

<論 文>

## 접촉을 고려한 3차원 형상의 금형에 의한 박판성형의 강소성 유한요소해석

양 동 열\* · 정 완 진\* · 김 용 환\*\*

(1989년 8월 23일 접수)

### Rigid-Plastic Finite Element Analysis of Sheet Metal Forming with Three Dimensional Dies Considering Contact

Dong-Yol Yang, Wan Jin Chung and Yong Hwan Kim

**Key Words :** Rigid-Plastic Finite Element Method(강소성 유한요소법), Contact Treatment (접촉처리), Skew Boundary Condition(경사면경계조건), Stretch Forming(신장성형), Natural Convected Coordinate System(국부 질점좌표계)

#### Abstract

Process modelling of sheet metal forming with contact is carried out by using the rigid-plastic finite element method based on the membrane theory. The sheet material is assumed to possess normal anisotropy and to obey Hill's new yield criterion and its associated flow rule. An improved method of contact treatment is developed in which skew boundary condition is successively used during iteration. A simple but effective contact algorithm to decide the proper contact region is also suggested. In order to verify the validity of the developed method, axisymmetric stretching is analyzed and compared with the available axisymmetric FEM results. As three dimensional applicaions, two kinds of stretch forming are analyzed. The computational results are compared with the experiments. The comparison shows that the present method can be used effectively in the analysis of three-dimensional stretch forming.

#### 기 호 설 명

<p><math>A</math> : 박판의 면적</p> <p><math>\epsilon_{\alpha\beta}</math> : Lagrangian 변형도</p> <p><math>e_x, e_y, e_z</math> : 경사좌표계 (skew coordinate system)의 축방향의 단위벡터</p> <p><math>F</math> : 유체압력을 제외한 외력에 의한 절점력</p> <p><math>g_{ij}</math> : 질점좌표계 (convected coordinate system) 에서의 metric tensor</p> <p><math>K</math> : 강성행렬</p> <p><math>m</math> : Hill의 신이방성이론에서의 지수</p>	<p><math>n</math> : 가공경화지수</p> <p><math>P</math> : 유체압력에 의한 절점력</p> <p><math>r</math> : 수직이방성계수</p> <p><math>R</math> : 불균형 힘 벡터</p> <p><math>t</math> : 박판의 두께</p> <p><math>t</math> : 시간 <math>t_0 + \tau</math>에서의 단위면적당의 표면력 벡터</p> <p><math>t_0, t_0 + \tau</math> : 각 변형단계에서의 변형의 시작과 끝 시간</p> <p><math>T</math> : 좌표변환행렬</p> <p><math>U</math> : 직교좌표계에서 총합된 절점변위벡터</p> <p><math>\bar{U}</math> : 변환된 좌표계에서의 총합된 절점변위벡터</p> <p><math>Ur</math> : 절점의 금형에 대한 상대변위속도</p>
--	---

\*정회원, 한국과학기술원 생산공학과

\*\*정회원, 충남대학교 공과대학 기계공학과

- $u, v$  : 금형곡면을 묘사하는 매개변수
- $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$  : 변환된 경사좌표계 (skew coordinate system)
- $\beta$  : 감속계수
- $\Delta \bar{\epsilon}$  : 한 단계에서의 유효 변형도증분
- $\theta^a$  : 임의의 질점좌표계 (convected coordinate system)
- $\mu$  : Coulomb 마찰계수
- $\xi^a$  : 국부 질점좌표계 (local convected coordinate system)
- $\bar{\sigma}$  : 유효 응력
- $\sigma_n$  : 금형표면에 수직인 방향의 접촉 응력
- $\phi$  : 금형표면에 수직인 방향의 접촉 간극

상첨자

- o : 시간  $t_0$  에서의 상태
- $\tau$  : 시간  $t_0 + \tau$ 에서의 상태

1. 서 론

대부분의 박판성형은 금속과 박판간의 접촉을 수반한다. 금형에 의한 박판성형은 금형과 박판금속이 접촉하여 금형의 형상을 따라 박판금속이 변형되고 이 때 마찰력이 변형에 큰영향을 미친다. 박판성형은 소재의 부피에 비해 표면적이 크기 때문에 특히 마찰력에 크게 영향을 받는다. 박판소성변형은 이에 더하여 기하학적 비선형과 재료적 비선형이 수반되어 그 해석이 쉽지 않다. 따라서 박판금속의 이러한 비선형을 고려한 변형해석 방법과 아울러 금형의 형상과 마찰에 의해서 주어지는 접촉조건을 만족하기 위한 효과적인 방법을 필요로 한다.

최근에 박판성형의 해석에 강소성유한요소법 (rigid-plastic finite element method)이 성공적으로 적용되고 있다. 강소성 유한요소법은 소성변형에 비해 탄성변형이 무시할 수 있을 정도로 작다고 가정함으로써 매 단계마다 재료의 항복을 검증하는 탄소성 유한요소법에 비하여 보다 큰 계산단계를 사용할 수 있어 계산 시간을 줄일 수 있는 잇점이 있다. 강소성 유한요소법은 Kobayashi와 김재학<sup>(1)</sup> 등이 축대칭 박판성형의 해석에 대한 수식을 유도하고 정수압 벌징 (hydrostatic bulging), 신장성형 (stretch forming), 딥 드로잉 (deep drawing) 등에 적용하였다. Toh와 Kobayashi<sup>(2)</sup>는 박판의 3

차원 대변형에 대하여 최초로 강소성 유한요소수식을 유도하고 이를 사각형 컵의 딥 드로잉에 적용하였다. 그러나 수식화과정에서 Cauchy응력텐서를 임의로 2차 Piola-Kirchhoff 응력텐서로 대체함으로써 보다 타당한 수식화가 요청되었다. Wang<sup>(3)</sup>은 한 변형단계 동안에 변형경로를 가정하여 에너지법으로 강소성 유한요소수식을 유도하고 정수압 벌징과 신장성형에 적용하였다. 양동열과 김용진<sup>(4,5)</sup>은 한 변형단계동안의 변형경로에 대한 가정과 주질점 좌표계를 사용하여 보다 일반적인 수식화를 이룩하고 정수압벌징에 이를 적용하여 그 타당성을 보였다. 또 이를 평면 이방성 축의 회전을 고려하여 평면 이방성 박판재료에까지 확장하였으며 딥 드로잉의 플랜지 변형해석에 성공적으로 적용되었다<sup>(6,7)</sup> 정완진등<sup>(8)</sup>은 같은 방법을 사용하고 국부 질점 좌표계 (natural convected coordinate system)을 도입하여 Hill의 신이방성 이론을 따르는 재료에 대하여 강소성 유한요소법을 유도하고 알루미늄, 구리, 황동등의 타원형 격막의 정수압 벌징을 해석하였다. 이러한 강소성 유한요소법의 박판성형에의 적용은 많은 가능성을 제시 하였지만 실제공정의 해석을 위해서는 앞으로 여러가지 문제점이 보완되어야 한다. 그 중에서도 3차원 형상의 금형에 의한 공정을 해석하기 위해서는 보다 체계적이고 적용하기 쉬운 3차원 접촉처리방법이 필요하다고 생각된다.

두 물체간의 접촉 변형시의 접촉처리 방법은 중요한 역학적 관심사로서 지금까지 많은 연구가 이루어져 왔는데 다음과 같이 크게 두 가지로 분류할 수 있다. 첫째는 시행착오법 (trial and error method)에 의하여 접촉조건을 만족시키는 방법이다. 이 방법에서는 접촉경계조건을 직접 유한요소 방정식에 포함시켜 얻어진 해가 접촉조건을 만족할 때까지 축차적으로 해를 구한다. 이 방법은 접촉조건을 만족여부를 검토하는 방법에 따라 접촉영역에서 불침투조건을 만족하도록 기하적 경계조건을 직접 유한요소방정식에 대입하는 방법<sup>(9,10)</sup>과 두 접촉영역사이를 연결하는 특수 간격요소를 사용하는 방법이 있다<sup>(11)</sup>. 두번째는 접촉조건을 제한조건으로 하는 최소화문제에 전환하여 푸는 방법이다. 이 방법으로는 수학적 계획법<sup>(12-14)</sup>과 벌책함수법 (penalty constant method)<sup>(15,16)</sup>이 널리 사용된다. 수학적 계획법에 의한 방법은 유일한 접촉상태를 구할 수 있는 장점이 있으나 마찰현상에 의해 도입

되는 비선형을 수식화하기가 쉽지 않다. 또 벌책함 수법은 문제에 따라 적절한 벌책상수를 구하기 어려운 난점이 있다. 시행착오법에 의한 방법은 해의 유일성이 보장되지 않는으나 마찰을 고려하기가 용이하다. 따라서 본 논문에서는 시행착오법의 범주 내에서 박판성형의 강소성해석에 적용하기 위한 보다 효과적인 방법을 개발하고자 한다.

본 논문에서는 기존의 금속성형의 유한요소해석에서 사용한 바 있는 기하적경계조건을 직접 유한요소방정식에 대입하는 방법들을 비교검토하고 3차원박판성형에 적용하기 위하여 개선된 방법을 개발하였다. 경사면경계조건(skew boundary condition)을 이용하여 기하적경계조건과 마찰경계조건을 효과적으로 고려하였다. 마찰법칙은 수정 Coulomb마찰조건을 사용하였다. 또, 시행착오법에서 적합한 접촉영역을 보다 능률적으로 결정하기 위한 반복계산구조를 제안하였다. 개발된 접촉처리방법의 타당성을 검토하기 위하여 반구형편치에 의한 축대칭 신장성형(stretch forming)을 Hill의 신이방성이론을 이용한 강소성유한요소법<sup>(6)</sup>과 개발된 접촉처리방법을 사용하고 기존의 해석결과와 비교하였다. 또한 3차원예제로써 두 가지 신장성형에 대하여 해석하고 실험결과와 비교하여 본 방법의 유용성에 대하여 검토하였다.

2. 이 론

2.1 강소성 유한요소법

3차원 박판성형을 효과적으로 해석하기 위해서는 기하학적, 재료적 비선형을 고려한 해석이 필수적이다. 양동열과 김용환<sup>(5)</sup>은 Hill의 2차 항복 이론을 사용하고 주질점좌표계(principal convected coordinate system)와 한 단계동안의 변형경로에 대한 가정을 사용하여 위와 같은 점을 고려하여 수직이방성(normal anisotropy)의 가정하에서 박막요소를 사용하여 3차원박판성형에 대한 강소성 유한요소법을 수식화하였다. 정완진등<sup>(6)</sup>은 Hill의 신이방성이론을 따르는 재료에 대하여 강소성유한요소법을 유도하였다. 본 논문에서는 정완진등에 의해 개발된 유한요소법을 사용하였다.

변형속도에 무관한 재료가 Fig. 1과 같이  $t_0$ 에서  $t_0 + \tau$ 까지 변형할 때 두께 방향의 물리량의 변화를 무시하여 재료의 응력상태를 평면응력상태로 가정하면 변형속도에 무관한 비압축성박판재료가  $t_0 + \tau$

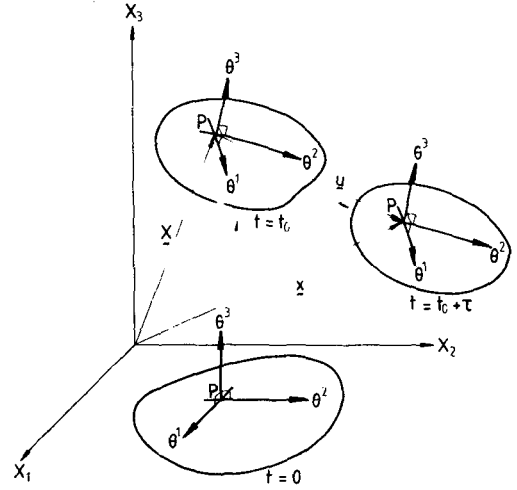


Fig. 1 Surface convected coordinate systems in the sheet deformation process

에서 평형이 성립하기 위한 필요충분조건은 가상일 원리에 의해 다음과 같이 주어진다<sup>(6)</sup>. 이 가정은 두께에 비해서 골률변형이 큰 대부분의 박판변형에서는 매우 타당한 가정이라고 생각된다.

$$\int_{0A}^{\tau} \bar{\sigma} \delta(\Delta \bar{\epsilon})^0 t^0 dA - \int_{\tau} \delta u \cdot \delta u^{\tau} dS = 0 \quad (1)$$

이 때 식 (1)에서  $\tau$ 동안의 유효변형도 증분은 주질점 좌표계와 경로에 대한 가정으로부터 다음과 같이 불변량의 함수로 나타낼 수 있다<sup>(6)</sup>.

$$\Delta \bar{\epsilon} = \frac{[2(1+r)]^{1/m}}{2} \left\{ \frac{1}{(1+2r)^{1/(m-1)}} \phi_1^{m/2(m-1)} + \phi_2^{m/2(m-1)} \right\}^{(m-1)/m} \quad (2)$$

식 (2)에서  $\phi_1$ 과  $\phi_2$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{4} \left[ \ln \frac{\tau g_1}{g_2} - \ln \frac{\tau g_2}{g_1} \right]^2 \\ &\cong -4\bar{E}_2 + \bar{E}_1^2 + 8\bar{E}_1\bar{E}_2 + \frac{32}{3}\bar{E}_2^3 - 2\bar{E}_1^3 \\ &\quad - \frac{52}{3}\bar{E}_1^2\bar{E}_2 + \frac{11}{3}\bar{E}_1^4 \end{aligned} \quad (3-a)$$

$$\begin{aligned} \phi_2 &= \frac{1}{4} \left[ \ln \frac{\tau g_1}{g_1} + \ln \frac{\tau g_2}{g_2} \right]^2 \\ &\cong 4\bar{E}_1\bar{E}_2 + \bar{E}_1^2 + 4\bar{E}_2^2 - 2\bar{E}_1^3 - 2\bar{E}_2^3 \\ &\quad - 12\bar{E}_1^2\bar{E}_2 + \frac{11}{3}\bar{E}_1^4 \end{aligned} \quad (3-b)$$

여기서  $\bar{E}_1$ 와  $\bar{E}_2$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$\bar{E}_1 = \epsilon_{11}^0 g^{11} + \epsilon_{22}^0 g^{22} + 2\epsilon_{12}^0 g^{12} \quad (4-a)$$

$$\bar{E}_2 = (\epsilon_{11}\epsilon_{22} - \epsilon_{12}\epsilon_{21}) ({}^0g^{110}g^{22} - {}^0g^{120}g^{12}) \quad (4-b)$$

식 (4)에서 라그랑지안 변형도(Lagrangian strain)  $\epsilon_{\alpha\beta}$ 는 Fig. 2의 유한요소의 표면국부절점좌표계(surface natural convected coordinate system)에서 다음과 같이 주어진다.

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} ({}^r g_{\alpha\beta} - {}^0 g_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2} (u_{\alpha|\beta} + u_{\beta|\alpha} + u^r|_{\alpha} u_{r|\beta})$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial X_i}{\partial \xi^{\beta}} + \frac{\partial X_i}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial u_i}{\partial \xi^{\beta}} \right] + \frac{\partial u_i}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial u_i}{\partial \xi^{\beta}} \quad (5)$$

식 (5)에서 (|)는 covariant미분을 의미한다. 식 (1)~(5)를 이용하고 유한요소수식화 과정을 적용하면 다음과 같은 비선형 방정식을 얻는다.

$$Q(\bar{U}) = P(\bar{U}) + F \quad (6)$$

여기서  $P(\bar{U})$ 는 압력에 의한 절점력을 나타내고  $F$ 는 그 외의 힘에 의한 절점력을 나타내며 식 (1)의 첫째항에 해당하는  $Q(\bar{U})$ 는 다음과 같다.

$$Q(\bar{U}) = \sum \int_{\Omega_A(t_0)} \bar{\sigma} \frac{\partial \Delta \bar{E}}{\partial \bar{U}^T} {}^0 t_0^0 dA \quad (7)$$

여기서 각 상수와 자세한 수식의 유도는 참고문헌 (8)에 자세히 나와 있다. 식 (6)은 비선형 방정식이므로 식 (8)과 같이 선형화하여 뉴턴-랩슨(Newton Raphson) 방법으로 해를 구한다.

$$\frac{\partial}{\partial \bar{U}^T} [Q(\bar{U}) - P(\bar{U})] | \bar{v} = \bar{v}_{(i-1)} \cdot \Delta \bar{U}_{(i)}$$

$$= F - Q(\bar{U}_{(i-1)}) + P(\bar{U}_{(i-1)}) \quad (8)$$

여기서  $i$ 는 반복계산 횟수를 나타낸다. 식 (8)로부터 다음과 같은 유한요소 방정식을 얻을 수 있다.

$$K \Delta U = R \quad (9)$$

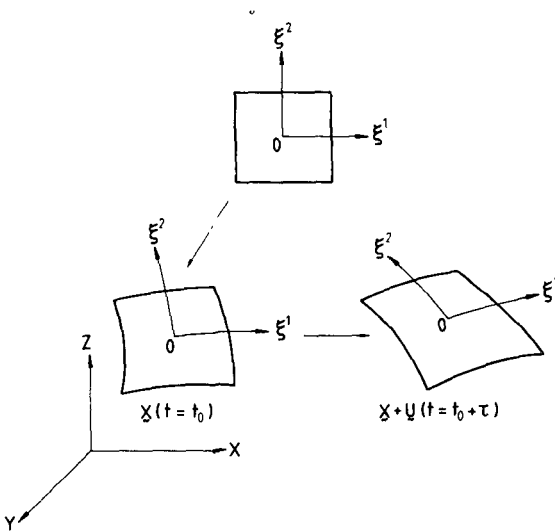


Fig. 2 Natural convected coordinate systems in the sheet deformation process

이때 매번의 반복계산후에 변위벡터는 다음 식에 의해 수정된다.

$$\bar{U}_{(i)} = \bar{U}_{(i-1)} + \beta \Delta \bar{U}_{(i)} \quad (10)$$

여기서  $\beta$ 는 감속계수로 0에서 1사이의 값을 가진다. 소재내의 변형이 어느정도 진행되면 변형의 국부화현상이 생겨 소재내의 어느 일부분만 변형이 생기게 되고 다른부분에서는 해중이 일어나게 된다. 본 연구에서 사용하는 강소성 재료의 특성방정식은 해중의 경우 그곳에서의 응력을 알 수 없어 해가 발산하게 된다. 이러한 어려움을 수치적으로 해결하기 위하여 Osakada등<sup>(17)</sup>이 사용한 방법을 채용하여 변형률 증분을 식 (11)과 같이 수정하여 사용하였다.

$$d\bar{\epsilon} = \sqrt{d\bar{\epsilon}^2 + d\bar{\epsilon}_0^2} \quad (11)$$

이로써 해중에 의한 실제적인 변형률을 결정할 수는 없지만 제 하중이 생기는 경우에도 그에 해당하는 유효응력을 근사적으로 구할 수 있어 해의 발산을 막을 수 있다. 이 때 구성방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\bar{\sigma} = \frac{\bar{\sigma}_0}{\sqrt{d\bar{\epsilon}^2 + d\bar{\epsilon}_0^2}} d\bar{\epsilon} \quad (12)$$

2.2 경사면 경계조건을 이용한 접촉처리방법

박막요소를 사용한 유한요소법에서 접촉문제를 고려할 때 요소내에서 수직응력을 구할수 없으므로 절점단위로 접촉을 고려하는 것이 편리하다. Fig. 3과 같이 두 물체가 접촉할 때  $t_0 + \tau$ 에서 두 물체 사이의 수직간극을  $\phi$ 수직응력을  $\sigma_n$ 이라 하면 접촉조건은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sigma_n \cdot \phi = 0 \quad (13-a)$$

$$\phi \geq 0 \quad (13-b)$$

$$\sigma_n \leq 0 \quad (13-c)$$

기하학적 경계조건을 유한요소 방정식에 직접 대입하는 방법은 다음과 같은 과정에 의해 접촉조건을 만족시킨다. 일단 접촉상태로 간주되는 절점에 대해 평형반복계산동안에 식(13-c)를 만족하도록 제한조건을 부여한다. 반복계산 후에 식(13-b)의 만족여부를 판별한 뒤 만족하지 않으면 접촉상태를



Fig. 3 Contact condition between two bodies

비접촉상태로 수정하여 식(13-a)-(13-b)를 만족할 때까지 반복계산하는 시행착오법에 의하여 접촉조건을 만족시킨다. Kobayashi와 김재학<sup>(1)</sup>은 접촉점을 금형형상에 일치시키기 위하여 금형형상함수  $g(X+U-U_a,t)=0$ 를 선형화한 다음과 같은 수정변위에 대한 1차식을 사용하였다.

$$g(X+U^n-U_a,t) + \frac{\partial g}{\partial U} \cdot (X+U^n-U_a,t) \cdot [\Delta U^n]^T = 0 \quad (14)$$

식(14)는 유한요소 방정식(9)와 함께 뉴턴-랩슨법에 의해 만족된다. Toh와 Kobayashi<sup>(2)</sup>는 이를 3차원 박판성형에까지 확대 적용하였다. 이 방법은  $t_0+r$ 에서 절점의 위치를 금형의 표면형상과 잘 일치시킬 수 있는 잇점이 있으나 매개변수로 표시되는 일반적인 3차원 금형형상을 취급하기가 쉽지 않고 기하학적 경계조건의 고려와 마찰경계조건의 고려가 분리되어 있어 체계적이지 못하고 적용하기가 불편하다. 이 방법에서 식(14)는 3차원공간에서 평면방정식을 의미 하므로 식(14)를 제한조건으로 부여하는 것은 절점의 특정방향의 변위를 미리 규정하는 것과 같다. 따라서 원래의 좌표계를 특정방향을 한 축으로 하는 경사좌표계(skew coordinate system)로 변환한 후 그 방향의 변위를 규정해 주는 방법을 생각할 수 있다. 오수익<sup>(8)</sup>은 2차원 벌크성형(bulk forming)에 대해 금형에 수직인 방향을 한 축으로 하는 경사좌표계를 사용하여 임의의 곡면형상을 고려하였다. 이때 금형에 수직인 방향속도성분을 0으로 하고 해가 수렴한 뒤 시간적분으로부터  $t_0+r$ 에서의 절점위치를 구한 뒤 금형위로 투사(projection)하여 절점의 위치를 수정하여 금형의 형상과 일치하도록 하였다. 이 방법은 역학적인 과정에 의하지 않고 임의의 절점이동이 있게 되므로 오차가 누적되고 대변형이 일어나는 박판성형해석에는 부적합하다. 윤정호등<sup>(19)</sup>은 이를 3차원벌크성형에 확장하여 성공적으로 적용하였다.

본 논문에서는 경사좌표계를 사용하여 3차원형상의 금형에 의한 박판성형해석시 접촉조건을 만족시키는 효율적인 방법을 개발하였다. 3차원상의 임의의 곡면형상은 다음과 같이 매개변수형태로 나타낼 수 있다.

$$\vec{r}(u,v) = X^s(u,v) \mathbf{e}_x + Y^s(u,v) \mathbf{e}_y + Z^s(u,v) \mathbf{e}_z \quad (15)$$

Fig. 4에서 접촉면상에서 접촉점 P에 가장 가까운

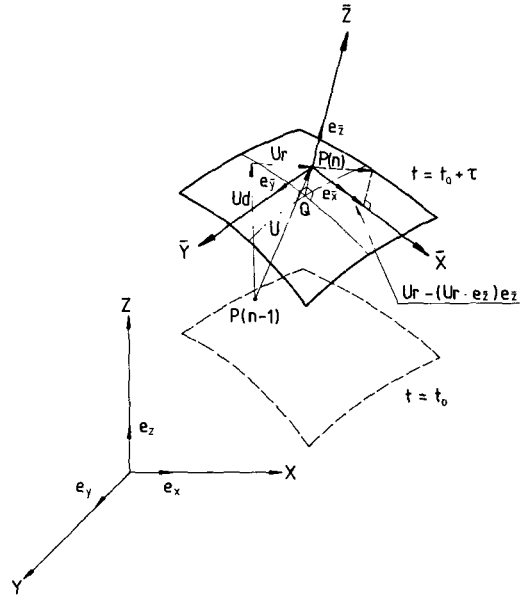


Fig. 4 Treatment of skew boundary condition

Q를 P와 Q사이의 거리를 최소화 함으로써 얻는다.

$$|\overline{QP}|^2 = (X(P) - X^s(u,v))^2 + (Y(P) - Y^s(u,v))^2 + (Z(P) - Z^s(u,v))^2 \quad (16)$$

Fig. 4와 같이 금형표면위의 점 Q에서의 금형바깥 방향의 수직벡터  $n(Q)$ 의 방향을  $e_z$ , 절점 P의 편치에 대한 상대변위  $U_r$ 이  $e_z$ 에 수직인 성분벡터의 방향을  $e_x$ 로 한다. 나머지 한 축의 방향  $e_y$ 는 수직조건으로부터 쉽게 구할 수 있다.

$$e_x = \frac{U_r - (U_r \cdot e_z) e_z}{|U_r - (U_r \cdot e_z) e_z|} \quad (17-a)$$

$$e_y = e_z \times e_x \quad (17-b)$$

$$e_z = \frac{n(Q)}{|n(Q)|} \quad (17-c)$$

여기서  $U_r$ 은 절점의 금형에 대한 상대변위를 나타낸다. 이 때 변환행렬 T는 다음과 같다.

$$\Delta U = T \Delta \bar{U} \quad (18)$$

$$T = \begin{bmatrix} \cos(\bar{X}, X) & \cos(\bar{Y}, X) & \cos(\bar{Z}, X) \\ \cos(\bar{X}, Y) & \cos(\bar{Y}, Y) & \cos(\bar{Z}, Y) \\ \cos(\bar{X}, Z) & \cos(\bar{Y}, Z) & \cos(\bar{Z}, Z) \end{bmatrix} \quad (19)$$

식(19)의 변환행렬을 이용하여 접촉절점에 대하여 유한요소 방정식(9)를 원래의 직교좌표계(X, Y, Z)

로부터 경사좌표계  $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$ 로 변환한다.

$$\bar{K}\Delta\bar{U} = \bar{R}, \bar{K} = T^T K T, \bar{R} = T^T R \quad (20)$$

Fig. 4에서의  $Z(Q)$ 를 식 (20)에  $\Delta U_z(P)$ 로 하여 제한조건을 부여한다. 매번의 반복계산에서 변환행렬은 새로 구해지며  $e_z$ 는 금형에 수직인 방향을 계속 유지한다. 따라서 반복계산이 진전됨에 따라 해가 수렴한다면 금형과 박판의 간극은 급격히 줄어들게 된다. 이때 반복계산중에 금형내부로 파고 드는 절점은 접촉상태로 상태를 변경하여 같은 과정을 밟는다. Coulomb마찰조건을 만족하기 위해 마찰력을 경사좌표계에서 절점력으로 다음과 같이 표시하였다.

$$(F_x)_i = -\frac{2}{\pi} \mu (F_z)_i \tan^{-1}(k|U_{\bar{x}}|) \quad (21)$$

여기서

$$U_{\bar{x}} = U_r - (U_r \cdot e_{\bar{z}}) e_{\bar{z}} \quad (22)$$

여기서  $k$ 는 큰 상수이다. 식 (21)에 의해 생기는 강성행렬에 기여하는 항들은 좌표변환후에 계산되었다. 접촉조건중에서 식 (13-c)를 만족하기 위해서는

접촉절점과 금형사이에 작용하는 절점력이 압축력이어야 한다. 따라서 접촉중인 절점의 바깥방향의 수직력이 음이면 (접촉->비접촉)상태전환을 하여 반복계산한다. 이 때 절점력은 근사적으로 다음과 같이 구해진다.

$$P_z = \sum_{j=1}^n (\Delta U_j K_{zj}) - R_z \quad (23)$$

식 (13-a) ~ (13-c)의 접촉조건을 만족시키기 위한 반복계산구조는 Fig. 5와 같다. 만일  $P_z$ 가 음이면 (접촉->비접촉)으로 절점의 접촉상태를 변경하고 변위벡터를 수정하지 않고 다시 계산한다. 이 때 강성행렬  $K$ 는 마찰력에 의한 부분만 제외하고는 다시 계산할 필요가 없다. 이 방법에 의하면 계산중에 (접촉->비접촉) 전환이 된 절점이 다시 (비접촉->접촉) 전환을 일으키는 경우가 있다. 이 경우 접촉상태가 계속 반복해서 바뀔 수가 있다. 이러한 현상을 안정화시키기 위하여 반복계산중에 접촉상태가 바뀌는 횟수를 일정회수내로 제한하였다. 또한 한 반복계산마다 절점력부호판별에 의한 (접촉->비접촉)상태변환은 1회로 제한하였다. 본논문에서의 경사좌표계를 사용한 접촉처리방법은 임의의 3차원곡면에 대해 적용하기가 쉽고 접촉조건을 용이하게 만족시킬 수 있다.

### 3. 예제 및 토론

#### 3.1 반구형 펀치에 의한 축대칭 신장성형의 해석

개발된 방법의 타당성과 효율성을 입증하기 위하여 Kobayashi과 김재학<sup>(1)</sup>의 축대칭 강소성 유한요소법에 의한 해와 비교 검토하였다. 이 경우에 사용된 데이터는 다음과 같다.

- 재료 : 2036-T4 알루미늄합금
- 응력 변형도 특성 :  $\bar{\sigma} = 86,000 (\bar{\epsilon})^{0.222}$  psi
- 수직 이방성 계수 : 0.685
- 박판두께 : 0.05 inch
- 다이 구멍 반경 : 0.80 inch
- 펀치반경 : 0.75 inch
- 마찰계수 :  $\mu = 0$  and  $\mu = 0.2$

이 때 금형의 형상과 계산에 사용된 격자모델은 Fig. 6과 같다. 계산에서 최대펀치행정은 0.6 inch 이고 모두 40단계가 소요되었으며 소요된 총 반복계산횟수는 240회이다. 이때 한계산단계에서 최대 유효 변형도 증분은 0.025이내로 제한하였다. Fig.

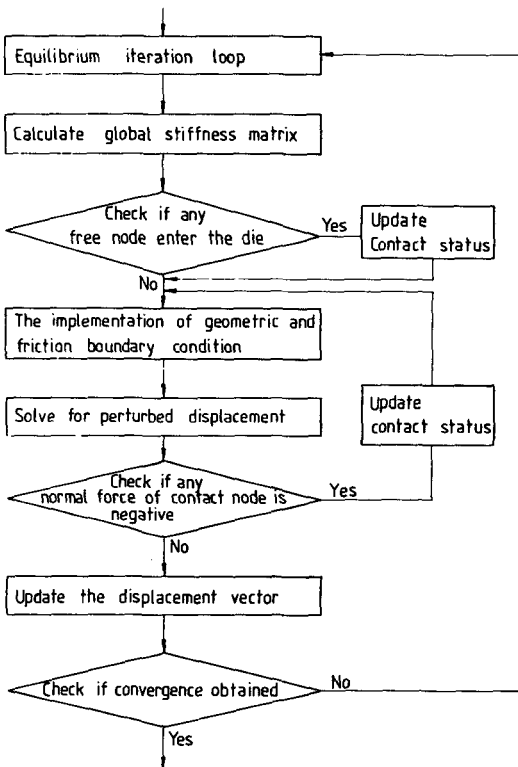


Fig. 5 Contact algorithm to decide the proper contact region

7의 편치행정-하중곡선과 Fig. 8의 두께 변형도 분포의 비교로부터 3차원 해가 축대칭 해와 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. Fig. 9는 반복계산에 따른 결점과 금형표면과의 간격의 변화를 나타낸다. 반복계산횟수가 증가함에 따라 간격이 급격히 감소하여 기하적 경계조건을 용이하게 만족시킴을 알 수 있다.

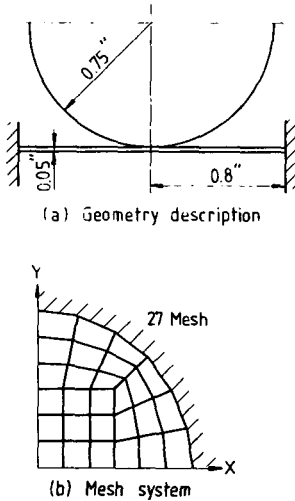


Fig. 6 (a) Geometry of the tooling and (b) finite element mesh for stretching of a circular sheet by a hemispherical punch

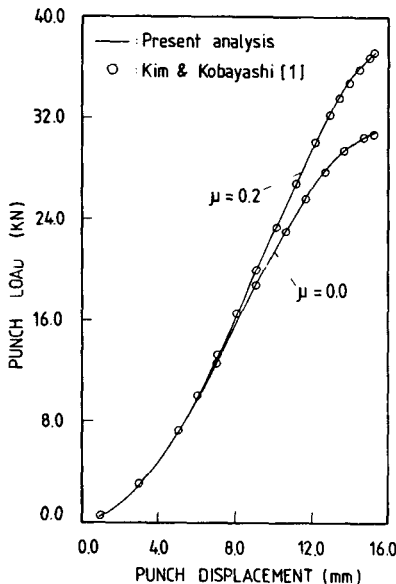


Fig. 7 Comparison of the present FEM results with axisymmetrical solutions for stretching load

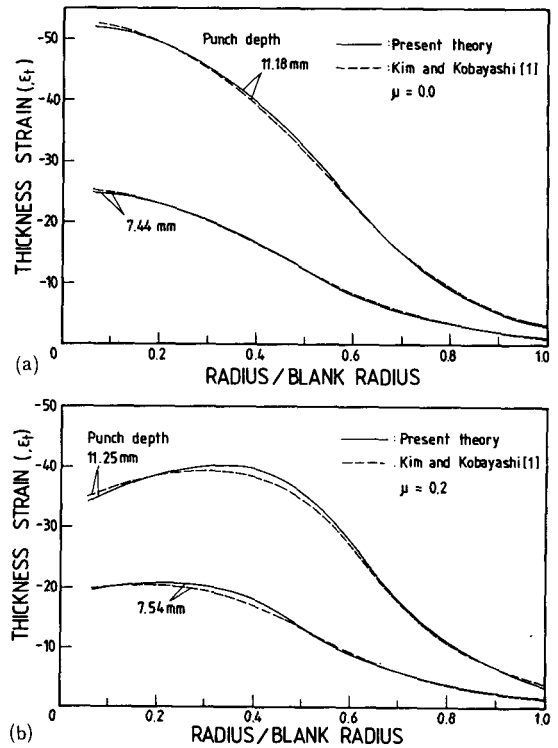


Fig. 8 Comparison of the thickness strain distribution between the computed results and the reported results (a)  $\mu=0.0$  and (b)  $\mu=0.2$

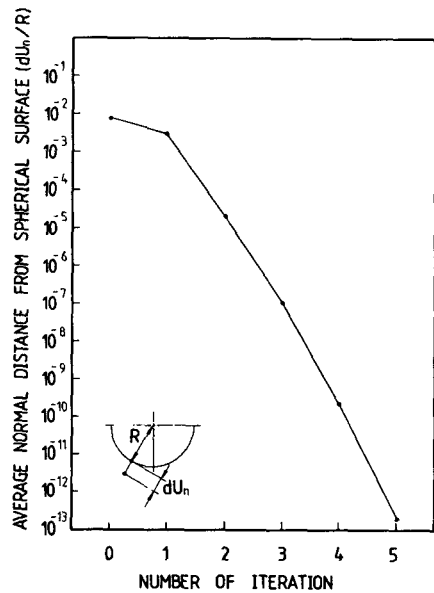


Fig. 9 Typical convergence behaviour in geometric boundary condition : stretching of a circular sheet by a hemispherical punch

3.2 반구형 펀치에 의한 정사각형 소재의 신장성형해석

3차원 예제로써 반구형 펀치에 의한 정사각형 박판의 스트레칭을 해석하고 실험을 수행하여 비교검토하였다. 해석과 실험에 사용된 금형형상과 유한요소모델은 Fig. 10과 같다. 실험에서 소재가 금형 공동부로 빨려 들어가는 것을 방지하기 위하여 높이 5mm, 폭 6mm인 직사각형 비드(bead)를 사용하였다. 질점의 위치를 추적하기 위하여 전기화학적 에칭(electro-chemical etching)을 사용하여 격자를 새기고 변형후에 두께를 측정하였다. 실험과 계산에 사용된 데이터는 다음과 같다.

재료 : SPC-1연강판

응력-변형도 특성 :  $\sigma = 50.545(\bar{\epsilon})^{0.208} \text{Kgf/mm}^2$

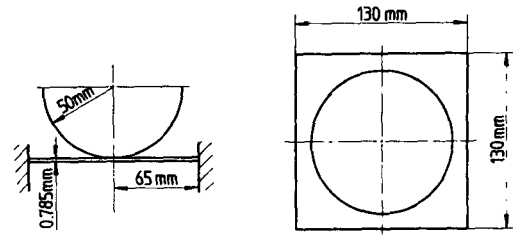
수직 이방성 계수 : 1.398

박판두께 : 0.785mm

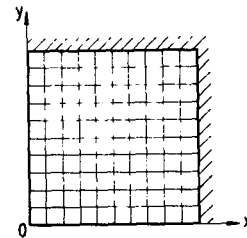
펀치반경 : 50mm

금형 공동부 치수 : 130mm×130mm

시편크기 : 200mm×200mm



(a) Geometry of the punch



(b) 100 elements mesh

Fig. 10 (a) geometry of the tooling and (b) finite element mesh for stretching of a square sheet by a hemispherical punch

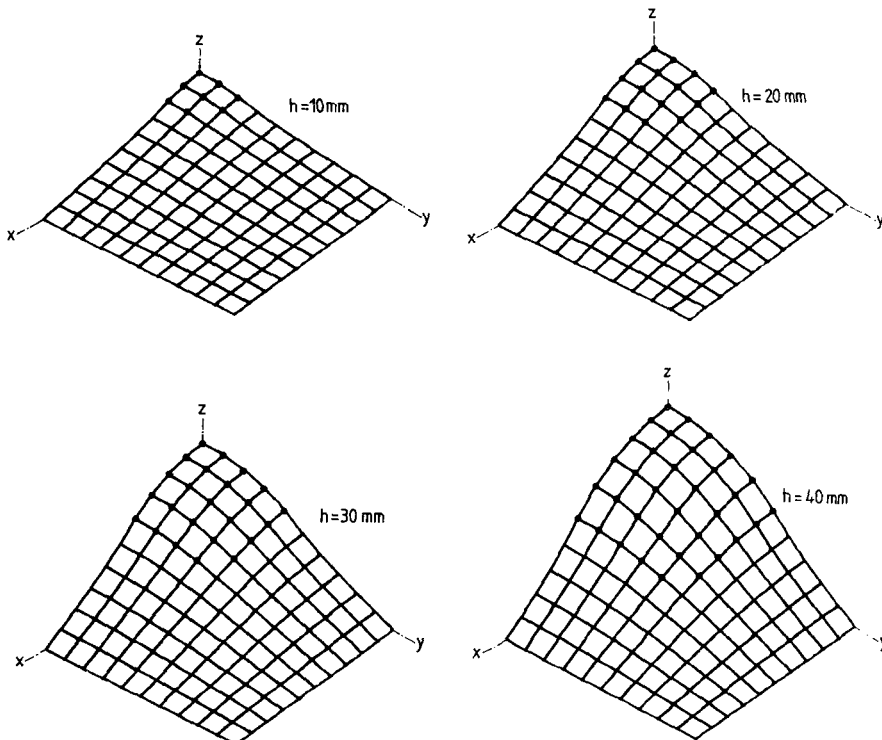


Fig. 11 Deformed mesh by the present simulation : stretching of a square sheet by a hemispherical punch



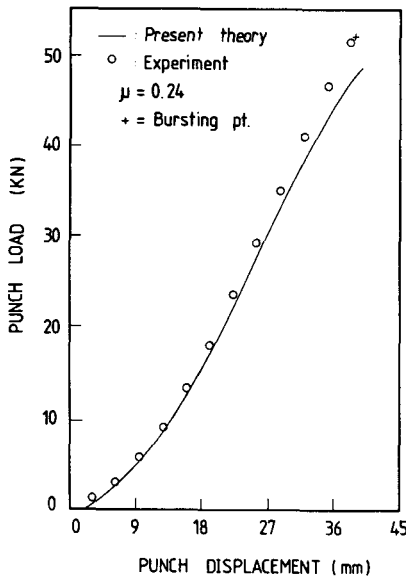


Fig. 12 Comparison of stretching load between the computed results and the experiment : stretching of a square sheet by a hemispherical pu

마찰계수 :  $\mu=0.24$

계산에서 최대편치행정은 40mm이고 계산에는 모두 40단계가 소요되었으며 소요된 총반복계산단계수는 240회이다. Fig. 11은 유한요소해석에 의한 연속적인 변형형상과 접촉영역의 변화를 보여준다. Fig. 12는 편치행정-하중곡선인데 실험과 비교적 잘 일치하고 있으며 변형의 후기에는 다소 차이가 커진다. 이는 변형의 진전에 따라 마찰계수의 변화가 일어났기 때문이라고 생각된다. Fig. 13은 측면 방향과 대각선 방향을 따라 두께 변형도 분포에 대해 해석결과를 실험과 비교한 것인데, 비교적 잘 일치하고 있다. 또 두께변형도가 최대인 지점도 실험과 해석결과가 거의 동일하다.

3.3 직사각형 편치에 의한 원형소재의 성형

Fig. 14에 신장성형을 위한 직사각형 편치의 형상과 유한요소의 형태를 보였다. 재료는 2036-T4 알루미늄으로 반구형 편치에 의한 축대칭 신장성형의 경우와 동일하다.

편치의 측면 방향(\*)과 대각선 방향(+ )을 따른 축방향 변형률의 변화가 각각 Fig. 15(a)와 Fig. 15(b)에 주어졌는데 편치 모서리 부근에서 가장 변형

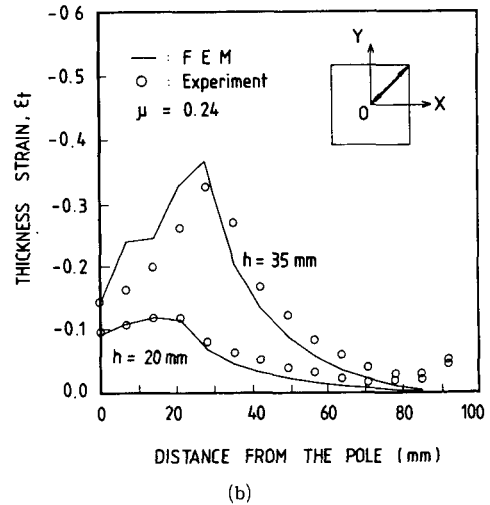
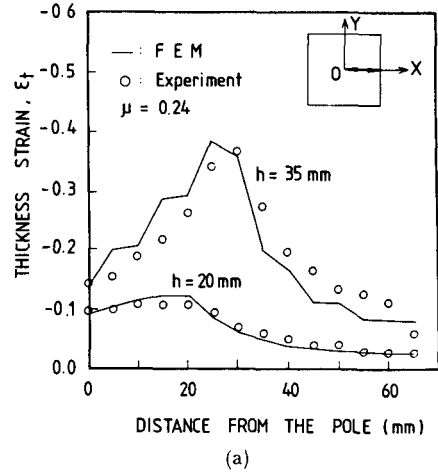


Fig. 13 comparison of the thickness strain distribution between the computed results and the experiment (a) along the transverse direction and (b) along the diagonal direction : stretching of a square sheet by a hemispherical punch

률이 높은것을 알 수 있다. 또 마찰계수의 증가에 따라 변형이 국부적으로 일어나 최대 변형률이 증가한 것을 알 수 있다. 또한 측면 방향에 비해 대각선 방향을 따른 변형의 국부화 현상이 보다 극심한 것을 알 수 있다. Fig. 16은 편치 행정이 22.5 mm일 때의 소재의 변형된 형상을 나타내며 Fig. 17은 유효변형률의 분포를 보인다. (마찰계수 0.05) 편치의 모서리 부분에서의 변형의 집중 현상을 알 수 있으며 이로써 변형의 국부화가 마찰보다는 편

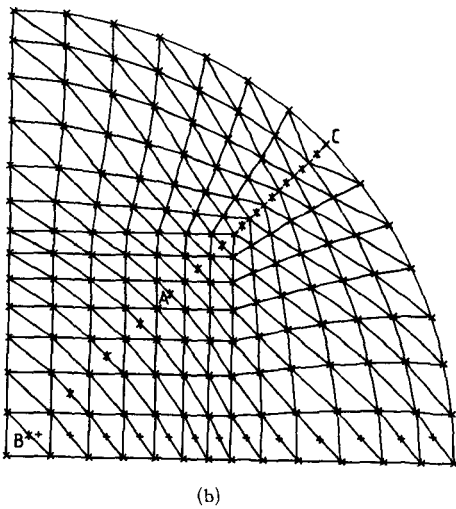
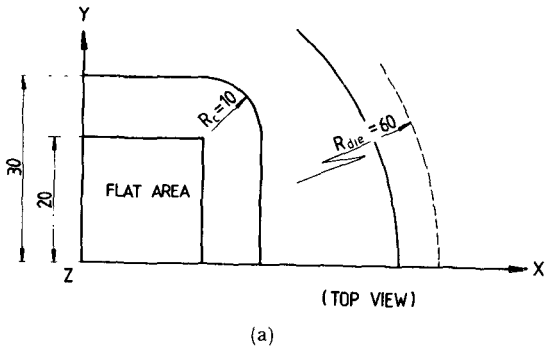
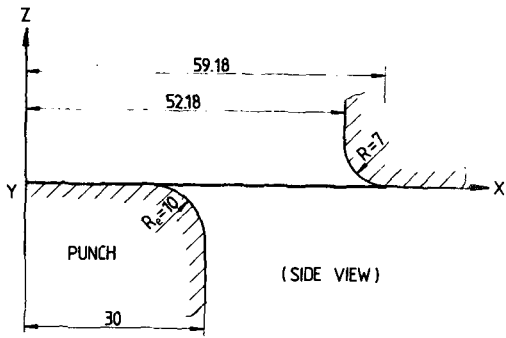


Fig. 14 (a) geometry of the tooling and (b) finite element mesh for stretching of a circular sheet by a square punch

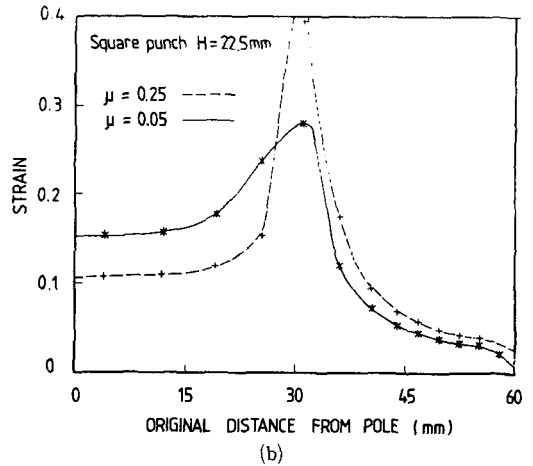
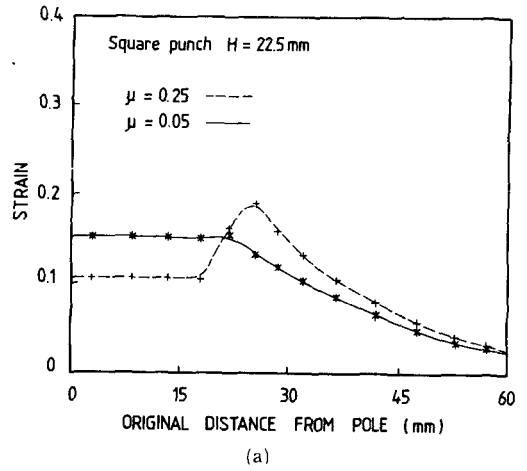


Fig. 15 Effective strain distribution (a) along the transverse direction and (b) along the diagonal direction : stretching of a circular sheet by a square punch

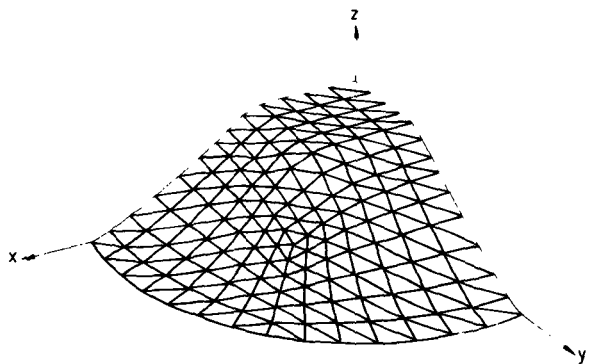


Fig. 16 Deformed mesh at a punch height of 22.5mm in stretching of a circular sheet by a square punch

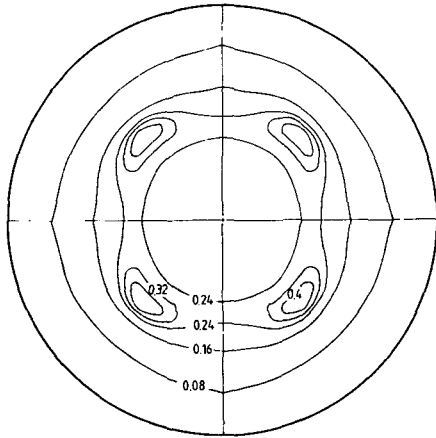


Fig. 17 Effective strain distribution at a punch height of 22.5mm in stretching of a circular sheet by a square punch

치의 기하학적인 형상에 의해 보다 큰 영향을 받는 것을 알 수 있다. 따라서 소재의 파단을 막기 위해서는 펀치모서리 부분의 반경을 증가시켜야 함을 알 수 있다.

#### 4. 결 론

3차원 형상의 금형에 의한 박판성형의 강소성 유한요소해석에 적용하기 위하여 경사면 경계조건을 이용하여 효율적인 접촉 처리방법을 개발하였다. 축대칭 스트레칭을 3차원 강소성 유한요소법으로 해석하여 기존의 축대칭해와 비교한 결과 개발된 방법의 타당성과 유용성이 입증되었다. 또 3차원 스트레칭을 해석한 결과 실험결과와 잘 일치하였다. 따라서 본 접촉 처리방법이 3차원 형상의 금형에 의한 박판성형의 강소성 유한요소해석에 효과적으로 적용될 수 있는 방법임을 입증하였다.

#### 후 기

본 논문은 한국과학재단의 연구비 지원으로 이루어졌으며, 이에 관계제위께 감사드립니다.

#### 참 고 문 헌

(1) Kobayashi, S. and Kim, J.H., 1978, "Deformation

Analysis of Axi-Symmetric Sheet Metal Forming Process by Rigid-Plastic Finite Element Method", *Mechanics of Sheet Metal Forming* (Edited by D.P. Koistinen and N.M.Wang), Plenum Press, New York, pp.341~366.

- (2) Toh, C.H. and Kobayashi, S., 1983, "Finite Element Process Modelling of Sheet Metal Forming of General Shapes", *Proc. Int. Symp. Fundamentals of metal Forming Technique-State and Trend*, Springer-Verlage, West Germany, 13~14, October, pp.39~57.
- (3) Wang, N.M., 1984, "A Rigid-Plastic Rate Sensitive Finite Element Method for Modelling Sheet Metal Forming Processes", *Numerical Analysis of Forming Processes*, John Wiley & Sons, Chichester, pp.117~164.
- (4) Kim, Y.J. and Yang, D.Y. 1985, "A Rigid-Plastic Finite Element Formulation Considering the Effect of Geometric Change and Its Application to Hydrosatic Bulging", *Int. J. Mech. Sci.*, Vol.27, pp.453~463.
- (5) Yang, D.Y. and Kim, Y.J., 1987, "Analysis of Hydrostatic Bulging of Anisotropic Rectangular Diaphragms by the Rigid-Plastic Finite Element Method", *J. Engng. Ind.*, *Trans. ASME*, Vol.109 pp.148~154.
- (6) Yang, D.Y. and Kim, Y.J., 1986, "A Rigid-Plastic Finite Element Formulation for the Analysis of General Deformation of Planar Anisotropic Sheet Metals and Its Applications", *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 28, pp. 825~840.
- (7) Yang, D.Y., Chung, W.J., Cha, Y.Y. and Kim, Y.J., 1987, "Analysis and Design of Flange Deformation in Deep Drawing of General Noncircular Cups", *Proceedings of Second International Conference for Technology of Plasticity*, Edited by K. Lange, West Germany, Stuttgart, Springer-Verlag, Vol. 1, pp. 614~649.
- (8) Chung, W.J., Kim Y.J., Yang, D.Y., 1989, "Rigid-Plastic Finite Element Analysis of Hydrosatic Bulging of Elliptic Diaphragms Using Hill's New Yield Criterion", *Int. J. Mech. Sci.*, Vol.31, pp. 193~207
- (9) Fracavilla, A. and Zienkiewicz, O.C., 1975, "A Note on Numerical Computation of Elastic Contact Problems", *Int. J. Num. Mech. Eng.*, Vol.9, pp. 913~924.
- (10) Chandrasekaran, N. et al., 1975, "A Finite Element Solution Method for Contact Problems with Friction", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 24, pp.

- 913~924.
- (11) Schaefer, H., 1975, "A Contribution to the Solution of Contact Problems with the Aid of Bond Elements", *Compt. Mech. Appl. Mech. Engng.* . Vol. 6, pp. 335~354.
- (12) Conry, T.F. and Seireg, A., 1971, "A Mathematical Programming Method for Design of Elastic Bodies in Contact", *J. Appl. Mech.* , Trans. ASME, Vol.2, pp.387~392.
- (13) Joo, J.W. and Kwak, B.M., 1986, "Analysis and Applications of Elasto-Plastic Contact Problems Considering Large Ceformation", *Compt. Struct.* , Vol.24 , pp.757~765.
- (14) Klabring, A., 1986, "A Mathematical Programming Approach to Two-Dimensional Contact Problems with Friction", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 58, pp. 175~200.
- (15) Kikuchi, N. and Song, Y.J., 1981, "Penalty/Finite Element Approximation of a Class of Unilateral Problems in Linear Elasticity", *Quart. Appl. Math.*, Vol.39, pp.1~22.
- (16) Cheng, J.H. and Kikuchi, N., 1985, "An Analysis of Metal Forming Processes Using Large Deformation Elastic-Plastic Formulations", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 49, pp.71~108.
- (17) Osakada, K., Nakano, J. and Mori, K., 1982, "Finite Element Method for Rigid-Plastic Analysis of Metal Forming Formulation for Finite Deformation", *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 24, pp. 459~468.
- (18) Oh, S.I., 1982, "Finite Element Analysis of Metal Forming Processes with Arbitrarily Shaped Dies", *Int. J. Mech. Sci.* , Vol.24 pp.479~493.
- (19) Yoon, J.H. and Yang, D.Y., 1988, "Rigid-Plastic Finite Elment Analysis of Three-Dimensional Forging by Considering Friction on Continuous Curved Dies with Initial Guess Generation", *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 30, pp. 887~898.