방법으로 적층된 복합재료 원통 셀의 주파수 특성과 3적층 원통 셀의 정, 동 해석결과를 제시하였으나 참고문헌 (7)에서 보면 3적층 원통 셀에서 정해석의 경우 구하여진 변위가 본 해석결과와 같은 경향을 보이고 있지만, 동해석의 경우 양단 고정 경계조건하에서 삼각형 펄스로 주어진 하중에 대한 동변위 대 정변위의 비, 즉, DLF(동하중계수, Dynamic Load Factor)가 약 7배가 되는데, 이는 너무 큰 DLF가 얻어진 것으로 사료된다<sup>(8,9)</sup>. 이영신<sup>(8,9)</sup> 등은 직교이방성 복합재료 원통 셀의 진동방정식을 통일된 형태로 표현하고, 등방성 원통셀에 대한 Chung의 해석법을 채용하여 일반해법을 개발하였으며, 임의의 경계조건에 대해서도 이용할 수 있는 해석방법을 제시한 바 있다. 최근에 그는 CFRP 원통 셀의 진동해석을 수행 하였으며<sup>(10)</sup>, Galerkin 방법을 이용하여 복합재료 원추 셀의 진동 해석을 보여주었다<sup>(11)</sup>.

이와같이 여러 학자들에 의하여 적층된 복합재료 원통 셀문제가 이론 또는 수치적으로 해석되어 왔으나 국한된 제한조건 예를 들면, 축대칭인 하중형태만을 사용하고, 특수한 경계조건만을 고려하거나 결합강성항을 제외시켜야 하는 특수한 여건만을 고려하였기 때문에 일반적인 문제로 까지 해석을 전개시키지 못하였다. 따라서, 결합항, 경계조건 및 하중형태의 제약 조건없이 적층된 복합재료 셀 문제를 일반적이고 보다 용이하게 해석할 수 있는 방법이 실제 설계상황에서 꾸준히 요구되어 왔다.

본 연구에서는 이의 해결 방안으로 축방향으로는 1차원 선형 원추 셀요소를 도입한 유한요소법과 원주방향으로는 Fourier 조화식으로 표현되는 변위와 하중을 정의하여 적층된 축대칭 복합재료 얇은 셀 구조물의 정, 동 특성을 구하였다. 적층된 축대칭 복합재료 셀에 있어서 임의 요소 중앙면에 수직한 평면은 변형 후에도 수직을 유지하며 각 층은 상호 완전 결합되어 있다고 가정하였다. 두께 대 반경의 비가 상대적으로 작은 얇은 셀 이론을 적용 하였으므로 반경 방향의 전단 변형도는 무시 하였으나 단지 축 방향 좌표 축에 대한 회전 관성력만은 고려 하였다.

유한요소의 각 절점마다 8자유도를 갖는 2절점으로 이루어진 1차원 선형 원추 셀 요소를 사용하였

으며, 각 절점은 대칭인 변위 4개와 비대칭인 변위 4개를 갖게되는데 그 이유는 이방성 재질인 쉘 문제에서는 대칭변위와 비대칭변위 사이에 생기는 결합효과를 고려하여야 하기 때문이다. 하중으로는 선하중으로 표현되는 절점하중벡터를 사용하였으며 Fourier식으로 정의된 변위식에 대응시키기 위하여 하중 역시 Fourier 조화식으로 표시하였으나, rz 평면에 대칭인 경우만 고려하였다.

운동방정식은 가상변위의 원리에 의하여 유도되었으며<sup>(14)</sup> 감쇠효과는 고려하지 않았다. 일련의 연립방정식 계의 해는 Cholesky 방법에 의하여 구하여지고, 동해석을 위하여 Newmark 수치적분방법을 도입하여 주어진 운동방정식을 시간 증분에 따라 풀게된다.

본 연구에서는 화이버각도, 경계조건 및 하중형태의 변화에 따라 적층 복합재료원통 쉘 구조물의 수치예를 제시하고, NASTRAN 수치결과 및 기존 문헌들과 비교하여 구하여진 결과의 타당성을 입증하였다.

2. 운동방정식

요소의 변위  $q^{(e)}$ , 변형도  $\epsilon^{(e)}$  및 응력  $\sigma^{(e)}$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} \{q^{(e)}\} &= [N^{(e)}]\{q\} \\ \{\epsilon^{(e)}\} &= [W^{(e)}]\{q\} \\ \{\sigma^{(e)}\} &= [E^{(e)}]\{\epsilon^{(e)}\} \end{aligned} \quad (1 a \sim c)$$

여기서,  $(e)$ 는 요소를 뜻하며,  $[N^{(e)}]$ 는 형상함수 행렬,  $[W^{(e)}]$ 는 변형도-변위 행렬,  $[E^{(e)}]$ 는 응력-변형도 행렬을 나타낸다.

가상 변위의 원리에 의하여 물체의 평형 방정식은 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} \int_V [\epsilon^{(e)}]^T \{\sigma^{(e)}\} dV &= \int_V [q^{(e)}]^T \{F^B\} dV \\ &+ \int_S [q^{(e)}]^T \{F^S\} dS + \sum_I [q^{(e)}]^T \{F^C\} \end{aligned} \quad (2)$$

여기서, 좌변은 변형도 에너지이고, 우변은 외부에서 한 일을 나타낸다.  $\{F^B\}$ 는 단위 부피당 체적력,  $\{F^S\}$ 는 단위 면적당 표면력,  $\{F^C\}$ 는 집중 하중을 뜻한다.

모든 요소들을 조합하고 식 (1)을 식 (2)에 대입한 뒤 단위 가상변위  $\{q\}^T = [I]$ 를 고려하면 다음 관계식을 얻는다.

$$\left\{ \sum_V [W^{(e)}]^T [E^{(e)}] [W^{(e)}] dV \right\} \{q\} = \{R_B\}$$

$$+ \{R_S\} + \{R_C\} \quad (3a)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \{R_B\} &= \sum_V \int_V [N^{(e)}]^T \{F^B\} dV \\ \{R_S\} &= \sum_S \int_S [N^{(e)}]^T \{F^S\} dS \\ \{R_C\} &= \{F^C\} \end{aligned} \quad (3 b \sim d)$$

이다.

단위 부피당 관성력  $\rho \{\ddot{q}^{(e)}\} = \rho [N^{(e)}] \{\ddot{q}\}$ 을 고려하면 식 (3a)의 우변 첫 항은 다음과 같이 표시된다.

$$\{R_B\} = \sum_V \int_V [N^{(e)}]^T \{ \{F^B\} - \rho [N^{(e)}] \{\ddot{q}\} \} dV \quad (4)$$

식 (3)과 식 (4)로부터 다음 운동 방정식이 구하여진다.

$$[M] \{\ddot{q}\} + [K] \{q\} = \{F\} \quad (5a)$$

여기서,  $[M]$ ,  $[K]$  및  $\{F\}$ 는 각각 질량행렬, 강성행렬 및 힘벡터로써 다음과 같다.

$$\begin{aligned} [M] &= \sum_V \int_V \rho [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] dV \\ [K] &= \sum_V \int_V [W^{(e)}]^T [E^{(e)}] [W^{(e)}] dV \\ \{F\} &= \{R_B\} + \{R_S\} + \{R_C\} \end{aligned} \quad (5 b \sim d)$$

각 요소에서 구하여진 질량 행렬과 강성 행렬은 국부좌표계에서 전체좌표계로 변환시킨 뒤에 계 행렬을 형성하고, 식 (5a)로 주어진 운동 방정식은 Newmark 수치적분방법에 의하여 시간 증분에 따라 풀어지게 된다.

3. 변형 이론

얇은 쉘에 있어서 요소 중앙면에 수직한 평면은

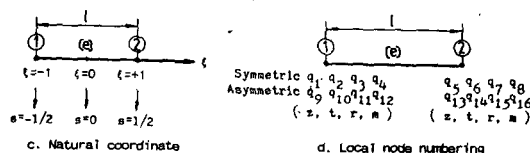
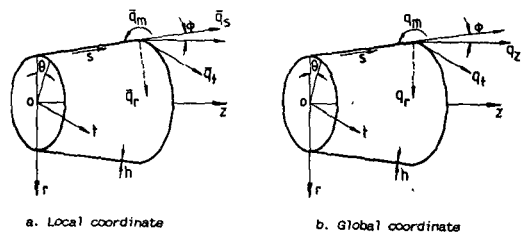


Fig. 1 Coordinates of conical shell elements

변형 후에도 수직으로 남는다고 가정하였으며 반경 방향 변형도는 무시하였다. 또한, 반경방향의 전단 변형은 고려되지 않고, 적층 복합재료 셀의 각 층은 완전히 접합되어 있다고 가정하였다. 단, 축방향 좌표축에 대한 회전 관성력만은 고려되었다.

Fig. 1에 도시한 바와 같이 축방향으로는 각 절점마다 8자유도를 갖는 2절점으로 이루어진 1차원 선형 원추 셀 요소와 원주방향으로는 Fourier 조화식으로 표현되는 변위를 사용하여 적층된 축대칭 복합재료 얇은 셀 구조물을 해석하였다.

Fourier 조화식으로 표현한 변위함수는 특성좌표계에서 다음과 같이 주어진다.

대칭 변위 성분 :

$$\begin{aligned}\bar{q}_z^{(e)}(\theta) &= [\Phi_1(\xi) q_1 + \Phi_5(\xi) q_5] \cos n\theta \\ \bar{q}_t^{(e)}(\theta) &= [\Phi_2(\xi) q_2 + \Phi_6(\xi) q_6] \sin n\theta \\ \bar{q}_r^{(e)}(\theta) &= [\Phi_3(\xi) q_3 + \Phi_4(\xi) q_4 + \Phi_7(\xi) q_7 \\ &\quad + \Phi_8(\xi) q_8] \cos n\theta \\ \bar{q}_m^{(e)}(\theta) &= \partial \bar{q}_r^{(e)}(\theta) / \partial s\end{aligned}\quad (6 \text{ a-d})$$

비대칭 변위 성분 :

$$\begin{aligned}\bar{q}_z^{(e)}(\theta) &= [\Phi_1(\xi) q_9 + \Phi_5(\xi) q_{13}] \sin n\theta \\ \bar{q}_t^{(e)}(\theta) &= [\Phi_2(\xi) q_{10} + \Phi_6(\xi) q_{14}] \cos n\theta \\ \bar{q}_r^{(e)}(\theta) &= [\Phi_3(\xi) q_{11} + \Phi_4(\xi) q_{12} + \Phi_7(\xi) q_{15} \\ &\quad + \Phi_8(\xi) q_{16}] \sin n\theta \\ \bar{q}_m^{(e)}(\theta) &= \partial \bar{q}_r^{(e)}(\theta) / \partial s\end{aligned}\quad (6 \text{ e-h})$$

여기서,  $n$ 은 Fourier 조화수,  $q_i (i=1, 2, \dots, 16)$ 는 절점의 변위,  $\bar{q}^{(e)}(\theta)$ 와  $\bar{q}'^{(e)}(\theta)$ 는 각  $\theta$ 만큼 이동한 위치에서의 대칭 변위와 비대칭 변위를 각각 나타낸다. 등방성 재질인 셀 문제에서는 단지 대칭 변위만 요구되나, 이방성 재질인 셀 문제에서는 대칭 변위와 비대칭 변위 사이에 생기는 결합 효과를 고려하여야만 문제를 해결할 수가 있다.

$\Phi_i(\xi)$ 는 Lagrange 형상함수이며 특성 좌표계에서 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}\Phi_1(\xi) &= \Phi_2(\xi) = (1-\xi)/2 \\ \Phi_3(\xi) &= (2-3\xi+\xi^3)/4 \\ \Phi_4(\xi) &= (1-\xi-\xi^2+\xi^3)\ell/8 \\ \Phi_5(\xi) &= \Phi_6(\xi) = (1+\xi)/2 \\ \Phi_7(\xi) &= (2+3\xi-\xi^3)/4 \\ \Phi_8(\xi) &= (-1-\xi+\xi^2+\xi^3)\ell/8\end{aligned}\quad (7 \text{ a-h})$$

여기서,  $\ell$ 은 요소의 길이를 나타낸다.

변형도 관계식은 다음과 같이 유도된다<sup>(15)</sup>.

$$\epsilon_s^{0(e)} = \frac{\partial \bar{q}_z^{(e)}}{\partial s}$$

$$\begin{aligned}\epsilon_t^{0(e)} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{q}_t^{(e)}}{\partial \theta} + \frac{\bar{q}_z^{(e)}}{r} \sin \phi \\ &\quad + \frac{\bar{q}_r^{(e)}}{r} \cos \phi \\ \epsilon_{st}^{0(e)} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{q}_z^{(e)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{q}_t^{(e)}}{\partial s} - \frac{\bar{q}_t^{(e)}}{r} \sin \phi \\ x_s^{(e)} &= -\frac{\partial^2 \bar{q}_r^{(e)}}{\partial s^2} \\ x_t^{(e)} &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{q}_r^{(e)}}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \phi}{r^2} \frac{\partial \bar{q}_t^{(e)}}{\partial \theta} \\ &\quad - \frac{\sin \phi}{r} \frac{\partial \bar{q}_r^{(e)}}{\partial s} \\ x_{st}^{(e)} &= -\frac{2}{r} \frac{\partial^2 \bar{q}_r^{(e)}}{\partial s \partial \theta} + \frac{2 \sin \phi}{r^2} \frac{\partial \bar{q}_r^{(e)}}{\partial \theta} \\ &\quad + \frac{\cos \phi}{r} \frac{\partial \bar{q}_t^{(e)}}{\partial s} \\ &\quad - \frac{2}{r^2} \bar{q}_t^{(e)} \sin \phi \cos \phi\end{aligned}\quad (8 \text{ a-f})$$

여기서,

$$\{\epsilon^{(e)}\} = [\epsilon_s^{0(e)} \quad \epsilon_t^{0(e)} \quad \epsilon_{st}^{0(e)} \quad x_s^{(e)} \quad x_t^{(e)} \quad x_{st}^{(e)}]^T \quad (9)$$

이다.

식 (9)에서  $\epsilon^{0(e)}$ 는 임의 요소 중앙면에서의 대칭인 변형도를 나타내고,  $x^{(e)}$ 는 변형되는 동안 중앙면에서의 대칭인 곡률의 변화를 나타낸다.

비대칭인 변형도와 곡률의 변화는 다음과 같이 표시되고, 식 (8)에  $q^{(e)} (i=z, t, r, m)$ 를 대입하면 된다.

$$\{\epsilon^{(e)}\} = [\epsilon_s^{0(e)} \quad \epsilon_t^{0(e)} \quad \epsilon_{st}^{0(e)} \quad x_s^{(e)} \quad x_t^{(e)} \quad x_{st}^{(e)}]^T \quad (10)$$

식 (8)에서 반경  $r$ 은 다음과 같이 표시된다.

$$r = [(r_i + r_j) - (r_i - r_j)\xi]/2 \quad (11)$$

여기서,  $r_i$ 는 임의 한 요소에서  $i$ 절점의 반경이고,  $r_j$ 는  $j$ 절점의 반경이 된다.

#### 4. 유한 요소법의 정식화

각  $\theta$ 만큼 이동한 위치에서의 최종 변위함수는 대칭 변위와 비대칭 변위를 합한 식으로 주어진다. 즉,

$$q_z(\theta) = \sum_{n=0}^L (q_z^n(\theta) \cos n\theta + q_z'^n(\theta) \sin n\theta)$$

$$q_t(\theta) = \sum_{n=0}^L (q_t^n(\theta) \sin n\theta + q_t'^n(\theta) \cos n\theta)$$

$$q_r(\theta) = \sum_{n=0}^L (q_r^n(\theta) \cos n\theta + q_r'^n(\theta) \sin n\theta)$$

$$q_m(\theta) = \sum_{n=0}^L (q_m^n(\theta) \cos n\theta + q_m'^n(\theta) \sin n\theta)$$

(12 a-d)

얇은 셀에 대한 변형도 관계식 (8)에서 다음과 같이 변형도-변위 행렬  $[W_\epsilon^{(e)}]$ 와  $[W_x^{(e)}]$ 가 구하여지는데 이 관계식을 부록에 수록하였다.

$$\begin{aligned} \{\bar{\epsilon}^{(e)}\} &= [W_\epsilon^{(e)}] \{q\} \\ \{\bar{x}^{(e)}\} &= [W_x^{(e)}] \{q\} \end{aligned} \quad (13 \text{ a,b})$$

여기서,

$$\begin{aligned} \{\bar{\epsilon}^{(e)}\} &= [\bar{\epsilon}_s^{(e)} \ \bar{\epsilon}_t^{(e)} \ \bar{\epsilon}_{st}^{(e)}]^T, \\ \{\bar{x}^{(e)}\} &= [\bar{x}_s^{(e)} \ \bar{x}_t^{(e)} \ \bar{x}_{st}^{(e)}]^T \\ \{q\} &= [q_1 \ \dots \ q_{16}]^T \\ [W_\epsilon^{(e)}] &= [W_1^{(e)} \ W_1'^{(e)}], \\ [W_x^{(e)}] &= [W_2^{(e)} \ W_2'^{(e)}] \end{aligned} \quad (13 \text{ c})$$

이다.

$W_i^{(e)}$ ,  $W_i'^{(e)}$  ( $i=1, 2$ )는 각각 대칭 및 비대칭인 변형도-변위 행렬을 나타낸다.

적층된 복합재료 셀의 합응력과 합모멘트는 다음과 같이 표현되는데<sup>(16)</sup> 이때 각 층의 재료는 직교 이방성으로 가정하였다.

$$\begin{aligned} \{\bar{N}\} &= [A]\{\epsilon^{(e)}\} + [B]\{x^{(e)}\} \\ \{\bar{M}\} &= [B]\{\epsilon^{(e)}\} + [D]\{x^{(e)}\} \end{aligned} \quad (14 \text{ a,b})$$

여기서,  $[A]$ ,  $[B]$  및  $[D]$ 는 각각 신장강성, 결합강성 및 굽힘강성 행렬을 나타내며 이들의 성분을 써 보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (h_k - h_{k-1}) \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (h_k^3 - h_{k-1}^3) \end{aligned} \quad (14 \text{ c-e})$$

$(\bar{Q}_{ij})_k$ 는  $k$ 번째 층의 변환된 축소 강성 행렬이고,  $h_k$ 는 중앙면에서  $k$ 번째 층까지의 두께방향 거리를 나타낸다.

식 (5c)로 주어진 강성 행렬을 식 (13)과 식 (14)를 사용하여 바꿔쓰면 국부좌표계에서 다음과 같이 표시되고, 합응력과 합모우멘트로 식 (14)를 정의 하였으므로 식 (15)의 강성 행렬  $\bar{K}$ 에는 두께항이 포함된다.

$$\begin{aligned} [K_L^{(e)}] &= \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \bar{K} r J d\theta d\xi \\ &= \int_{-1}^1 (K_1 + K_2) r J d\xi \end{aligned} \quad (15)$$

여기서,  $J$ 는 Jacobian determinant로써  $\frac{\ell}{2}$ 이 되고,  $K_1$ 과  $K_2$ 는 다음 식으로 표시된다.

$$K_1 = \begin{bmatrix} \bar{W}_1^{(e)} & 0 \\ 0 & \bar{W}_1'^{(e)} \end{bmatrix}^T \{ [A'] \begin{bmatrix} \bar{W}_1^{(e)} & 0 \\ 0 & \bar{W}_1'^{(e)} \end{bmatrix} \}$$

$$\begin{aligned} &+ [B'] \begin{bmatrix} \bar{W}_2^{(e)} & 0 \\ 0 & \bar{W}_2'^{(e)} \end{bmatrix} \} \\ K_2 &= \begin{bmatrix} \bar{W}_2^{(e)} & 0 \\ 0 & \bar{W}_2'^{(e)} \end{bmatrix}^T \{ [B'] \begin{bmatrix} \bar{W}_1^{(e)} & 0 \\ 0 & \bar{W}_1'^{(e)} \end{bmatrix} \\ &+ [D'] \begin{bmatrix} \bar{W}_2^{(e)} & 0 \\ 0 & \bar{W}_2'^{(e)} \end{bmatrix} \} \end{aligned} \quad (16 \text{ a,b})$$

식 (16)의  $\bar{W}^{(e)}$ 와  $\bar{W}'^{(e)}$ 는 식 (13. c)에서  $\cos n\theta$ 와  $\sin n\theta$  항이 추출되어진 식이고, 추출된 삼각함수 행렬은 각각  $[A]$ ,  $[B]$  및  $[D]$  행렬에 곱하여진 뒤 구간 0에서  $2\pi$ 까지 적분되어서  $[A']$ ,  $[B']$  및  $[D']$  행렬을 만드는데 그 과정을 부록에 수록하였다.

$[A']$ ,  $[B']$  및  $[D']$  행렬을 성분만 다를 뿐 같은 형태의 식으로 표시되므로  $[A']$  행렬만 써보면 다음과 같다.

Fourier 조화수  $n=0$ 일때 ;

$$[A'] = 2\pi \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & A_{26} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & 0 & 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \quad (17 \text{ a})$$

Fourier 조화수  $n>0$ 일때 ;

$$[A'] = \pi \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & A_{26} \\ 0 & 0 & A_{66} & A_{16} & A_{26} & 0 \\ 0 & 0 & A_{16} & A_{11} & A_{12} & 0 \\ 0 & 0 & A_{26} & A_{12} & A_{22} & 0 \\ A_{16} & A_{26} & 0 & 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \quad (17 \text{ b})$$

국부좌표계로 표시된 요소의 강성 행렬을 전체좌표계로 변환하면 다음과 같다.

$$[K^{(e)}] = [\phi]^T [K_L^{(e)}] [\phi] \quad (18)$$

여기서,  $[\phi]$ 는 변환 행렬을 나타내며 이를 부록에 수록하였다.

요소의 질량행렬 산출을 위하여 집중질량 (Lumped mass) 방법을 도입하였고, 요소의 질량행렬을 전체좌표계로 변환하면 다음과 같다.

$$[M^{(e)}] = [\phi]^T [M_L^{(e)}] [\phi] \quad (19)$$

전체좌표계로 변환된 요소의 강성 행렬과 질량행렬은 5점 Gauss-Legendre quadrature를 이용하

여 수치적분 되었다. 전체좌표계에서 얻어진 각 원추 셀요소에 대한 강성 행렬과 질량 행렬은 조합에 의하여 각각 계 강성행렬과 계 질량행렬을 형성하게 된다.

하중으로는 선하중으로 표현되는 절점하중 벡터를 채택하였다. Fourier 조화식 형태로 주어진 변위식에 대응시키기 위하여 절점하중 벡터 역시 Fourier 조화식으로 표시하였고 여기서는 대칭인 하중만을 고려하였다.

$$\begin{aligned}
 F_z(\theta) &= F_z^i \cos n\theta \\
 F_t(\theta) &= F_t^i \sin n\theta \\
 F_r(\theta) &= F_r^i \cos n\theta \\
 F_m(\theta) &= F_m^i \cos n\theta
 \end{aligned} \tag{20 a~d}$$

여기서,

$$\begin{aligned}
 \{F^i\} &= f(\theta) r_i \{Q^i\} \\
 \{F^i\} &= [F_z^i \ F_t^i \ F_r^i \ F_m^i] \\
 \{Q^i\} &= [Q_z^i \ Q_t^i \ Q_r^i \ Q_m^i]
 \end{aligned} \tag{21}$$

이고,  $i$ 는  $i$ 번째 절점을 나타낸다.

식 (21)에서 Fourier 조화수  $n=0$ 이면  $f(\theta)=2\pi$  이고,  $n>0$ 이면  $f(\theta)=\pi$ 이다.  $\{F^i\}$ 는 절점하중 벡터이고,  $\{Q^i\}$ 는 선하중으로써 시간의 증속합수일 경우에는 최대 선하중 값을 입력시키면 된다.

조합된 일련의 연립방정식 계의 해는 Cholesky 방법에 의하여 수치적으로 구하여지고, 동해석에서는 Newmark 수치적분 방법 ( $\alpha=0.5, \beta=0.25$ )을 도입하여 식 (5 a)로 주어진 운동 방정식을 시간 증분에 따라 풀게 된다.

### 5. 수치에 및 고찰

#### 5.1 단층 복합재료 원통 셸이 내압을 받는 경우의 정해석

계산에 고려한 재료는 Gr/Epoxy로써  $E_z=20 \times 10^6$  psi,  $E_t=1.0 \times 10^6$  psi,  $G_{zt}=0.6 \times 10^6$  psi,  $\nu_{zt}=0.25$ 로 주어지며, 경계 조건은 양단고정이나 한단에서 축방향 변위  $q_z \neq 0$ 인 경우를 고려하였다. 셸의 크기, 재질, 하중 및 경계 조건은 참고문헌 (12)에서 발췌한 것이다.

Fig. 3과 Fig. 4에 각각  $\theta=0^\circ$ 의 축방향과 따라 화이버각도 변화에 따르는 반경방향 변위와 원주방향 변위를 도시하였다. 원추 셀 요소는 26개를 사용하였는데 요소증가에 따르는 오차를 검토하기 위하여 요소를 80개로 늘려 보았으나 오차는 1% 이내로 나타났다.

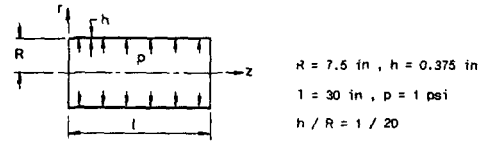


Fig. 2 Cylindrical shell with single lamina under internal pressure

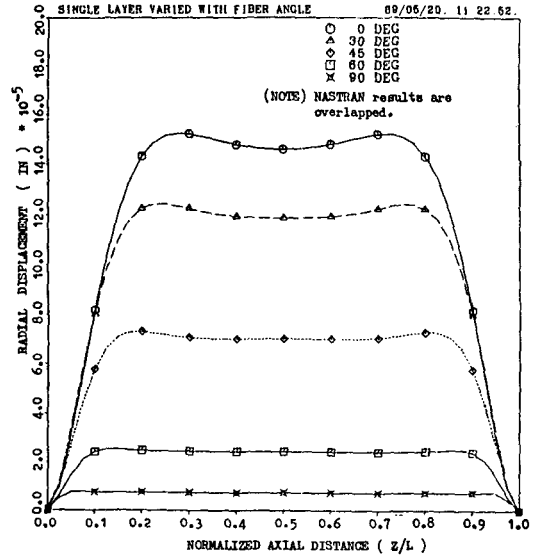


Fig. 3 Radial deflection of pressurized single-layer composite cylindrical shell at  $\theta=0$  degrees

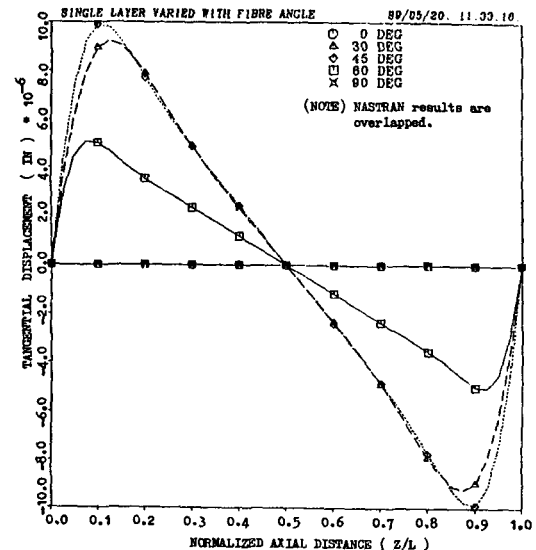


Fig. 4 Hoop deflection of pressurized single-layer composite cylindrical shell at  $\theta=0$  degrees

반경방향 변위는 화이버각도가 0° 일때에 가장 컸으며, 원주방향 변위는 45° 일때 가장 큰 값을 보이고 있다.

NASTRAN에서는 축방향으로 20개, 원주방향으로 36개로 분할한 전체 요소가 720개가 되는 QUAD4 요소를 사용하였는 바 Fig. 3과 Fig. 4에 보인 결과와 아주 잘 일치하였다.

**5.2 2적층 복합재료 원통 쉘이 내압을 받는 경우의 정, 동 해석**

계산에 적용한 쉘의 크기, 재질, 하중 및 경계 조건은 참고문헌 (5)에서 발췌하였다.

크 기 :  $R=20 \text{ in}$ ,  $h=1 \text{ in}$ ,  $l=20 \text{ in}$ ,  
 $h/R=1/20$ ,

각 층의 두께  $h_1=h_2=0.5 \text{ in}$

재 질 :  $E_z=7.5 \times 10^6 \text{ psi}$ ,  $E_t=2 \times 10^6 \text{ psi}$ ,  
 $G_{zt}=1.25 \times 10^6 \text{ psi}$ ,  $\nu_{zt}=0.25$ ,  
 $\rho=1 \text{ lb}_f \text{ sec}^2/\text{in}^4$

하 중 :  $p=5000 \text{ psi}$ . 동해석에서는 갑자기 5000 psi가 작용하여 계속 유지되는 경우.

경계조건 : 양단 고정

Fig. 5,6,7에 각각 0°/90°, 30°/-30°, 45°/-45° 및 60°/-60°로 이루어진 원통쉘의 반경방향, 축방

향 및 원주방향 변위의 정해석 결과를 도시하고, Fig. 8에는 반경방향 변위의 동해석 결과를 도시하였다. 또한, Table 1에 2적층 복합재료 원통쉘의 DLF를 수록하였는 바 약 2.1~2.2배를 나타내고 있다.

정해석 결과를 보면 반경방향 변위와 원주방향

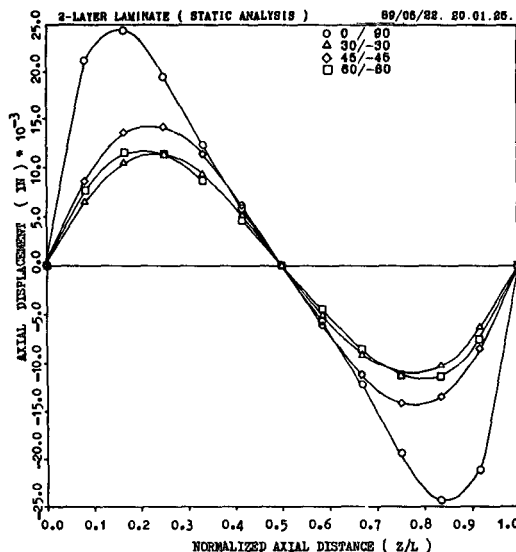


Fig. 6 Axial deflection of pressurized two-layer composite cylindrical shell at  $\theta=0$  degrees

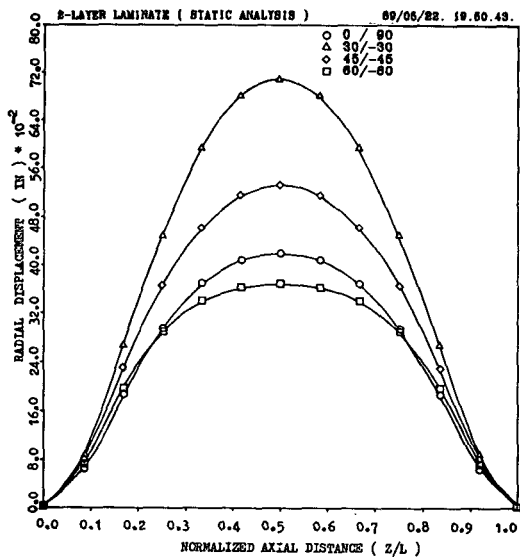


Fig. 5 Radial deflection of pressurized two-layer composite cylindrical shell at  $\theta=0$  degrees

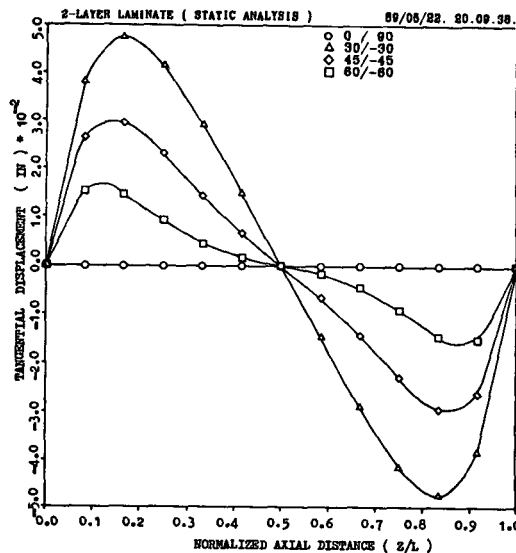


Fig. 7 Hoop deflection of pressurized two-layer composite cylindrical shell at  $\theta=0$  degrees

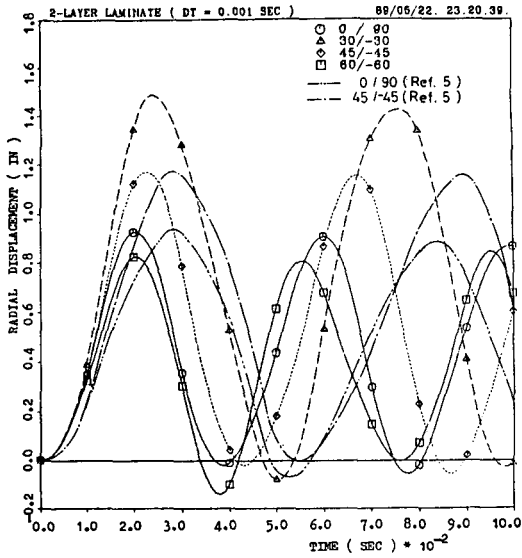


Fig. 8 Dynamic response of midspan radial deflection of two-layer composite cylindrical shell at  $\theta=0$  degrees

Table 1 DLF of pressurized two-layer composite cylindrical shell

Fiber angles of two-layer composite shell	DLF for maximum radial displacements
0° / 90°	2.198
30° / -30°	2.099
45° / -45°	2.196
60° / -60°	2.230

변위는 30°/-30°, 축방향 변위는 0°/90°에서 가장 큰 값을 나타내었으며, 동해석 결과에서도 마찬가지로 반경방향 변위는 30°/-30°에서 가장 큰 값을 나타내었다. 동해석 결과는 NASTRAN 수치결과 및 참고문헌 (5)의 결과와 잘 일치하였다.

5.3 3적층 복합재료 원통셀이  $F(t)(1+\cos\theta)$  형태의 하중을 받는 경우의 정, 동해석

계산에 적용한 크기, 재질 및 경계 조건은 참고 문헌 (7)에서 발췌하였다.

크 기 :  $R=0.1905m, l=0.381m, h=0.0005m,$   
 $h/R=1/381,$  각 층의 두께  $h_1=h_2=$

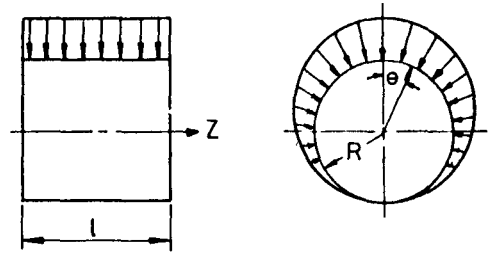


Fig. 9 Three-layer composite cylindrical shell under dynamic load,  $F(t)(1+\cos\theta)$

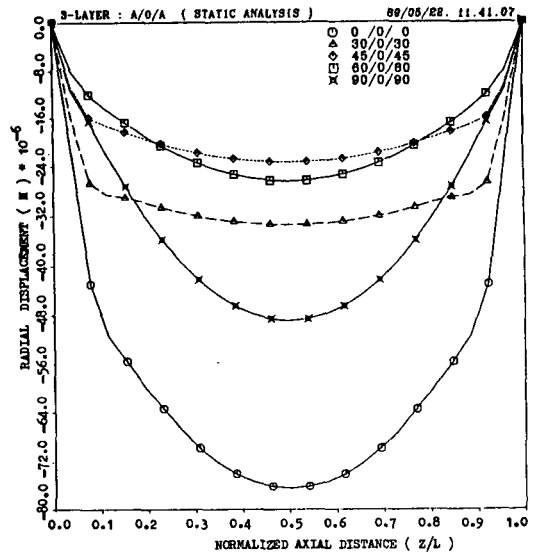


Fig. 10 Radial deflection of three-layer composite cylindrical shell at  $\theta=0$  degrees under static load

$h_3=0.166 \times 10^{-3}m$

재 질 : Boron/Epoxy AVCO 5505, A°/O°/A°인 경우

$E_z=2.069 \times 10^8 KN/m^2,$

$E_t=0.1862 \times 10^8 KN/m^2$

$G_{zt}=0.0448 \times 10^8 KN/m^2, \nu_{zt}=0.28,$

$\rho=2048 N \text{ sec}^2/m^4$

하 중 : 26개의 원추셀 요소를 사용하였으며, 각 절점마다  $F(t)=48.15 N$ 의 Force가 작용하고, 동해석에서는 갑자기  $F(t)$ 가 작용하여 계속 유지되는 경우.

경계조건 : 양단 고정



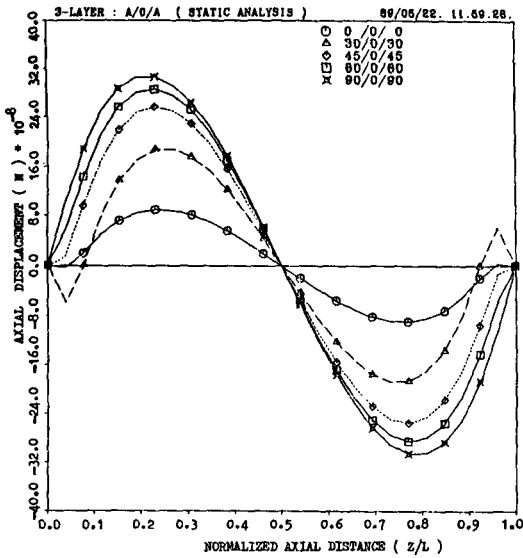


Fig. 11 Axial deflection of three-layer composite cylindrical shell at  $\theta=0$  degrees under static load

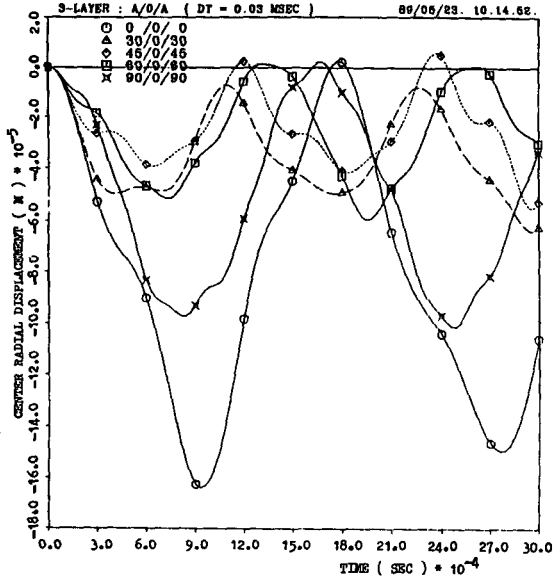


Fig. 13 Dynamic response of midspan radial deflection of three-layer composite cylindrical shell at  $\theta=0$  degrees

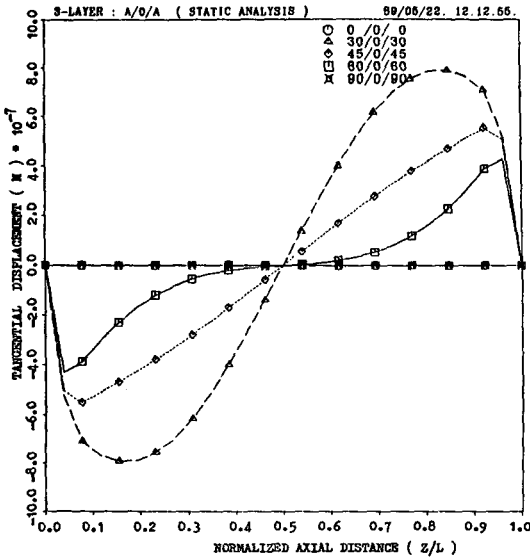


Fig. 12 Hoop deflection of three-layer composite cylindrical shell at  $\theta=0$  degrees under static load

Table 2 DLF of three-layer composite cylindrical shell under dynamic load,  $F(t) (1 + \cos \theta)$

Fiber angles of three-layer composite shell	DLF for maximum radial displacements
$0^\circ/0^\circ/0^\circ$	2.147
$30^\circ/0^\circ/30^\circ$	1.907
$45^\circ/0^\circ/45^\circ$	2.352
$60^\circ/0^\circ/60^\circ$	2.247
$90^\circ/0^\circ/90^\circ$	2.070

에 3적층 복합재료 원통 셸의 DLF를 수록하였는 바 DLF는 약 1.9~2.4배를 나타낸다.

정해석 결과를 보면 반경방향 변위는  $0^\circ/0^\circ/0^\circ$ , 축방향 변위는  $90^\circ/0^\circ/90^\circ$ , 원주방향 변위는  $30^\circ/0^\circ/30^\circ$ 에서 가장 큰 값을 나타내고 있으며, 구하여진 정변위는 참고문헌 (7)과 같은 경향을 보이고 있다. 동해석 결과에서 보면 반경방향 변위는  $0^\circ/0^\circ/0^\circ$  일때 가장 큰 값을 나타낸다.

일단 변위가 구하여지면 변형도와 응력은 간단하게 구하여질 수 있다. 여기서는 변위까지만 구하여 그 결과를 도시하였다.

Fig. 10, 11, 12에 각각  $A^\circ/O^\circ/A^\circ$ 에 따라 변하는 3적층 원통 셸의 반경방향, 축방향 및 원주방향 변위의 정해석 결과를 도시하고, Fig. 13에는 반경방향 변위의 동해석 결과를 도시하였다. Table 2

## 6. 결 론

축방향으로는 1차원 선형 원추 셸요소를 도입한 유한요소법과 원추방향으로는 Fourier 조화식으로 표현되는 변위와 하중을 정의하여 하이버가도, 경계조건 및 하중형태 등의 제약조건으로 인한 기존의 국한된 해석방법을 탈피하여 일반적인 적층된 복합재료 얇은 셸 구조물 문제의 정, 동 특성을 비교적 용이하게 구할 수 있었다.

하이버가도, 경계조건 및 하중형태의 변화에 따라 적층된 복합재료 원통 셸의 수치예를 제시하고 NASTRAN 수치결과 및 기존 문헌들과 비교하여, 본 결과의 타당성을 입증함은 물론 복잡한 형태의 하중을 받는 적층된 복합재료 셸 문제도 Fourier 조화수로 표시되는 하중을 적절히 조합하므로써 해결 가능하였다.

## 참 고 문 헌

- (1) Pagano, N. J. and Whitney, J. M., 1970, "Geometric Design of Composite Cylindrical Characterization Specimens", *J. of Composite Materials*, Vol. 4, pp. 360~378.
- (2) Vicario, A. A. and Rizzo, R. R., 1970, "Effect of Length on Laminated Thin Tubes under Combined Loading", *J. of Composite Materials*, Vol. 4, pp. 273~277.
- (3) Reuter, R. C. Jr., 1972, "Analysis of Shells under Internal Pressure", *J. of Composite Materials*, Vol. 6, pp. 94~113.
- (4) Uemura, M. and Fukunaga, H., 1970, "Stress Distributions in Laminated Composite Cylinders under Internal Pressure", *Advances in Composite Materials*, 3rd., International Conferences on Composite Materials, pp. 783~795.
- (5) Yang, T. Y. et al., 1987, "Free and Forced Non-linear Dynamics of Composite Shell Structures", *J. of Composite Materials*, Vol. 21, pp. 898~909.
- (6) Sheinman, I. and Greif, S., 1984, "Dynamic Analysis of Laminated Shells of Revolution", *J. of Composite Materials*, Vol. 18, pp. 200~215.
- (7) Sheinman, I. and Weissman, S., 1987, "Coupling between Symmetric and Antisymmetric Modes in Shells of Revolution", *J. of Composite Materials*, Vol. 21, pp. 988~1007.
- (8) 이영신 등, 1986, "직교이방성 복합재료 원통 셸의 자유진동 해석", *대한기계학회논문집*, 제 10 권, 제 5 호, pp. 758~769.
- (9) 이영신 등, 1986, "적층 직교이방성 외팔 원통 셸의 자유진동 해석", *대한기계학회논문집*, 제 10 권, 제 6 호, pp. 929~936.
- (10) 이영신 등, 1988, "CFRP 적층 원통셸의 진동해석", *대한기계학회논문집*, 제 12 권, 제 4 호, pp. 670~674.
- (11) 이영신 등, 1989, "복합재료 원추 셸의 진동해석", *대한기계학회논문집*, 제 13 권, 제 4 호, pp. 595~603.
- (12) 조창민, 홍창선, 1985, "적층 원통 셸의 유한요소 해석", *한국항공우주학회지*, 제 13 권, 제 2 호, pp. 17~31.
- (13) Biggs, J. M., 1964, "Introduction to Structural Dynamics", McGraw-Hill, New York.
- (14) Bathe, K. J., 1982, "Finite Element Procedures in Engineering Analysis", Prentice-Hall, New Jersey.
- (15) Kraus, H., 1967, "Thin Elastic Shells", John Wiley & Sons, New York.
- (16) Agarwal, B. D. and Broutman, L. J., 1980, "Analysis and Performance of Fiber Composites", John Wiley & Sons, New York.
- (17) Jones, R. M., 1975, "Mechanics of Composite Materials", McGraw-Hill, New York.
- (18) Zienkiewicz, O. C., 1971, "The Finite Element Method in Engineering Science", McGraw-Hill, London.
- (19) Schwartz, M. M., 1984, "Composite Materials Handbook", McGraw-Hill, New York.
- (20) Leissa, A. W., 1973, "Vibration of Shells", NASA SP-288.
- (21) Seide, P., 1975, "Small Elastic Deformation of Thin Shells", Noordhoff International Publishing.
- (22) Gibson, J. E., 1980, "Thin Shells", Pergamon Press.
- (23) Soedel, W., 1981, "Vibrations of Shells and Plates", Marcel Dekker, Inc., New York.
- (24) Warburton, G. B., 1976, "The Dynamical Behaviour of Structures", Pergamon Press.
- (25) Shivakumar, K. N. and Murty, A. V. K., 1978, "A High Precision Ring Element for Vibrations of Laminated Shells", *J. of Sound and Vibration*, Vol. 58(3), pp. 311~318.
- (26) Grant, J. E. and Gabrielson, V. K., 1978, "Shell Shock Structural Code — 3rd. Edition", SAND 77-8276.

부 록 A

$$\begin{aligned}
 [W_1^{(e)}] &= \\
 (3 \times 8) & \left[ \begin{array}{cccc}
 -1/l & 0 & 0 & 0 \\
 (1-\xi)\sin\phi/(2r) & n(1-\xi)/(2r) & (2-3\xi+\xi^3)\cos\phi/(4r) & l(1-\xi-\xi^2+\xi^3)\cos\phi/(8r) \\
 -n(1-\xi)/(2r) & -1/l & 0 & 0 \\
 -n(1-\xi)/(2r) & -(1-\xi)\sin\phi/(2r) & 0 & 0 \\
 \\ 
 1/l & 0 & 0 & 0 \\
 (1+\xi)\sin\phi/(2r) & n(1+\xi)/(2r) & (2+3\xi-\xi^3)\cos\phi/(4r) & l(-1-\xi+\xi^2+\xi^3)\cos\phi/(8r) \\
 -n(1+\xi)/(2r) & -1/l & 0 & 0 \\
 -n(1+\xi)/(2r) & -(1+\xi)\sin\phi/(2r) & 0 & 0
 \end{array} \right] \quad (A. 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [W_2^{(e)}] &= \\
 (3 \times 8) & \left[ \begin{array}{cccc}
 0 & 0 & -6\xi/l & -(-1+3\xi)/l \\
 0 & n(1-\xi)/(2r^2) & n^2(2-3\xi+\xi^3)/(4r^2) & n^2l(1-\xi-\xi^2+\xi^3) \\
 0 & \times \cos\phi & -(-3+3\xi^2)\sin\phi/(2rl) & -(-1-2\xi+3\xi^2)\sin\phi/(4r) \\
 0 & -\cos\phi/(rl) & n(-3+3\xi^2)/(rl) & n(-1-2\xi+3\xi^2)/(2r) \\
 0 & (1-\xi)\sin\phi\cos\phi/r^2 & -n(2-3\xi+\xi^3)\sin\phi/(2r^2) & -nl(1-\xi-\xi^2+\xi^3)\sin\phi/(4r^2) \\
 \\ 
 0 & 0 & 6\xi/l^2 & -(1+3\xi)/l \\
 0 & n(1+\xi)/(2r^2) & n^2(2+3\xi-\xi^3)/(4r^2) & n^2l(-1-\xi+\xi^2+\xi^3)/(8r^2) \\
 0 & \times \cos\phi & -(3-3\xi^2)\sin\phi/(2rl) & -(-1+2\xi+3\xi^2)\sin\phi/(4r) \\
 0 & \cos\phi/(rl) & n(3-3\xi^2)/(rl) & n(-1+2\xi+3\xi^2)/(2r) \\
 0 & -(1+\xi)\sin\phi\cos\phi/r^2 & -n(2+3\xi-\xi^3)\sin\phi/(2r^2) & -nl(-1-\xi+\xi^2+\xi^3)\sin\phi/(4r^2)
 \end{array} \right] \quad (A. 2)
 \end{aligned}$$

$[W_1^{(e)}]$ ,  $[W_2^{(e)}]$  성분  $W_{1j}$ ,  $W_{2j}$ ,  $W_{3j}$  ( $j=1, \dots, 8$ )에 각각  $\cos n\theta$ ,  $\cos n\theta$ ,  $\sin n\theta$ 를 곱하여야 한다. 비대칭 변형도-변위 행렬  $[W_1^{(e)}]$ 와  $[W_2^{(e)}]$ 는 상기 행렬에서  $n$ 대신에  $-n$ 을 대입하고,  $\cos n\theta$ 와  $\sin n\theta$ 대신에  $\sin n\theta$ 와  $\cos n\theta$ 를 대입하면 된다.

식(13. c)는 다음과 같이 전개된다.

$$[W_\epsilon^{(e)}] = [W_1^{(e)} W_1^{(e)}] = [\text{csn}] \begin{bmatrix} \overline{W}_1^{(e)} & 0 \\ 0 & \overline{W}_1^{(e)} \end{bmatrix} \quad (A. 3)$$

$$[W_x^{(e)}] = [W_2^{(e)} W_2^{(e)}] = [\text{csn}] \begin{bmatrix} \overline{W}_2^{(e)} & 0 \\ 0 & \overline{W}_2^{(e)} \end{bmatrix} \quad (A. 4)$$

여기서,

$$[\text{csn}] = \begin{bmatrix} \cos n\theta & 0 & 0 & \sin n\theta & 0 & 0 \\ 0 & \cos n\theta & 0 & 0 & \sin n\theta & 0 \\ 0 & 0 & \sin n\theta & 0 & 0 & \cos n\theta \end{bmatrix} \quad (A. 5)$$

$[A']$  행렬은 다음과 같이 표시되고,  $[B']$ 와  $[D']$ 행렬은  $[A]$  대신에  $[B]$ 와  $[D]$ 를 각각 대입하면 된다.

$$[A'] = \int_0^{2\pi} [\text{csn}]^T [A] [\text{csn}] d\theta \quad (A. 6)$$

## 부 록 B

변환 행렬  $[\phi]$ 는 다음과 같이 표시된다.

$$[\phi] = \begin{bmatrix} \psi' & 0 \\ 0 & \psi' \end{bmatrix} \quad (\text{B. 1})$$

$(16 \times 16)$

$$[\psi'] = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \phi & 0 & -\sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \phi & 0 & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(B. 2)