

# 탄성학 일별 (一瞥)

박진무  
고려대학교 기계공학과 교수



● 1941년생  
● 연속체의 역학적 및 열적거동에 관한 합리적 이론 정립과 수치적 해법에 관심을 갖고 있다.

## 1. 머리말

기계공학에서 모든 분야의 궁극적 목표로서 하드웨어의 설계 제작을 들 수 있으며, 그 단계의 학문적 기초로서 고체역학의 중요성은 잘 알려져 있다. 한편 우리 학회의 고체역학부문 학술강연회에 참여하는 회원들의 수는 다른 부문에 비교하여 상당히 작다. 이와 같은 현상은 고체역학의 특성과 우리의 교육과정을 생각하면 다소 납득이 된다. 즉 관측이 어려운 고체 내부의 응력과 미소한 변형을 고차적인 텐서량, 복잡한 기호로 표현 해석하는데 따르는 본질적 어려움이 있는 반면에, 대학원에 진학하여 고체역학 관련 분야를 전공한 회원은 제외 한 대다수는 학부의 재료역학 과목에서 새장재의 인장, 비틀림, 굽힘, 압축등의 기초적 학습 후에, 기계요소 설계과목에서 다소 무리한 응용을 시도하는 것으로 고체역학 공부를 대체로 마감하기 때문에, 고체역학 학술 발표회에 별 관심이 없게 된 것이 아닐까 싶다. 이와 같은 문제의 해결에 도움이 되는 것으로서 학부의 연속체역학 과목을 활성화하여 연속체 일반에 대한 이론적 해석을 효율적으로 더 깊게 하고, 설계에의 응용에서는 기계요소 대부분을 섭렵(涉獵)하려는 대신 몇 개를 심도있게 취급하여 해석 능력을 기르는 것등을 들 수 있다. 또 한편 고체역학 전공자들은 이 분야의 공통 기초적 성격을 고려하여 더 넓은 관심을 모으는 데 노력함이 좋을 듯 하다.

이 글에서는 고체역학의 핵심 기초로서 탄성이론을 선택하고, Crandall등의 고체역학 교과서<sup>(1)</sup>로 부터 연속적 학습을 상상하면서 그 몇 요점을 일별(一瞥)하고자 한다.

## 2. 선형 탄성이론의 기본

외력으로 탄성체에 미소변형이 생기면서 평형을 이루면 탄성체 내부의 각점에서 다음 관계식이 성립해야 한다.

변형률( $e_{ij}$ )-변위( $u_i$ ) 관계식

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1)$$

응력( $\tau_{ij}$ )-변형률 관계식

$$\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} e_{kk} + 2\mu e_{ij}, (\lambda, \mu : \text{Lamé 상수}) \quad (2)$$

평형 방정식

$$\tau_{ij,j} + F_i = 0, \tau_{ij} = \tau_{ji}, (F_i : \text{물체력}) \quad (3)$$

식 (3)은 강체의 평형조건  $\sum F = 0, \sum M = 0$ 에 대응하는 연속체 일반의 평형 방정식이고 (1)은 기하학적(kinematic)관계를 표현한다. (2)는 등방성 탄성거동을 나타내는 것으로, 점탄성체등은 원래 상태로 부터 현재까지 변형의 전 과정을 기억(perfect of fading memory)하여 응력으로 반영하는가 하면, 점성유체는 현재와 그 직전의 변형만을 기억 비교하여 얻은  $\dot{e}_{ij}$ 로 응력을 결정하는 데 대조적으로, 탄성체는 언제나 원래 상태만을 기억하고 있다가 현재 변형과 비교하여 얻은  $e_{ij}$ 로 응력을 결정하는 특징이 있다<sup>(2)</sup>.

위 식들은 인덱스 표기법과 합규약(summation convention)<sup>(2)</sup>을 써서 표현된 것이며, 대칭성을 고려하면 15개의 스케일러량( $u_i, e_{ij}, \tau_{ij}$ )에 관한 15개의 스케일러방정식이 된다. 기초적 표기법으로 15개의 방정식을 나열했을 경우를 상상하면 인덱스표기법의 사용이 불가피함을 알 수 있다. 위 식들과 관련하여 경계에서

$$u_i = u_i^*(\mathbf{x}) \text{ 또는 } T_i = T_i^*(\mathbf{x}) \quad (4)$$

조건이나 이들의 조합을 부과하면 광범위한 문제에서 유일해가 존재하는 바, 이에 관한 거창한 증명을 참고문헌 (4)에서 볼 수 있다.

식 (1), (2), (3)을 종합하면 다음의 Navier방정식을 얻는다.

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + F_i = 0 \quad (5)$$

이 식에서 독립적으로  $u_i$ 가 결정되면  $e_{ij}$ 와  $\tau_{ij}$ 는 (2), (3)에서 각각 미분과 대수적 조작으로 간단히 결정된다. 반면에 경계조건이 (4)<sub>2</sub>로 주어지는 경우 평형조건식 (3)만으로 응력이 결정되는 것은 정력학적 정정의 특수 문제 뿐이고, 거의 모든 문제는 부정정으로서 힘의 평형, 기하학적 상합(fit), 힘-변위 관계를 연계해야 해가 얻어진다<sup>(1)</sup>. 즉 단일 연결체(simply-connected body)의 경우 (2), (3)에 추가하여, (1)에서 간단히 유도되는 다음 상합조건(compatibility)식을 연계 해야 한다.

$$e_{ij,kl} - e_{kl,ij} - e_{ik,jl} - e_{jl,ik} = 0 \quad (6)$$

위의 식 (6)은 그 대칭성으로 대부분이 항등식이 되고, 3차원 문제의 경우 6개만이, 2차원

문제의 경우 단 한 개만이 유효식으로 남는다<sup>(8)</sup>. 그림 1에 탄성체의 평형에 관한 선형 기본 관계식들의 관계를 도시하였다.

역사적으로, Cauchy, Navier, Poisson, Kirchhoff, Saint-Venant, Stokes... 등의 노력을 통하여 선형 탄성학에 관한 많은 연구 결과 및 경계치문제의 해가 집적되어 있다<sup>(6,7)</sup>. 그 중에서 세장체에 관한 Saint-Venant 문제와, 평면 응력, 평면 변형등의 2차원 문제를 다음에 살펴 보기로 한다.

### 3. Saint-Venant 문제

그림 2와 같이 균질, 등방성 탄성체(right cylindrical elastic body)가 물체력 없이 두 끝에 분포력  $T^{(1)}, T^{(2)}$ 만을 받을 경우  $u_i, e_{ij}, \tau_{ij}$ 를 어떻게 구할 것인가? 이 문제도 완전해를 구하는 것은 어렵다. 그러므로 Saint-Venant은 두 끝의 경계조건을 이완시켜 응력장이 두 끝의 모든점에서 주어진 경계분포력과 일치시키는 대신에, 합력  $L$ 과 합모멘트  $M$ 이 서로 일치하도록 부과하였다.

이와같이 이완된 경계치 문제에서는 주어진  $L, M$ 에 대하여 무수히 많은 해가 존재할 것이다. 1985년에 Saint-Venant은 세장체의 두 끝에서 멀어질수록 이들 해는 서로 근접할 것이라고 추측하고 일련의 문제를 해석하였으며, 그 결과가 실험과 잘 일치하므로 그의 추측을 오늘날 Saint-Venant 「원리」로 격상시켜 부른다.

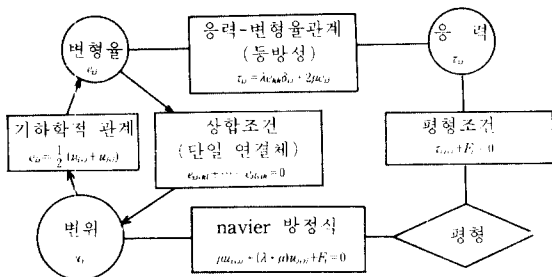


그림 1 선형 탄성 정력학에서 기본 방정식의 상호관계

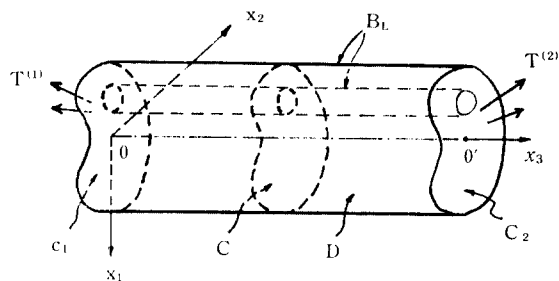


그림 2 Saint-Venant 및 평면문제의 대상물체

Saint-Venant 문제는 다음과 같이 네 가지로 분류할 수 있다.

- ① 순수인장 ( $L_1=L_2=0, L_3=L, M=0$ )
- ② 순수굽힘 ( $L_i=0, M_1=M_3=0, M_2=M$ )
- ③ 굽힘-전단 ( $L_1=L, L_2=L_3=0, M=0$ )
- ④ 순수비틀림 ( $L=0, M_1=M_2=0, M_3=M$ )

기본 관계식이 선형이므로 모든 문제는 위 네 종류 문제의 해를 중첩하면 답을 얻을 수 있다.

Saint-Venant 순수인장의 해는 재료역학의 기초적 답과 일치하나, 주요 부위인 두 끝 주변에서는 대체로 유효하지 못하다.

두 끝에 우력만을 받는 순수굽힘의 경우, 강체변위를 제외하면 변형장이 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \frac{M}{2EI}(x_3^2 + \sigma x_1^2 - \sigma x_2^2) \\ u_2(x) &= \frac{M}{EI}\sigma x_1 x_2 \\ u_3(x) &= \frac{M}{EI}x_1 x_3, \quad (\sigma : \text{프와송비}) \end{aligned} \quad (7)$$

한편 좌단이 고정되고 우단에 우력이 작용하는 경우에는, 혼합 경계치 문제가 되고, 좌단 경계조건을  $u(0)=0, u_{1,3}(0)=0$ 로 부과하면, 기초적 보 이론과 같은 중심선 처짐곡선을 얻는다. 반면에 좌단면 변위를 모두 없게, 즉  $u(x_1, x_2, 0)=0$ 으로 강화하여 부과하면 아직도 그 완전해를 얻지 못하고 있다.

굽힘-전단 문제의 예로서, 왼쪽 끝이 고정되고 오른쪽 끝의 중심에서  $Le_1$ 이 작용하는 원형단면 외팔보의 응력장은 Saint-Venant 해석으로 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \tau_{11} = \tau_{12} = \tau_{22} = 0, \quad \tau_{33} &= -\frac{4L}{\pi a^4}(l-x_3)x_1 \\ \tau_{31} &= \frac{(3+2\sigma)L}{2\pi a^4(1+\sigma)} \left[ a^2 - x_1^2 - \frac{(1-2\sigma)}{3+2\sigma}x_2^2 \right] \\ \tau_{32} &= -\frac{(1+2\sigma)L}{\pi a^4(1+\sigma)}x_1 x_2, \quad (a : \text{단면반경}) \end{aligned} \quad (8)$$

위 응력성분  $\tau_{33}$ 는 재료역학의 것과 일치하나,  $\tau_{31}$ 과  $\tau_{32}$ 는 더 정밀한 값이다.

위 결과들은 기초적 보 이론의 것과 대동소이이며, 역설적으로 재료역학의 위력을 보여준

다고 하겠다. 그러나 순수 비틀림을 해석하려면 Saint-Venant의 탄성이론이 필수적이다. 그림 2의 경계  $B_L$ 에서 조건은

$$\begin{aligned} \tau_{11}n_1 + \tau_{12}n_2 &= 0 \\ \tau_{21}n_1 + \tau_{22}n_2 &= 0 \\ \tau_{31}n_1 + \tau_{32}n_2 &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

우단의 면  $C_2$ 에서는

$$\begin{aligned} \int_{C_2} \tau_{31} dA &= \int_{C_2} \tau_{32} dA = \int_{C_2} \tau_{33} dA = 0 \\ \int_{C_2} x_2 \tau_{33} dA &= \int_{C_2} x_1 \tau_{33} dA = 0 \\ \int_{C_2} (x_1 \tau_{32} - x_2 \tau_{31}) dA &= M \end{aligned} \quad (10)$$

해석의 출발점으로서, 각 단면이 원형단면의 경우와 같이 회전하고, 동시에 뒤틀린다(warp)고 보면

$$u_1 = -\alpha x_2 x_3, \quad u_2 = \alpha x_1 x_3, \quad u_3 = \alpha \varphi(x_1, x_2) \quad (11)$$

여기서  $\alpha$ 는 축방향 단위 길이당 비틀림각이고,  $\varphi$ 는 뒤틀림을 나타내는 미지의 함수이다. 식 (11)을 (1), (2)에 넣으면

$$\tau_{31}\mu\alpha\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} - x_2\right), \quad \tau_{32} = \mu\alpha\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + x_1\right) \quad (12)$$

이 되고 나머지 응력성분은 영이 된다. 또 평형조건 (3)에서

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = 0 \quad (13)$$

$B_L$  경계에서 조건 (9)를 만족하려면

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}n_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}n_2 = x_2n_1 - x_1n_2 \quad (14)$$

식 (13), (14)로 부터 단면의 뒤틀림함수  $\varphi$ 의 결정은 포텐셜 이론의 Neumann 문제로 귀착됨을 알 수 있다. 비틀림각  $\alpha$ 는 경계조건 (10)에서 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} M &= \mu\alpha \int_{C_2} \left( x_1^2 + x_2^2 + x_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} \right. \\ &\quad \left. - x_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \right) dA \equiv \alpha K \end{aligned} \quad (15)$$

위 식에서  $K$ 는 비틀림강성(재료역학의  $GJ$ )을 표시한다. Saint-Venant 비틀림문제의 해석과

정을 종합하면, 단면의 모양에 따라 Neumann 문제를 풀어서 뒤틀림함수  $\varphi$ 를 구하고, (15)로, 비틀림강성과 비틀림각  $\alpha$ 를 구하게 된다. 결과적으로 원형단면의 경우에는  $\varphi=0$ 으로 되어 재료역학과 일치하며, 삼각형, 사각형, 원형단면의 경우에도 쉽게 해를 구할 수 있다<sup>(5)</sup>.

#### 4. 평면문제(Plane Problems)

그림 2의 탄성체를 다시 살펴보자.

편의상 원점이 물체의 중심에 오도록 좌표를 평행이동하고, 물체의 길이를  $2h$ 라 하자. 물체력과 경계면의 분포력이 아래 (16)과 같이 모두  $x_1, x_2$ 면 성분만 있을 때, 탄성체의 변위, 응력장을 구하는 문제를  $(x_1, x_2)$ 평면문제라고 한다.

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{F}(x_1, x_2), \quad \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_3 = 0 \text{ on } D \\ \mathbf{T} &= \mathbf{T}^*(x_1, x_2), \quad \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{e}_3 = 0 \text{ on } B_L \\ \mathbf{T} &= 0 \text{ on } x_3 = \pm h \end{aligned} \quad (16)$$

여기서 우리는 평면문제와 Saint-Venant문제의 상보관계(complementary relation)에 유의할 필요가 있다. 즉 평면문제에서는 경계  $B_L$ 에만 분포력이 작용하고 두 끝에는 없는 반면, Saint-Venant문제는 그 반대이므로, 두 문제의 해를 중첩하면 전 경계면에 분포력이 작용하는 일반 문제의 해가 될 것이다. 평면문제를 관련 평면변형문제(associated plane strain problem), 평면응력(plane stress)문제, 일반화된 평면응력(generalized plane stress)문제로 분류하여 살펴보자.

##### (1) 관련 평면변형 문제.

식 (16)과 같은 외력을 받으면 탄성체에는 응력  $\tau_{11}, \tau_{22}, \tau_{12}$ 가 생기고 그에 따라 변위  $u_1, u_2$ 뿐 아니라  $u_3$ 성분도 발생하여 결과적으로  $(x_1, x_2)$ 평면문제에서 벗어나게 된다. 그러나 두 끝에 응력  $\tau_{33} = \sigma(\tau_{11} + \tau_{22})$ 를 추가하면  $u_3$ 성분이 상쇄되어 2차원 변형장으로 되돌아간다. 그러므로 평면문제 (16)의 관련 평면변형 문제를 다음과 같이 정의한다.

$$\left. \begin{aligned} \tau_{11} &= \lambda(u_{1,1} + u_{2,2}) + 2\mu u_{1,1} \\ \tau_{22} &= \lambda(u_{1,1} + u_{2,2}) + 2\mu u_{2,2} \\ \tau_{12} &= \mu(u_{1,2} + u_{2,1}) \end{aligned} \right\} \text{ on } C$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{11,1} + \tau_{12,1} + F_1 &= 0 \\ \tau_{21,1} + \tau_{22,2} + F_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ on } C \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{11}n_1 + \tau_{12}n_2 &= T_1^* \\ \tau_{21}n_1 + \tau_{22}n_2 &= T_2^* \end{aligned} \right\} \text{ on } \partial C$$

위 2차원 경계치 문제에  $u_3=0, \tau_{31}=\tau_{32}=0, \tau_{33}=\sigma(\tau_{11}+\tau_{22})$ 를 추가한 것을 (16)의 평면문제에 관련 평면 변형문제라고 한다. 이 문제의 해에, 두 끝에  $\tau_{33}=-\sigma(\tau_{11}+\tau_{22})$ 의 분포력이 작용하는 Saint-Venant문제의 답을 중첩하면, 원래의 평면문제 (16)의 해답이 되는 바, Saint-Venant답의 유효범위를 고려하면 관련 평면변형문제를 정립해석하는 것은 길이  $h$ 가 비교적 큰 경우에 유용함을 알 수 있다.

##### (2) 평면응력문제

평면문제 (16)에서 길이  $h$ 가 매우 작아서 그림 2의 세장재가 평판이 될 경우, 평판 내부에서도  $x_3$ 방향 응력성분값이 매우 작을 것이며, 응력, 변형장이  $x_3$ 에 따라 별로 변하지 않을 것이므로 다음과 같이 가정한다.

$$\begin{aligned} \tau_{31} &= \tau_{32} = \tau_{33} = 0 \text{ on } D \\ \tau_{\alpha\beta} &= \tau_{\alpha\beta}(x_1, x_2), \quad u_\alpha = u_\alpha(x_1, x_2) \text{ on } D \\ (\alpha, \beta &: 1, 2) \end{aligned} \quad (18)$$

이것은 재료역학 평면응력문제의 기본 가정으로서 판이 얇을수록 더 유효하나, 탄성이론에서는 다음과 같이 더 엄밀한 2차원 문제를 정립하여 사용한다.

##### (3) 일반화된 평면응력문제

평판의 변위와 응력의 두께 평균치  $\hat{u}_i$ 와,  $\hat{\tau}_{ij}$ 를 각각 다음과 같이 얻는다.

$$\begin{aligned} \hat{u}_i(x_1, x_2) &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h u_i(x_1, x_2, x_3) dx_3 \\ \hat{\tau}_{ij}(x_1, x_2) &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \tau_{ij}(x_1, x_2, x_3) dx_3 \end{aligned} \quad (19)$$

$u_3, \tau_{31}, \tau_{32}$ 의 좌우 대칭성을 고려하면  $\hat{\tau}_{31} = \hat{\tau}_{32} = \hat{u}_3 = 0$ 이 된다. 또 (2), (3) 및  $B_L$ 에서의 경계조건을 고려하면 두께 평균치에 관한 2

차원 경계치문제를 다음 (20)과 같이 얻게된다.

$$\left. \begin{aligned} \hat{\tau}_{11,1} + \hat{\tau}_{12,2} + F_1 &= 0 \\ \hat{\tau}_{21,1} + \hat{\tau}_{22,2} + F_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{on } C$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{\tau}_{11} &= \hat{\lambda}(\hat{u}_{1,1} + \hat{u}_{2,2}) + 2\mu\hat{u}_{1,1} \\ \hat{\tau}_{22} &= \hat{\lambda}(\hat{u}_{1,1} + \hat{u}_{2,2}) + 2\mu\hat{u}_{2,2} \end{aligned} \right\} \text{on } C \quad (20)$$

$$\hat{\tau}_{12} = \mu(\hat{u}_{1,2} + \hat{u}_{2,1})$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{\tau}_{11}n_1 + \hat{\tau}_{12}n_2 &= T_1^* \\ \hat{\tau}_{21}n_1 + \hat{\tau}_{22}n_2 &= T_2^* \end{aligned} \right\} \text{on } \partial C$$

$$\hat{\lambda} = 2\lambda\mu/\lambda + 2\mu$$

이 문제를 다음 식(21)로 보충한 것이 원래의 평면문제 (16)관련 일반화된 평면응력문제가 된다.

$$\hat{\tau}_{31} = \hat{\tau}_{32} = \hat{\tau}_{33} = \hat{u}_3 = 0 \quad (21)$$

여기서 유의할 점은 재료역학의 평면응력문제가 식 (18)의 많은 가정위에 정립되어 있는 반면, 일반화된 이론은 (21)에서  $\hat{\tau}_{33}=0$  하나만 가정이라는 것이다. 더 중요한 사실은 (20)과 (17)을 비교하면 Lamé상수  $\lambda, \hat{\lambda}$ 만이 다르다는 점이다. 그러므로 세장재나 평판의 2차원 문제는, 그 대조적 형상에도 불구하고, 그 기본 방정식계가 동일하다고 할 수 있으며 이하 평면문제라고 부르기로 한다.

### 5. Airy 응력함수

단일연결 탄성체의 경계치 문제를 응력항만으로 표현하기 위해서는 식 (6)의 상합조건을 응력으로 표현해야 하는바, (3)과 (6)을 조합하면 물체력이 없는 평면문제의 경우, 한 개의 방정식  $\nabla^2(\tau_{11} + \tau_{22}) = 0$ 이 도출된다. 그러므로 해당 경계치 문제는 다음과 같이 된다.

$$\left. \begin{aligned} \tau_{11,1} + \tau_{12,2} &= 0 \\ \tau_{12,1} + \tau_{22,2} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{on } C \quad (22)$$

$$\nabla^2(\tau_{11} + \tau_{22}) = 0 \text{ on } C$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{11}n_1 + \tau_{12}n_2 &= T_1^* \\ \tau_{21}n_1 + \tau_{22}n_2 &= T_2^* \end{aligned} \right\} \text{on } \partial C$$

위 문제는 탄성체의 물성치에 무관하며, 따라서 철판재나 아크릴 판재나 그 형상과 경계조건이 동일하면 같은 응력 분포를 갖게됨을 알 수 있다. 이것이 광탄성 실험방법의 이론적

근거이다. 식 (22)에 다음과 같이 정의되는 Airy 응력 함수  $\phi(x_1, x_2)$ 를 도입하면 (22)의 평형조건식들은 항등식이 되므로, 다음과 같이  $\phi$ 에 관한 간단한 경계치 문제를 얻는다.

$$\left. \begin{aligned} \nabla^4\phi &= 0 \text{ on } C \\ \phi_{,22}n_1 - \phi_{,12}n_2 &= T_1^* \\ -\phi_{,12}n_1 + \phi_{,11}n_2 &= T_2^* \end{aligned} \right\} \text{on } \partial C \quad (23)$$

$$\tau_{11} \equiv \phi_{,22}, \quad \tau_{22} \equiv \phi_{,11}, \quad \tau_{12} \equiv -\phi_{,12} \quad (24)$$

직교좌표나 극좌표를 사용하여, 위 경계치문제를 해석한 여러가지 예를 참고문헌 (8)에서 볼 수 있다.

### 6. 평면문제 해석에서 복소함수의 이용

유체역학등의 경우와 같이 탄성학에서도 2차원 문제를 해석하는데 복소함수의 방법은 매우 위력적이다. 특히 다중 연결체의 경우 상합조건식 (6)이 모순없는 변형장의 도출을 전혀 보장하지 못하므로 변형장을 일일이 적분으로 구하여 확인해야 함을 생각하면 더욱 그러하다.

평면문제에서 극좌표를 채택할 때, 응력과 변형장은 복소 해석함수(analytic function)  $g(z)$ 와  $h(z)$ 로 부터 다음과 같이 결정된다<sup>(5,9,10)</sup>.

$$\begin{aligned} \tau_{rr} + \tau_{\theta\theta} &= 2\{g'(z) + \overline{g'(z)}\} \\ \tau_{rr} - \tau_{\theta\theta} + 2i\tau_{r\theta} &= -2\frac{\hat{z}}{z}\{zg''(z) + \overline{h''(z)}\} \\ 2\mu(u_r + iu_\theta) &= e^{-i\theta}\{(3-4\sigma)g(z) \\ &\quad - z\overline{g'(z)} - \overline{h'(z)}\} \end{aligned} \quad (25)$$

즉 (25)를 통하여 경계조건을 만족하는 해석함수  $g(z)$ 와  $h(z)$ 를 구하면 전체응력, 변형장은 위와 같이 그들의 미분만으로 얻게 된다. 예를 들면 내반경이  $a$ 이고 외반경이  $b$ 인 후벽 실린더에 내압  $p_1$ , 외압  $p_2$ 가 작용하는 경우응력과 변형장은 다음 해석함수들로 간단히 얻어진다.

$$\begin{aligned} g(z) &= Az, \quad h(z) = B \log z \quad (26) \\ \left( A = \frac{p_2b^2 - p_1a^2}{2(a^2 - b^2)}, B = \frac{a^2b^2(p_1 - p_2)}{a^2 - b^2} \right) \end{aligned}$$

## 7. 탄성학 특론의 문제(Topics of Advanced Elasticity)

이 소고의 성격상 특론 문제의 일별은 부정일 것이나 혹 참고가 될까하여 몇 개의 관련 문헌을 나열한다.

평면응력에 상보적인 판(굽힘)이론은 Szilard<sup>(11)</sup>에 많은 결과들이 수록되어 있다. 셸이론의 경우 매우 고답적인 Naghdi<sup>(12)</sup>와 그에 대조적인 Flügge를 들고 싶다. 탄성동력학(elastodynamics)은 탄성이론의 핵심으로서 비파괴검사, 충격, 음향학등에 많이 응용되는 중요하고 어려운 문제로 생각되는데 Achenbach<sup>(14)</sup>를 들고 싶으며, Graff는 많은 결과를 수록 하였으나 오자도 많다. 유한변형 탄성학(finite elasticity)은 고무등의 역학적 문제 해석에 필수적이고, 비선형 이론으로는 쉬운 편인데 Truesdell과 Noll<sup>(16)</sup>을 감명 깊게 보았으며, 더 전문적으로는 Green과 Adkins<sup>(17)</sup>를 들겠으나, Green의 저술은 모두 정결하고 빈틈 없고 어렵다고 생각된다. 탄성안정성 문제에 관해서는 Bolotin<sup>(18)</sup>의 실용적 취급과 Knops와 Wlukes<sup>(19)</sup>의 철저한 취급이 높이 평가된다고 들은 바 있다. 변분법과 유한요소법으로는 Reddy의 신저<sup>(20)</sup>에서 간결하고 명쾌한 전개를 보았다.

탄성학은 오랜 세월에 걸쳐 기라성 같은 학자들의 노력으로 방대한 업적이 집적되어 있다. 이 집적에서 주옥만을 다시 골라 한 줄로 꿰어 놓는 보배는 없을까? 이러한 의도로 쓰고 “mathematical” 혹은 “theoretical” 명칭을 부친 것은 1926년의 Love<sup>(21)</sup>, 1956년의 Sokolnikoff<sup>(6)</sup>, 1968년의 Green과 Zerna<sup>(22)</sup>, 그리고 무엇보다도 1983년의 Marsden과 Hughes<sup>(23)</sup>가 있다.

### 참 고 문 헌

(1) Crandall, S. et al., 1978, “An Introduction to the Mechanics of Solids”, McGraw-

Hill.

- (2) 박진무, 1985, “연속체 역학의 기초적 개요(Ⅰ)”, 대한기계학회지, 제25권, 제6호, pp. 497~501.
- (3) 박진무, 1986, “연속체 역학의 기초적 개요(Ⅱ)”, 대한기계학회지, 제26권, 제3호, pp. 214~218.
- (4) Fichera, G., 1973, in “Mechanics of Solids”(ed. C. Truesdell), Vol. Ⅱ, Springer-Verlag.
- (5) Sokolnikoff, I., 1956, “Mathematical Theory of Elasticity”, McGraw-Hill.
- (6) Todhunter, I., et al., 1886~1893, “A History of the Theory of Elasticity and of Strength of Materials,” Cambridge Univ. Press.
- (7) Gurtin, M., 1973, in “Mechanics of Solids”(ed. C. Truesdell), Vol. Ⅱ, Springer-Verlag.
- (8) Timoshenko, S. and Goodier, J., 1970, “Theory of Elasticity”, McGraw-Hill.
- (9) Muskhelishvili, N., 1953, “Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity”, Noordhoff.
- (10) England, A., 1971, “Complex Variable Methods in Elasticity”, Wiley.
- (11) Szilard, R., 1974, “Theory and Analysis of Plates”, Prentice-Hall.
- (12) Naghdi, P., 1973, in “Mechanics of Solids”(ed. C. Truesdell), Vol. Ⅱ, Springer-Verlag.
- (13) Flügge, W., 1973, “Stresses in Shells”, Springer-Verlag.
- (14) Achenbach, J., 1975, “Wave Propagation in Elastic Solids”, North-Holland.
- (15) Graff, K., 1975, “Wave Motion in Elastic Solids”, Ohio State Univ. Press.
- (16) Truesdell, C. and Noll, W., 1965, “Handbuch der Physik”, Vol. Ⅲ /3, Springer-Verlag.

- (17) Green, A. and Adkins, J., 1970, "Large Elastic Deformations", Clarendon Press.
- (18) Bolotin, V., 1964, "The Dynamic Stability of Elastic Systems", Holden-Day.
- (19) Knops, R. and Wilkes, E., 1973, in "Mechanics of Solids" (ed. C. Truesdell), Vol. III, Springer-Verlag.
- (20) Reddy, J., 1986, "Applied Functional Analysis and Variational Methods in Engineering", McGraw-Hill.
- (21) Love, A., 1927, "A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity", Cambridge Univ. Press.
- (22) Green, A. and Zerna, W., 1968, "Theoretical Elasticity", Clarendon Press.
- (23) Marsden, J. and Hughes, T., 1983, "Mathematical Foundation of Elasticity", Prentice-Hall.



## 국제 학술대회 참가 안내

### 제 9 회 국제 실험 역학회 학술대회

#### —9th International Conference on Experimental Mechanics—

주 관 : 미국 실험 역학회(SEM), 덴마크 공과대학, Imeko 실험 역학회

분 야 : 실험 역학에 관한 전 분야

(구조물 시험, 광학적인 방법, 재료시험, 파괴역학, 피로시험, 복합재료, 비선형 방법, 생체역학, 스트레인게이지, 잔류응력, 광탄소성, 열응력, 실험역학에의 컴퓨터 응용, 영상 프로세스, 고온특성, AE, 초음파 탐상, 짧은 균열, 동역학 등)

일 시 : 1990년 8월 20일~24일(5일간)

장 소 : 덴마크 공과대학(코펜하겐)

일 정 : 1989년 10월 1일 : 초록제출 마감

1990년 1월 1일 : 초록채택 통보

1990년 2월 1일 : 예비 프로그램 및 호텔 예약 통보

1990년 4월 1일 : 논문제출 마감

1990년 5월 1일 : 논문채택 최종 통보

※ 기타 상세한 내용은 인하대학교 공과대학 기계공학과 이억섭 교수께 문의바람.

전화번호 : (032) 862-0077 (교) 2069