

# 탄성유체윤활이론을 적용한 볼 베어링 역학



최 동 훈

한양대학교 기계설계학과 교수

- 1953년 생
- 접촉역학을 전공하였으며, Tribological Element의 해석과 최적설계에 관심이 있다.

## 1. 머리말

회전부를 가지고 있는 기계에 사용되고 있는 볼 베어링의 목적은 축과 하우징 사이에 하중을 전달하면서 상대적 위치와 회전 자유도를 제공하는 것이다. 같은 목적으로 사용할 수 있는 저널 베어링과 같은 미끄럼 베어링에 비하여 볼 베어링이 가지는 장점으로는 반경방향과 축방향의 복합하중을 받을 수 있다는 점, 자러 불안정성이 없다는 점, 원활하지 못한 윤활에도 덜 민감하다는 점등을 들 수 있다. 또한 마이크로스코우프 볼 베어링과 같이 고속으로 회전하는 경우에는 만족스러운 성능을 위하여 볼과 케도륜의 직접 접촉을 방지하는 탄성 유체윤활막의 형성 및 안정성이 필수적이다.

본 글에서는 여러 학문 분야의 지식이 필요한 고속 볼 베어링의 해석 방법을 소개하고자 한다. 이를 위하여 볼 베어링을 위한 탄성 유체윤활이론을 개략적으로 기술한다.

## 2. 볼 베어링의 기하학적 형상

단열 깊은 홈 볼 베어링의 단면을 그림 1에 도시한 바와 같다.

볼과 케도륜의 기하학적 共形度(conformity)를 지정하기 위하여 다음식과 같이 케도륜의 곡률반경을 볼의 직경으로 나눈 값을 사용하며, 이를 케도륜의 共形度라 한다.

$$f_i = \frac{r_i}{d} \quad f_o = \frac{r_o}{d}$$

케도륜의 共形度가 0.5(완벽한 共形)에 가까울수록 볼과 케도륜 사이의 마찰열의 발생이 커질 것이며, 共形度가 커지면 볼과 케도륜간의 접촉면적의 감소로 인하여 최대 접촉면적이 증가하며 피로수명을 단축시킬 것이다. 이와 같은 이유 때문에 케도륜의 共形度로 0.51~0.54 범위의 값을 택하며 0.52의 값을 가장 많이 사

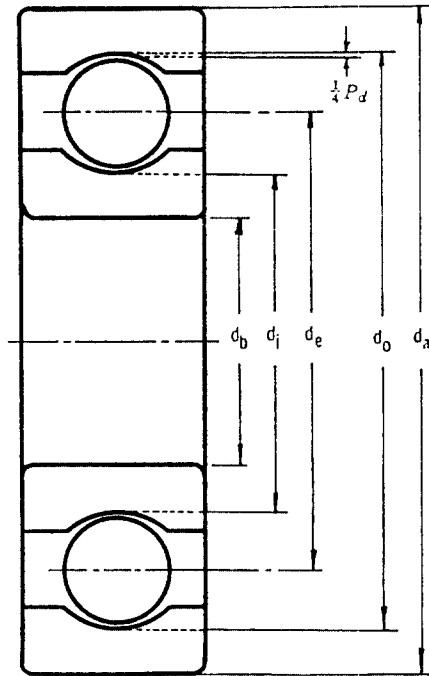
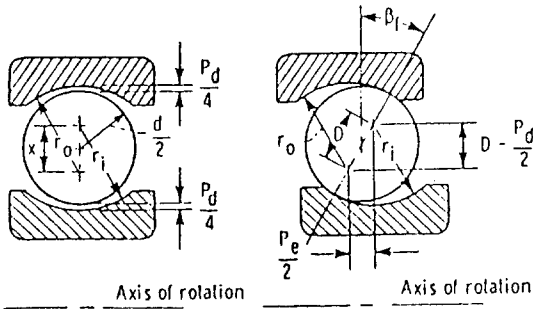


그림 1 단열 깊은 홈 볼 베어링의 단면도



(a) 초기위치 (b) 이동한 위치  
 그림 2 케도륜의 축방향 이동에 따른 볼과 케도륜의 접촉

용한다.

그림 1에 표시된 것처럼 볼 베어링은 일반적으로 틈새를 가지도록 설계된다. 이 틈새와 0.5보다 큰 케도륜 共形度에 의하여 케도륜은 볼에 대하여 축방향으로 자유롭게 이동할 수 있으며, 그 결과로 볼과 케도륜이 그림 2에서와 같이 접촉하게 된다. 이때 접촉각을 자유접촉각(free-contact angle)이라 하며, 보통 속도로 회전하는 베어링이 하중을 받게되면 이보다 큰 접촉각을 가지게 된다.

### 3. 볼과 케도륜 사이의 접촉역학

#### 3.1 Hertz의 접촉이론

두 탄성체가 접촉하여 하중을 받으면 접촉영역이 형성된다. 접촉역학의 선구자인 Hertz의 이론에 의하면, 그림 3과 같은 매끄러운 표면을 가진 탄성 타원체 사이의 접촉점에 공통법선방향의 하중이 가하여 질 경우, 접촉면의 형상은 타원이 되며 타원의 크기는 탄성체의 곡률, 재질 및 하중에 의하여 결정된다.

접촉현상을 해석하기 위하여 중요한 양인 곡률 합  $R$ 은 (1)과 같으며

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} \quad (1)$$

여기서

$$\frac{1}{R_x} = \frac{1}{r_{1x}} + \frac{1}{r_{2x}} \quad (2)$$

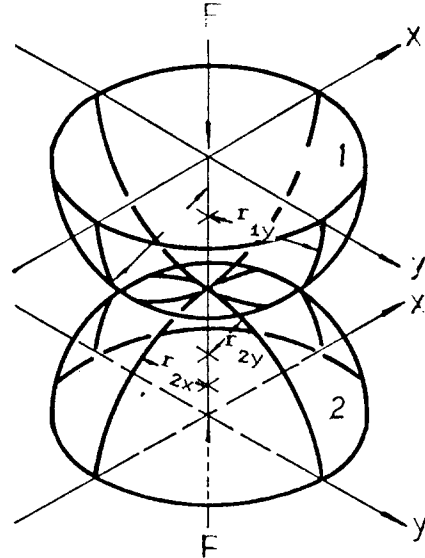


그림 3 점 접촉하고 있는 두 탄성 타원체

$$\frac{1}{R_y} = \frac{1}{r_{1y}} + \frac{1}{r_{2y}} \quad (3)$$

접촉 시스템의 동등탄성계수  $E$ 는 (4)식과 같다.

$$E = \frac{2}{\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}} \quad (4)$$

여기서  $E_1, E_2$ 는 각물체의 탄성계수이며  $\nu_1, \nu_2$ 는 프와송비이다.

Hertz는 형성된 접촉타원의 장반경을  $a$ , 단반경을  $b$ 라 하면, 접촉부에서의 접촉압력 분포는 그림 4와 같으며 (5)식으로 표현된다는 사실을 얻었다.

$$p = p_{max} \left[ 1 - \left( \frac{x}{b} \right)^2 - \left( \frac{y}{a} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (5)$$

여기서

$$p_{max} = \frac{3F}{2\pi ab} \quad (6)$$

또한 하중  $F$ 와 이로 인한 강체변위  $\delta$ 의 관계는 다음 식과 같다.

$$F = K\delta^{3/2} \quad (7)$$

윗 식에서 접촉하고 있는 물체의 탄성으로 인한 비선형 스프링상수  $K$ 는 각 탄성체의 곡률과 재질로 결정되며, 다음식으로 표현된다.

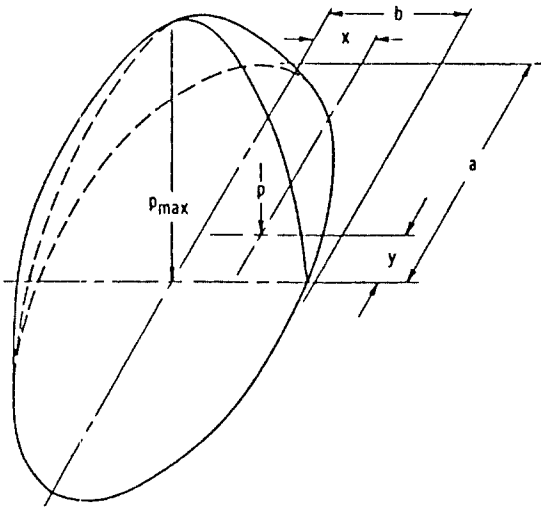


그림 4 타원 접촉영역에서의 접촉압력분포

$$K = \pi k E \left( \frac{R \mathfrak{E}}{4.5 \mathfrak{F}^3} \right)^{1/2} \quad (8)$$

여기서  $k = a/b$  (9)

$$\mathfrak{F} = \int_0^{\pi/2} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{1}{k^2} \right) \sin^2 \varphi \right]^{-1/2} d\varphi \quad (10)$$

$$\mathfrak{E} = \int_0^{\pi/2} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{1}{k^2} \right) \sin^2 \varphi \right]^{1/2} d\varphi \quad (11)$$

**3.2 볼과 케드론 사이의 접촉부에 대한 Hertz이론의 적용**

볼 베어링이 고속으로 회전하면 볼에 작용하는 원심력에 의해서 그림 5과 같이 내륜은 볼과 외륜과의 접촉각  $\beta_0$ 보다 큰 접촉각  $\beta_i$ 로 접촉하게 된다.

볼은 물체 1로, 케드론을 물체 2로 표기하면 볼과 내륜의 접촉부에서의 공통법선방향에 대한 곡률반경은 다음과 같고,

$$r_{1x} = r_{1y} = \frac{d}{2} \quad (12)$$

$$r_{2x} = \frac{d_e - d \cos \beta}{2 \cos \beta} \quad (13)$$

$$r_{2y} = -f_i d \quad (14)$$

볼과 외륜의 접촉부에서 공통법선에 대한 곡률반경은 아래와 같다.

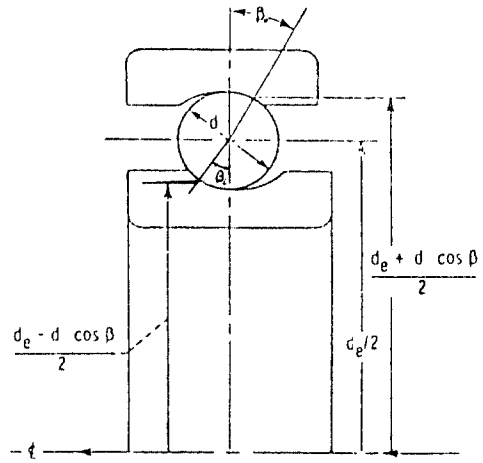


그림 5 고속 회전하는 볼 베어링의 단면도

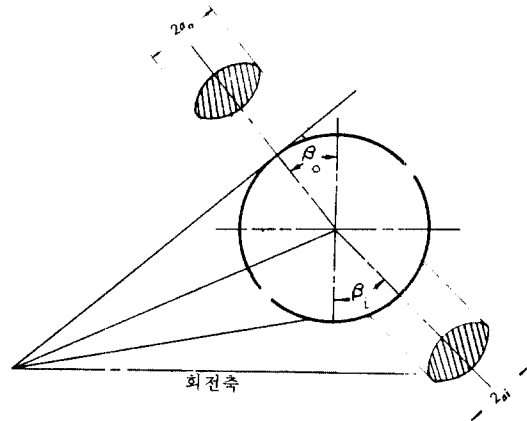


그림 6 볼 베어링에서의 접촉영역

$$r_{1x} = r_{1y} = \frac{d}{2} \quad (15)$$

$$r_{2x} = \frac{d_e - d \cos \beta}{2 \cos \beta} \quad (16)$$

$$r_{2y} = -f_o d \quad (17)$$

윗 식들에서 볼 수 있는 바와 같이 볼과 케드론 사이의 접촉은 타원체 사이의 접촉이므로 Hertz이론을 적용할 수 있다. 따라서 고속 회전하는 볼 베어링이 하중을 받고 있을 때의 볼-내륜과 볼-외륜의 접촉부에는 그림 6에서와 같이 타원형상의 접촉영역이 형성된다.

또한 볼-내륜 접촉의 경우는 (12)~(14)식들

을, 그리고 불-외륜의 경우는 (15)~(17)식들에 대입하여 불과 케도륜 사이의 접촉현상을 해석하면 된다.

### 3.3 복합 하중을 받고 있는 고속 볼 베어링의 탄성 접촉 변형

볼 베어링이 축방향 하중이 작용하면 불과 케도륜 사이의 탄성 접촉 변형에 의하여 내륜은 외륜에 대하여  $\delta_i$ 만큼 이동하게 된다. 반경방향 하중하에서는 내륜은 외륜에 대하여 하중방향으로  $\delta_r$ 만큼 이동하며, 하중방향으로 부터의 방위각  $\psi$ 의 위치에서는 반경방향으로  $\delta_r \cos \psi$ 만큼 이동한 것이 된다. 고속으로 회전하고 있는 볼 베어링이 복합하중을 받아 탄성 접촉 변형을 한 후의 방위각  $\psi$ 에 위치한 볼 중심의 위치와 케도륜 곡률중심의 위치의 변화를 그림 7에 도시한다.

내륜과 외륜의 곡률 중심간의 축방향 거리  $L_1$ 은 식 (18)로, 반경방향거리는  $L_2$ 는 식 (19)로 표현된다.

$$L_1 = D \sin \beta_f + \delta_t \quad (18)$$

$$L_2 = D \cos \beta_f + \delta_r \cos \psi \quad (19)$$

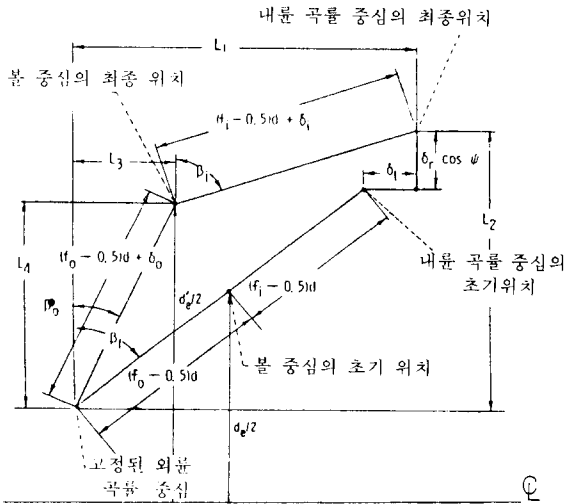


그림 7 복합하중을 가하기 전과 후의 볼 중심과 케도륜 곡률 중심의 위치

그림 7로 부터 다음 식들을 쓸 수 있다.

$$\cos \beta_o = \frac{L_4}{d(f_o - 0.5) + \delta_o} \quad (20)$$

$$\sin \beta_o = \frac{L_3}{d(f_o - 0.5) + \delta_o} \quad (21)$$

$$\cos \beta_i = \frac{L_2 - L_4}{d(f_i - 0.5) + \delta_i} \quad (22)$$

$$\sin \beta_i = \frac{L_1 - L_3}{d(f_i - 0.5) + \delta_i} \quad (23)$$

$$L_4^2 + L_3^2 - [d(f_o - 0.5) + \delta_o]^2 = 0 \quad (24)$$

$$(L_2 - L_4)^2 + (L_1 - L_3)^2 - [(f_i - 0.5)d + \delta_i]^2 = 0 \quad (25)$$

윗 식들에서 미지수는  $\delta_t, \delta_r, \beta_i, \beta_o, \delta_i, \delta_o, L_3, L_4$ 이다.

### 4. 볼 베어링을 위한 탄성유체윤활이론

볼 베어링이 오랜 시간동안 만족스럽게 제 기능을 수행하려면 유체 윤활이 필요하다. 실제로 常用 볼 베어링의 윤활을 위하여 적정량의 그리이스를 주입한 후 이를 밀봉하고 있다. 볼 베어링의 경우와 같이 접촉 물체의 크기에 비해 매우작은 접촉영역이 형성되면, 접촉부에 높은 접촉 압력이 발생하게 되며, 이로 인한 접촉 물체의 탄성 변형을 고려하여야 한다. 탄성변형을 고려한 유체윤활이론을 탄성유체윤활이론이라 하며, 탄성유체윤활의 기구가 수학적으로 정립된 것은 1940년대 후반이며, 1960년대 초반에야 실험적으로 증명되었다. 이와 같은 탄성유체윤활이론을 볼 베어링에 적용하여 유막이 실제로 불과 케도륜을 분리시킨다는 사실을 정립한 것은 비교적 최근의 일이다.

#### 4.1 동압 유체 윤활 이론

축과 하우징사이에 윤활유를 주입한 후 축을 회전시키면 썩기 효과에 의한 압력이 발생하여 하중을 지지할 수 있다는 동압 유체 윤활이론은 1886년 Reynolds에 의해 완성되었다. 그림 8과 같이 물체 1이  $U_1$ 의  $x$ 방향속도로, 물체 2가  $U_2$ 의  $x$ 방향 속도와  $V$ 의  $y$ 방향속도로 움직일 때 두 물체사이의 매우 좁은 틈으로 흐르

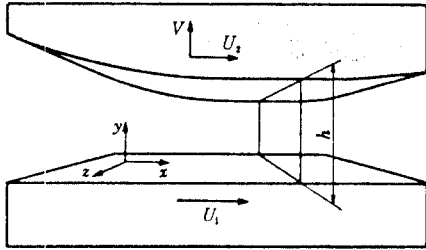


그림 8 상대운동을 하고 있는 두 물체의 간격

는 유체를 고려하기로 한다.

유체의 거동을 해석하기 위하여 Reynolds는 다음과 같은 가정을 하였다.

- ① 유체는 뉴턴유체(Newtonian fluid)이다.
- ② 유체는 비압축성이다.
- ③ 흐름은 층류이다.
- ④ 유체의 관성력과 체적력(inertia and body force)는 점성 및 압력에 의한 힘에 비하여 매우 작음으로 무시한다.
- ⑤ 유막 두께 방향으로의 압력의 변화는 무시할 수 있다.
- ⑥ 점도는 변화하지 않는다.
- ⑦ 유막두께 방향의 속도 구배는 나머지 방향의 속도구배에 비하여 매우 크므로 점성력에 관하여는 유막두께 방향의 속도구배만을 고려한다.
- ⑧ 유체와 고체의 경계에서 미끄럼이 발생하지 않는다. 즉 고체면에 접한 유체는 고체면과 동일속도로 움직인다.
- ⑨ 고체면은 압력등에 의해 변형되지 않는다. (고체는 강체이다) 즉  $h$ 는  $x$ 의 함수로 주어진다.

상기 가정을 비압축성 층류 뉴턴유체를 위한 Navier-Stokes 방정식에 적용한 후 연속 방정식과 조합하면 동압유체유탄이론의 지배 방정식인 Reynolds방정식 (26)을 얻는다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\eta(U_1 - U_2) \frac{dh}{dx} + 6\eta h \frac{\partial}{\partial x} (U_1 + U_2) + 12\eta V \quad (26)$$

여기서  $\eta$ 는 점도이다.

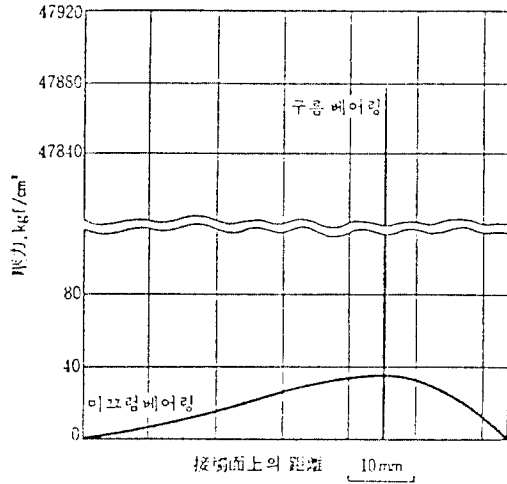


그림 9 미끄럼 베어링과 구름 베어링에서의 발생 압력

#### 4.2 탄성 유체유탄이론

구름접촉(concentrated contact)의 경우 동압유체유탄이론을 적용하여 그 해를 구한 전형적인 결과는 그림 9와 같다.

즉 구름베어링의 압력분포는 마치 델타함수 처럼 돌출되어 있어,  $1\text{kg}/\text{cm}^2$ 를 넘는 압력이 발생하는 범위는  $0.3\text{mm}$  정도에 지나지 않으며 그 크기는  $50000\text{kgf}/\text{cm}^2$ 에 가까운 값을 나타낸다. 이와같은 현상은 실제로 발생할 수 없으며 구름접촉의 경우 발생하는 고압의 영향을 고려하기 위하여 동압유체 유탄이론의 가정중 “점도가 일정하다”(가정 3)는 가정과 “고체는 강체이다”(가정 9)라는 가정은 수정되어야 한다.

ASME의 석유계 유탄유의 압력에 따른 점도의 변화에 대한 전형적인 자료는 그림 10과 같다.

이와같은 압력에 대한 점도의 변화를 기술하기 위하여 일반적으로 다음의 근사식을 이용한다.

$$\eta = \eta_0 \exp(\alpha p) \quad (27)$$

여기서  $\eta_0$ 는 대기압에서의 점도이며  $\alpha$ 는 점도의 압력계수이다.

구름접촉의 경우 압력 발생부분이 고체자체의 크기에 비해 아주 작은 부분에 국한되므로 압력에 의한 탄성체의 변형은 반무한체의 표면에 압력이 작용하는 경우의 탄성론에 근거한

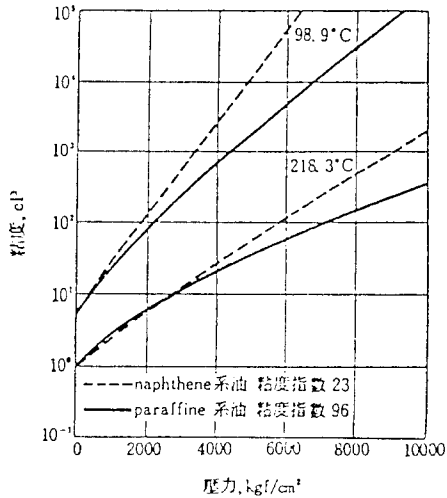


그림 10 압력에 의한 윤활유점도의 변화

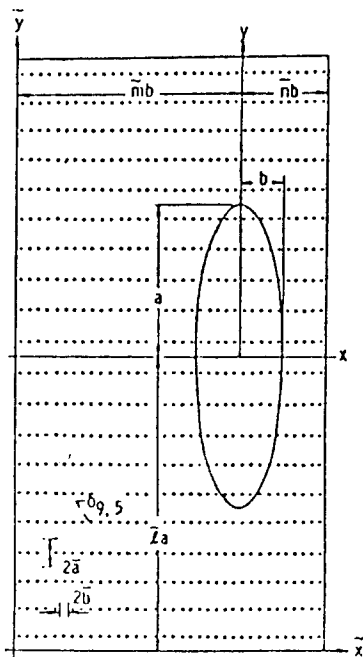


그림 11 접촉부의 요소분할

해석적인 해를 사용하여 구한다.

탄성유체윤활이론에 따라 압력분포 및 유막의 형상(특히 최소유막두께)를 구하기 위한 반복절차는 다음과 같다.

Step 0 : 그림 11과 같이 접촉영역과 그 주변

을 사각형요소로 분할한다. (일반적으로  $\bar{m}=4$ ,  $\bar{n}=1.15$ ,  $l=1.6$ 을 사용한다.) 초기 압력분포를 Hertzian 압력 분포로 가정한다. 접촉중심에서 간격  $h_0$ 를 추정한다.

Step 1 : 압력에 의한 탄성변형을 구하고 이를 이용하여 유막두께  $h$ 를 구한다.

$$h(x,y) = h_0 + s(x,y) + \delta(x,y)$$

여기서  $s$  : 변형전의 물체의 초기간격

$\delta$  : 탄성변형량

Step 2 : 현압력에서의 점도를 계산한다.

Step 3 : Reynolds 방정식을 풀어 압력분포를 구한다.

Step 4 : 압력분포를 적분하여 계산된 하중  $F$ 를 구하여 실제로 주어진 하중  $F$ 와 비교한다. 만약 이 두 값이 주어진 오차범위내에 있으면 해를 구한것이다. 아니면  $h_0$ 값을 수정하여 Step 1으로 가 반복한다.

## 5. 축 방향 하중을 받고 있는 고속 볼 베어링 해석

### 5.1 고속 볼 베어링의 운동학

탄성유체윤활상태에서의 고속 볼 베어링이 축 방향 하중을 받을 때 볼의 거동을 해석하고자 한다. 그림 12와 같이 회전축을 통과하는 고정좌표계  $x-y-z$ 와 볼 중심에 부착한 상대좌표계  $x'-y'-z'$ 를 설정하기로 한다.

볼 중심은 고정좌표에 대하여 각속도  $\omega_C$ 로 축주위를 공전하며, 고속으로 회전하는 볼은 상대좌표계에 대하여  $\omega_B$ 의 각속도로 자전할 것이다. 자전 각속도  $\omega_B$ 를 상대좌표계의 성분으로 분해하면 다음과 같다.

$$\omega_{x'} = \omega_B \cos \alpha^* \cos \beta^* \quad (28)$$

$$\omega_{y'} = \omega_B \cos \alpha^* \sin \beta^* \quad (29)$$

$$\omega_{z'} = \omega_B \sin \alpha^* \quad (30)$$

편의상 볼을 중심을 고정한 상대운동 좌표계에 대하여  $\omega_0$ 의 각속도로 회전하고 있는 내륜과  $\omega_B$ 의 각속도로 자전하고 있는 볼간의 변형

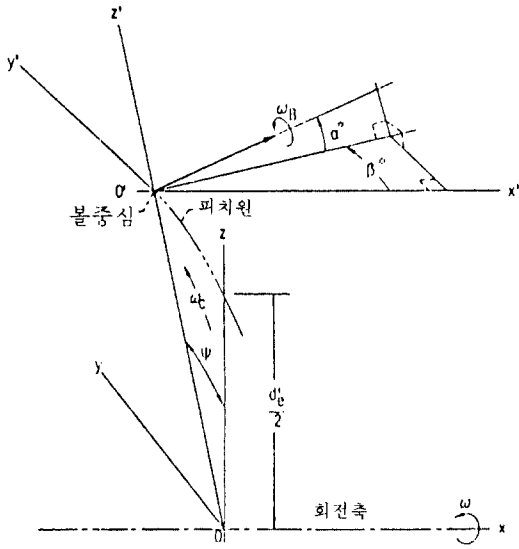


그림 12 좌표계

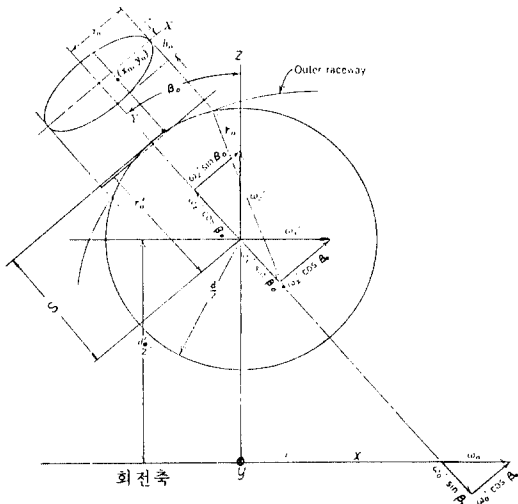


그림 13 외륜과 볼의 접촉

된 접촉을 그림 13에 도시한다. 타원형상의 접촉영역안에서 볼과 외륜이 순수 구름 접촉을 하고 있는 곳은 볼 중심에서  $r_0$ 만큼 떨어진 곳의 두 점에서만 발생하고 나머지 점들에서는 미끄럼이 발생할 것이다.

그림 13에서 볼 수 있는 바와 같이 임의의 점  $(x_0, y_0)$ 에서 볼이 가지는 구름 방향의 선속

도는 식 (31)로, 외륜이 가지는 구름방향의 선속도는 (32)식으로 기술할 수 있다.

$$v_{10} = -(\omega_{x'} \cos \beta_0 + \omega_{z'} \sin \beta_0)S \quad (31)$$

$$v_{20} = -d_e \omega_0 / 2 - \omega_0 \cos \beta_0 S \quad (32)$$

여기서

$$S = (r_0^2 - x_0^2)^{1/2} - (r_0^2 - a_0^2)^{1/2} + [(d/2)^2 - a_0^2]^{1/2} \quad (33)$$

따라서 볼에 대한 외륜의 미끄럼 속도  $v_{y0}$ 는 외륜의 속도에서 볼의 속도를 뺀 값이 된다.

$$v_{y0} = v_{20} - v_{10} \quad (34)$$

즉

$$v_{y0} = -d_e \omega_0 / 2 + (\omega_{x'} \cos \beta_0 + \omega_{z'} \sin \beta_0 - \omega \cos \beta_0)S \quad (35)$$

또한 지면에 수직인 방향을 가지고 있는 볼의  $\omega_{y'}$  성분은 구름 방향에 수직 방향(접촉타원의 장반경 방향)으로 미끄럼 속도  $v_{x0}$ 를 유발하며 그 크기는 다음식과 같다.

$$v_{x0} = \omega_{y'} S \quad (36)$$

볼과 내륜이 형성하는 타원 접촉내의 임의의 점  $(x_i, y_i)$ 에 발생하는 볼에 대한 내륜의 미끄럼 속도도 같은 방법으로 구할 수 있으며 그 결과는 식 (33), (35) 및 (36)들에서 외륜을 나타내는 하첨자 0를 내륜을 나타내는 하첨자  $i$ 로 바꿔준 것과 같다.

## 5.2 평형 방정식

고속으로 회전하고 있는 볼에 작용하는 힘과 모멘트를 그림 14에 도시한다.

볼과 궤도륜 사이에 재제되어 있는 윤활막의 미끄럼 속도가 공통법선 방향으로의 거리에 비례한다고 가정하면 윤활제의 점성에 의한 전단 응력  $\tau$ 는 다음과 같이 간단히 기술할 수 있다.

$$\tau = \eta \frac{v}{h} \quad (37)$$

여기서  $\eta$ 는 윤활제의 점도,  $v$ 는 미끄럼 속도, 그리고  $h$ 는 유막의 두께이다. 4.2절에서 기술한 바와 같이 점도는 압력의 함수이며 접촉압력은 접촉영역내의 위치에 따라 변하므로 점성 계수는 위치의 함수이다. 또한 유막두께도 접촉영역내의 위치에 따라 변화한다. 미끄럼 속

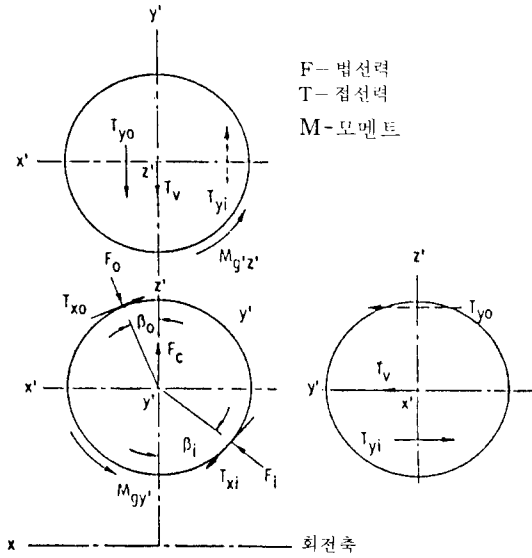


그림 14 볼에 작용하는 힘과 모멘트

도도 5.1절에서 기술한 바와 같이 위치의 함수이다. 그러므로 윤활제에 의하여 볼에 작용하는 점선 하중  $T$ 는 접촉영역내의 위치에 따라 변화하는 전단응력  $\tau$ 를 쫓 접촉영역에 대하여 적분한 값이 된다. 내륜쪽의 점선하중  $T_{xi}$ ,  $T_{yi}$ 를 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$T_{yi} = a_i b_i \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tau_{yi} dY dX \quad (38)$$

$$T_{xi} = a_i b_i \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tau_{xi} dX dY \quad (39)$$

외륜쪽의 점선하중  $T_{xo}$ ,  $T_{yo}$ 를 위한 수식은 식 (38)과 (39)에서 하첨자  $i$ 를  $o$ 로 바꿔준 것과 같다.

공존하고 있는 볼에 작용하는 점성으로 인한 항력  $T_v$ 는 다음 식으로 주어진다.

$$T_v = \frac{\rho A_v C_v (d_e \omega_c)^2}{8} \quad (40)$$

여기서  $\rho$ 는 윤활제의 밀도,  $A_v$ 는 볼의 항력 면적(drag area),  $C_v$ 는 항력계수이다.

볼에 작용하는 힘들은 다음과 같은 평형방정식들을 만족하여야 한다.

$$F_o \cos \beta_o - F_i \cos \beta_i - T_{xo} \sin \beta_o + T_{xi} \sin \beta_i - F_c = 0 \quad (41)$$

$$F_o \sin \beta_o - F_i \sin \beta_i + T_{xo} \cos \beta_o - T_{xi} \cos \beta_i = 0 \quad (42)$$

$$T_{yo} - T_{yi} + T_v = 0 \quad (43)$$

여기서  $F_c$ 는 질량  $m$ 의 볼에 작용하는 원심력으로 그 크기는 다음과 같다.

$$F_c = \frac{1}{2} m d_e \omega_c^2 \quad (44)$$

또한 볼에 작용하는 모멘트들은 다음의 평형방정식들을 만족하여야 한다.

$$\frac{d}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-Y^2}}{\sqrt{1-X^2}} (a_o b_o \tau_{xo} + a_i b_i \tau_{xi}) dX dY - M_{gy'} = 0 \quad (45)$$

$$\frac{2}{d} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-Y^2}}{\sqrt{1-X^2}} (a_o b_o \tau_{yo} \cos \beta_o + a_i b_i \cos \beta_i \tau_{yi}) dY dX = 0 \quad (46)$$

$$\frac{2}{d} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-X^2}}{\sqrt{1-Y^2}} (a_o b_o \tau_{yo} \sin \beta_o + a_i b_i \tau_{yi} \sin \beta_i) dY dX - M_{gz'} = 0 \quad (47)$$

여기서  $M_{gy'}$ ,  $M_{gz'}$ 는 극관성 모멘트  $J$ 를 가진 볼에 작용하는 gyroscopic moment이며 다음 식과 같은 크기를 가진다.

$$M_{gy'} = J \omega_c \omega_{z'} \quad (48)$$

$$M_{gz'} = J \omega_c \omega_{y'} \quad (49)$$

$n$ 개의 볼을 가진 베어링에 축방향 하중  $F_t$ 가 가해지면 각 볼은  $F_t/n$ 만큼의 하중을 균등하게 담당한다. 볼에 작용하는 축방향 힘과 축방향 외력은 평형을 이루어야 하므로 다음식을 만족하여야 한다.

$$F_i \sin \beta_i + T_{xi} \cos \beta_i - \frac{F_t}{n} = 0 \quad (50)$$

### 5.3 축 방향 하중하에 있는 고속 볼 베어링을 위한 지배 방정식

축방향 하중만이 작용할 때 볼과 케드륜의 접촉으로 인한 탄성변형의 관계식은 3.3절에서 기술한 식들에서  $\delta_r$ 이 0인 경우로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$L_i^2 + L_o^2 - [d(f_o - 0.5) + \delta_o]^2 = 0 \quad (51)$$

$$(D \cos \beta_f - L_s)^2 + (D \sin \beta_f + \delta_i - L_3)^2$$



$$-[(f_i - 0.5)d + \delta_i]^2 = 0 \quad (52)$$

식 (41)~(43), 식 (45)~(47) 및 식 (50)의 7개의 평형방정식에 접촉력  $F_i$ ,  $F_o$ 에는 식 (7)을, 접선력  $T_{xi}$ ,  $T_{yi}$ 에는 식 (38)과 식 (39)를,  $T_{xo}$ ,  $T_{yo}$ 에는 하첨자를 바꾼식을,  $T_v$ 에는 식 (40)을, 원심력  $F_c$ 에는 식 (44)를, gyroscopic moment  $M_{gy}$ ,  $M_{gz}$ 에는 식 (48)과 (49)를,  $\cos \beta_o$ ,  $\cos \beta_i$ ,  $\sin \beta_o$ ,  $\sin \beta_i$ 에는 식 (20)~(23)식을 대입한다. 변환한 7개의 방정식과 식 (51), (52)는 9개의 비선형 연립방정식을 구성하며, 이로부터 수치적인 방법에 의하여 9개의 미지수  $L_3$ ,  $L_4$ ,  $\delta_i$ ,  $\delta_o$ ,  $\delta_t$ ,  $\alpha^*$ ,  $\beta^*$ ,  $\omega_B$ ,  $\omega_C$ 를 구한다.

## 5. 맺음 말

볼 베어링의 성능에 중요한 영향을 미치는 볼 베어링 특유의 기하학적 형상, 탄성론에 근거한 볼과 웨드론 사이의 접촉역학 및 구름접

촉을 위한 탄성 유체유허이론을 소개한 후, 축방향 하중하에서 고속으로 회전하고 있는 볼 베어링의 해석방법을 기술하였다. 소개된 해석방법이 완벽한 것은 아니며, 보다 엄밀한 해석을 위하여 마찰열에 의한 온도상승의 영향을 고려하여야 할 것이다. 또한 해석 결과를 얻기 위하여 효율적인 수치 계산법을 적용한 볼 베어링 해석을 위한 결과를 얻기 위하여 효율적인 수치 계산법을 적용한 볼 베어링 해석을 위한 전용 소프트웨어를 개발하여야 한다. 외국에서는 이와 같은 컴퓨터 프로그램이 사용되고 있으나, 우리도 독자적으로 전용 소프트웨어를 개발함으로써, 외국의 소프트웨어를 도입하였을 때의 한계를 피하고, 다양한 응용에마다 가장 효율적인 해석을 할 수 있는 유연성을 가질 필요가 있다고 생각한다. 구조물 최적설계를 위하여 유한요소 해석 프로그램을 이용하듯이, 이와 같은 전용 해석 소프트웨어를 사용하여 볼베어링의 최적설계를 할 수 있을 것이다.

## 會員 原稿 投稿 案内

1. 內容 : 1) 論說, 展望, 解說, 講座, 資料, 紹介, 紀行文·見學 및 參觀記, 體驗談, 隨筆, 國內外뉴스, 會員의 소리, 其他.  
※採擇된 原稿는 本學會 所定의 原稿料를 드립니다.
- 2) 『特別會員』社의 研究所 紹介 및 新製品 紹介, 工場 施設 擴張, 國產化 또는 技術開發 成功事例 等
2. 其他 : 投稿 原稿의 內容, 題目 等은 自由로 하며, 수시로 접수합니다.
3. 작성요령 : 가능한 한 국문(한자 포함)으로 작성하되 특별한 용어는 ( )에 기타 외래어로 표기하고, 그림은 인쇄시 직접 촬영할 수 있도록 깨끗이 그리며, 그 내용 및 타이틀도 한글로 하여야 하며 접수시 필자의 전공분야 및 관심분야를 50자 내외로 적어서 사진 1매와 함께 접수시켜 주십시오.
4. 原稿接受處 : 大韓機械學會 事務局 編輯擔當者.  
서울特別市 永登浦區 汝矣島洞 13의 31(기계회관 6층)  
전화 : (02)783-4571 FAX : (02)780-1370