

유한요소해석과 CAD/CAM

蔡 洙 元

한국기계연구소 CAD/CAM실 선임연구원



- 1955년생
- 전산역학을 전공하였으며, 유한요소법의 이론 및 응용과 CAD시스템과의 연결을 위한 solid modeling 및 전후처리 시스템 개발에 많은 관심을 가지고 있다.

1. 머리말

유한요소법은 기계설계나 구조 해석등의 공학적 문제 해석에 일반적으로 널리 사용되고 있다. 특히 최근들어 컴퓨터 하드웨어 가격이 크게 저렴해지고 성능이 우수한 범용 소프트웨어의 보급이 보편화 됨에 따라 유한요소해석을 포함하는 종합적인 CAD/CAM시스템의 사용이 급격히 증가하게 되었다.

그림 1은 CAD/CAM의 대상분야를 도식적으로 보여주고 있다⁽¹⁾. 이 그림에서 보는바와 같이 CAD/CAM은 유한요소해석을 포함한 여러가지 설계, 해석 및 생산등에 필요한 기술을 종합하는 분야라 할 수 있다. 본질적으로 CAD/CAM이란 설계에서 생산에 이르는 일련

의 공정들을 자동화 시키고자 하는 노력을 의미한다. 이러한 노력들은 일부 실질적인 응용에서 상당한 성과를 거두고 있으나, 일반적으로 여러가지 다른 응용 분야를 자동적으로 연결시킨다는 것은, 각 공정에 필요한 가정들이 서로 다르고, 또 많은 양의 자료와 정도들이 상호 교환되어야 하므로 매우 어려운 문제라 하겠다. 그럼에도 불구하고 그림 1에서와 같은 종합적인 자동화 기술은 궁극적으로 달성되어야 할 목표라 할 수 있으며, 또 이러한 목표들은 멀지않아 상당한 정도까지 실현될 전망이다. 이 글에서는 CAD/CAM시스템에서 유한요소 해석에 필요한 과정들과 이와 관련된 기술 및 연구동향을 살펴보기로 한다.

그림 2는 CAD시스템에서 유한요소해석을 위한 과정들과 이때 사용되는 상용 소프트웨어들을 보여주고 있다⁽¹⁾. 여기서 형상정의기구(geometric modeler)는 해석하고자 하는 대상의 형상을 정의 하는데 사용되고, 그후 전처리 시스템에 의해 유한요소망과 해석변수들이 준비되며, 해석이 끝난 후 후처리 시스템에 의해 계산결과가 평가된다. 그림 2에서 보는 바와 같이 CAD/CAM 시스템에서 유한요소해석을 하기 위한 이상적인 형상정의방법은, 형상정의기구를 사용하는 방법이다. 여기서 형상정의기구로는 보통 고체모델러(solid modeler)가 사용되며, 대상물체가 관구조물일 경우에는 표면 모델러(surface modeler)가 사용될 수도 있다.

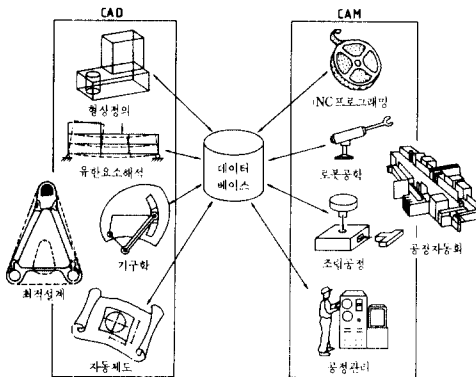


그림 1 CAD/CAM의 대상분야

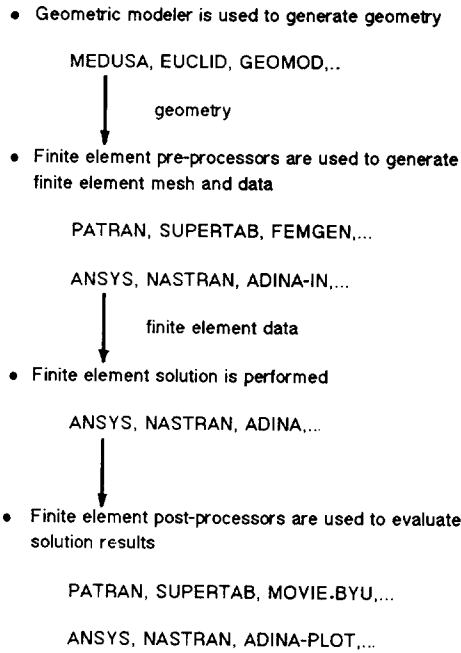


그림 2 CAD시스템에서 유한요소해석 과정 및 소프트웨어

고체 모델러가 구성되는 방법으로는 CSG (constructive solid geometry), bRep (boundary representation), 혹은 양자를 조합한 hybrid type 등이 있으며, 유한요소해석 모듈과의 연결에 있어서 특별한 제한은 없으나, 어떠한 형태의 고체모델러를 사용하더라도, 해석 대상물체의 경계부분 (boundary)에 대한 정보를 항상 쉽게 얻을 수 있어야 한다.

그림 3은 유한요소해석에 필요한 전반적인 과정들을 보여주고 있다⁽²⁾. 유한요소해석을 하기 위하여 해석자는 문제의 물리적 개념과 역학적 특성을 이해하고 있어야 하며, 이를 토대로 해석에 필요한 기계적 (혹은 수학적) 모델을 적절히 선정할 수 있게 된다. 이때 주어진 물체를 2차원으로 해석할 것인가 혹은 3차원으로 해석할 것인가를 결정하여야 하며, 또 어떠한 경계조건을 사용할 것인가, 선형 혹은 비선형 해석을 할 것인가, 재질은 어떠한 모델을 선택할 것인가 등에 관한 결정을 하게 된다. 또

한 기하학적인 세부 형상은 경우에 따라 과감하게 단순화 시킬 수도 있게 된다. 따라서 유한요소해석에 필요한 형상은 CAD시스템에서 설계단계에서 정의된 것보다 훨씬 단순화된 모델이 사용되는 경우가 많이 있다.

유한요소 모델에 사용되는 기본 요소 (element) 들은 대략 두가지로 분류 될 수 있다⁽³⁾. 첫째는 직접요소 (direct element)로서 2차원 요소나 3차원 요소를 말하며 이들을 사용한 모델의 형상은 대상물체의 형상과 일치하게 된다. 둘째는 간접요소 (indirect element)로서 구조요소 (structural element; beam, plate/shell element)나 특수요소 (스프링, 접촉, 질량, 점성요소) 등을 말하며, 이들을 사용한 모델의 형상은 대상물체의 형상과 일치하지 않게 된다. 일반적으로 유한요소망의 자동적 구성이란 직접요소를 사용하는 경우가 대부분이며 간접요소중 판요소 (plate/shell element)를 사용하는 경우도 포함된다. 다른 간접요소를 사용하는 경우는 해석을 위한 모델링에 많은 가정

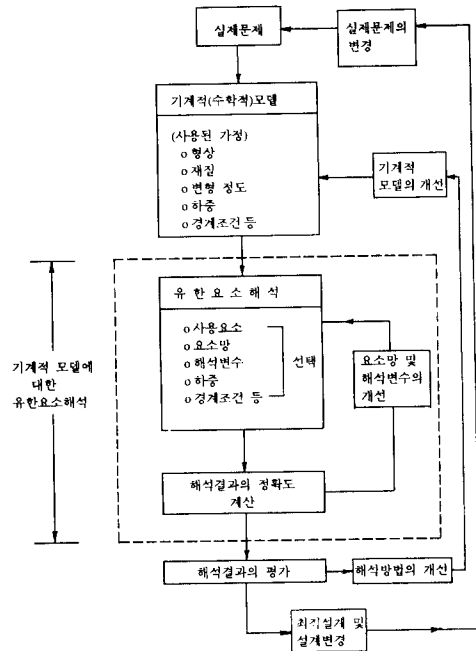


그림 3 유한요소해석의 전반적인 과정

과 단순화가 필요하므로 요소망의 자동생성보다는 전문가의 경험을 필요로 하는 해석변수의 선택과 같은 모델링에 더 큰 비중이 있다 하겠다.

유한요소해석이란 이와같이 얻어진 기계적 모델을 지배하는 미분방정식을 푸는 과정을 뜻하며, 이러한 해석은 결과의 정확도(accuracy)에 대한 평가를 필요로 하게 된다. 만약 해석 결과가 주어진 정확도를 만족시키지 못할 때는, 유한요소망(finite element mesh)이나 해석변수들이 더욱 세분화 되어, 필요한 정확도를 얻을 때까지 반복하여 해석을 하게 된다. 일반적으로 해석자는 유한요소해석에 소요되는 경비가(요소망 구성과 해석에 필요한 인건비 및 컴퓨터 비용) 필요 이상으로 소요되는 것을 막기 위하여, 지나치게 조밀한 요소망을 피하게 된다. 한편 요소망은 주어진 정확도를 얻기 위하여 충분히 조밀하여야 한다.

이상과 같이 지금까지의 유한요소해석은 모델링, 요소구성 및 해석기법에 있어서 해석자의 경험에 주로 의존하고 있다. 따라서 해석자는 유한요소법의 사용에 상당히 익숙해져 있어야 하며, 이는 설계자나 해석자에게는 큰 부담이 아닐 수 없다. 특히 적절한 요소의 선정, 정적 및 동적해석에 있어서 해석변수의 선택, 마찰등을 포함한 경계조건의 모델링, 복합재료 및 비선형 재료의 모델링 등과 같은 과정은 자동화시키기 어려운 문제라 할 수 있다. 그러나 일반적으로 유한요소해석에 소요되는 경비의 대부분을(50%이상) 차지하는 적절한 요소망의 구성과 같은 문제는 자동화될 수 있다고 하겠다. 따라서 CAD/CAM에서 유한요소해석을 사용하는 데 앞으로 가장 큰 발전은 해석에 필요한 모델링을 자동적으로 하는 일, 즉 요소망의 구성, 결과의 정확도 입증, 적응 분할등의 과정을 자동적으로 수행할 수 있게 하는데 있다고 하겠다. 그러므로 앞으로의 유한요소해석 전후처리 프로그램은 다음과 같은 조건들을 만족 시켜야 할 것이다.

- 해석자는 필요한 유한요소망을 비교적 손쉽게 정의할 수 있어야 한다. 즉 해석자가 입

력 자료 작성에 적은 노력을 들이고도, 프로그램에 의해 요소망이 쉽게 자동적으로 구성될 수 있어야 한다.

- 해석에 필요한 요소망이 구성되고 또 해석이 수행되었을 때, 유한요소해설 프로그램은 결과의 정확도를 나타낼 수 있어야 한다. 이때 정확도란 수학적 모델의 엄밀해(exact solution)에 대한 오차를 의미한다.
- 해석 결과의 정확도에 대한 평가가 끝난 후 요구되는 정확도에 따라 프로그램은 필요 부분에 있어서 요소망을 조밀하게 세분화 시키거나, 바꾸는 작업을 자동적으로 할 수 있어야 한다.

이러한 관점에서 볼 때, 다음과 같은 분야에 대한 연구가 필요하며 또 많은 연구가 이루어지고 있다.

— 요소망의 자동적 구성(automatic mesh generation)

— 요소망의 효율 개선(mesh improvements: adaptive refinement, remeshing)

— 해석 결과의 평가(evaluation of the analysis results)

이러한 연구의 대부분은 선형탄성해석(linear elastic analysis)의 경우에 대해 이루어지고 있으며, 이를 토대로 앞으로는 소성변형과 같은 비선형 문제해석(nonlinear analysis)에도 적용하기 위한 연구가 활발히 이루어질 전망이다.

이러한 노력들의 궁극적인 목적은 유한요소해석을 자동화시켜 설계자가 설계과정에서 자신의 생각을 자유롭게 구상할 수 있도록 하는데 있으나, 이때 자동화된 과정들이 설계자의 창의력을 대신할 수 있으리라고는 기대할 수 없다. 대신에 이러한 과정들이 설계자가 자신의 설계 구상을 손쉽게 확인해 봄으로써 보다 창조적이고 유연성있게 설계할 수 있는 효과적인 방법을 제공한다고 볼 수 있다.

2. 유한요소망의 자동적 구성

유한요소망의 자동적 구성 방법은 지난 15년

간에 걸쳐서 많은 연구가 이루어져왔고 또한 그 중 상당부분 실용화되어 있는 실정이며, 보다 효율적인 방법을 개발하기 위하여 아직도 많은 연구가 이루어지고 있다. 유한요소망의 자동적 구성 방법에 대한 종합적인 분석 및 검토는 참고문헌 (4)와 (5)등에 자세히 소개되고 있고 또 본 학회지에서도 소개된 바가 있으므로⁽⁶⁾, 이 글에서는 각 방법에 대한 세부적인 설명을 가급적 생략하고 이들의 특징과 장단점을 간략하게 논의 하고자 한다.

이 글에서 요소망의 자동적 구성문제는, 앞에서 언급된 바와같이 직접요소인 2차원요소(2-D element)나 3차원요소(3-D element)를 사용하는 경우를 말하며, 보통 임의의 해석영역에 대해서 자동적으로 요소망을 구성하기 위하여 기하학적 유연성(flexibility)이 높은 삼각형요소(triangular element)나 사면체요소(tetrahedral element)를 사용하게 된다. 이때 사용되는 요소의 형태가 해석결과와 정확도에 미치는 영향을 고려하여 볼 때 가급적 정삼각형이나 정사면체에 가까운 요소들을 생성하는 것이 바람직하다 하겠다.

또한 주어진 정확도를 만족시키는 해석결과를 얻기 위하여 요소망의 개선방법이 사용되는데, 이때 재구성 횟수를 줄이기 위해서는, 처음부터 효율적인 요소망 즉 국부조밀 요소망을 구성할 수 있어야 한다. 따라서 바람직한 자동 요소망 구성 방법은 다음의 조건들을 만족시켜야 한다.

- 국부 조밀 요소망을 쉽게 구성할 수 있어야 한다.
- 생성된 요소들은 2차원의 경우 정삼각형에, 3차원의 경우 정사면체에 가급적 가까워야 한다.
- 요소망 구성에 소요되는 노력과 경비가 적어야 한다.

유한 요소망의 자동적 구성 방법은 보는 관점에 따라 여러가지 다른 분류가 가능하며, 이 글에서는 대략 다음의 여섯가지 방법으로 분류하여 보았다.

2.1 절점 연결 방법(Node Connection)

이는 해석영역 경계 및 내부에 규칙적인 방법(non-random technique)이나 불규칙적인 방법(random technique)을 사용하여 절점을 생성시킨 후, 이들 절점들을 연결하여 요소를 만들어가는 방법이다^(7~11). 이때 절점들을 연결시키는 방법으로 Delaunay triangulation등이 있다^(12~14). 이 방법에서는 국부조밀 요소망 구성을 위한 내부절점을 자동적으로 생성하기가 곤란하며, 아직 실용화 단계에 이르지 못하고 있다.

2.2 매핑(Mapping) 방법

이 방법은 해석영역을 매개변수를 사용한 단순한 영역으로 변환시켜 매개변수 영역에서 유한요소망을 구성한 후 본래의 해석영역으로 다시 변환시키는 것이다. 이때 사용되는 매핑 방법으로는 isoparametric 매핑, transfinite 매핑, conformal 매핑 등이 있다^(15~18). 여기서 매핑을 쉽게 하기 위하여 해석영역을 간단한 세부영역으로 나누어야 하며, 이는 수동적으로 하게 된다. 이 방법은 매개변수 영역에서의 요소망 구성 기법이 매우 간편하며, 해석영역이 단순한 형태일 경우 균일한 요소망을 구하기에 가장 적합하므로, 현재 대부분의 상용 소프트웨어들이 이 방법을 사용하고 있다. 그러나 형상이 복잡한 모델은 해석영역을 간단한 세부영역으로 수동적으로 나누어야 하므로, 반자동적인(semi-automatic) 요소망 구성방법이라 할 수 있다. 이 방법에 의하면 해석 결과의 정확도가 대체로 우수한 사각형이나 육면체 요소를 사용할 수 있는 반면, 국부 조밀 요소망의 구성에는 많은 제약이 있다.

2.3 요소 분해법(Cell Decomposition)

주어진 해석영역을 사각형이나 육면체 등과 같은 기본 요소들의 집합인 격자(grid)를 사용하여 요소망을 구성해 나가는 것으로서 대표적인 방법으로는 Quadtree방법이나 Octree방법 등이 있다^(19~22). 이렇게 얻어진 사각형이나 육

면체등은, 이후 삼각형이나 사면체등으로 재분할되어 사용된다. 이 방법은 해석영역 내부에서는 좋은 형태의 요소들이 얻어지나, 경계 부분에서는 찌그러진 형태의 요소가 얻어지기 쉬운 단점이 있다. 3차원 응용에 있어서는 현재 일반적인 방법으로 인정되고 있다.

2.4 절점 및 요소 동시 생성법 (Nodes and Elements Created Simultaneously)

해석 영역의 경계 (boundary)에 사용자가 주요 절점 (key nodes)들을 배치시킨후, 이를 토대로 경계에서부터 영역의 안쪽으로 내부 절점과 요소들이 동시에 생성되는 방법이다^(23~27). 이 방법은 국부조밀 요소망을 쉽게 구성할 수 있는 장점이 있으나, 해석영역 내부에서 찌그러진 형태의 요소가 얻어지기 쉬운 단점이 있다. 이 방법을 사용한 경우 2차원 문제에서는 비교적 좋은 결과들을 얻고 있으며, 최근에 3차원 문제에 적용하기 위한 방법도 개발되고 있다⁽²⁷⁾.

2.5 형상 분해법 (Geometry Decomposition)

이는 해석영역의 경계에 배치된 주요 절점들을 기준으로 절취선 (split line)등을 사용하여 계속적으로 분할함으로써 최종의 요소들을 얻는 방법이다^(28~29). 대표적인 상용 프로그램으로 SUPERTAB에서 사용되는 TRIQUAMESH가 있다⁽²⁹⁾. TRIQUAMESH의 경우 다른 mesh generator와는 달리 2차원 문제에서 삼각형 요소는 물론 사각형 요소만으로도 국부조밀 요소망을 구성할 수 있는 장점이 있다.

2.6 위상 분해법 (Topology Decomposition)

이 방법은 Euler operator와 비슷한 기능을 가진 operator를 사용하여 해석 영역을 보다 단순한 형상으로 나누어가며 요소들을 만드는 것으로, 해석영역을 정의하는 정점 (vertex)들이 요소망에 있는 유일한 절점들이 되고 영역 내부에 다른 절점이 생성되지 않게된다^(30,31). 결과적으로 대체로 조악한 (coarse) 요소망을

얻게 되고, 각 요소들 또한 크게 찌그러진 (distorted) 형태를 가지게 되므로, 이들을 해석에 직접 사용하기에는 부적합하다. 따라서 이후 요소망의 분할 과정 (refinement process)을 통하여 보다 효율적인 요소망을 만들게 되나, 분할 과정만으로는 국부조밀 요소망이나 좋은 형태의 요소를 만들기에 한계가 있으므로, 실용화 단계에 이르지 못하고 있다.

3. 유한요소망의 개선 (Mesh Improvement)

유한요소망의 효율을 개선하기 위한 방법은 최적요소망 (optimal mesh)을 얻고자하는 노력의 일환으로 많이 연구되어 왔다⁽³²⁾. 여기서 최적요소망이란 주어진 정확도를 얻을 수 있는 가장 경제적인 요소망을 의미하거나, 혹은 주어진 위상의 요소망 (fixed mesh topology)에서 최대의 정확도 혹은 최대의 스트레인 에너지 (strain energy)를 얻을 수 있는 요소망을 의미한다. 그러나 해석 결과의 정확도에 관한 일반적인 정의를 하기란 쉽지 않다. 즉 정확도를 측정하는 변수로서 응력, 변형, 변위, 에너지등의 어느 것을 기준으로 정할 것인가 하는 문제가 있으며, 또 국부적인 관심부위의 정확도와 해석영역 전체에 걸친 정확도등 어느 것에 중점을 두느냐에 따라서도 달라질 수 있기 때문이다. 더우기 가장 경제적인 요소망이란 의미도 요소망의 위상 (topology)과 자유도 (degree of freedom)가 동시에 변할 수 있으므로, 주어진 문제에 대해 항상 유일하게 정의되기 어려운 점도 있다. 따라서 최적요소망이란 전문가들 간에도 논란의 여지가 많으며, 대신에 근사최적요소망 (near-optimal mesh) 혹은 효율적인 요소망 (effective mesh)등의 용어를 사용하는 것이 무리가 없다 할 수 있다.

유한요소망을 개선하기 위한 방법으로는 대략 다음의 세 가지를 들 수 있다. 첫째는 절점 재구성 방법 (node relocation r-method)으로서, 이는 유한요소망의 자유도를 고정시킨채

즉 요소망의 위상(topology)을 변형시키지 않고 절점의 위치(nodal point coordinates)를 변화시킴으로서 요소망을 개선시켜 나가는 방법이다^(32~34). 이때 사용되는 목적함수(objective function)로서 일반적으로 시스템의 총 포텐셜 에너지(total potential energy)를 들 수 있다. 이 방법은 유한요소해석 결과가 포텐셜 에너지를 최소화시키는 값이라는 이론에 근거를 두고 있다. 따라서 이는 다음식 (1)을 만족시키는 절점의 위치벡터 x 를 구하는 최적화 문제로 정의 될 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{minimize} & : \pi(x, \underline{U}(x)) & (1) \\ \text{where} & : \pi = \frac{1}{2} \underline{U}^T \underline{K} \underline{U} - \underline{U}^T \underline{R} \\ \text{subject to} & : \text{Geometry constraints} \end{aligned}$$

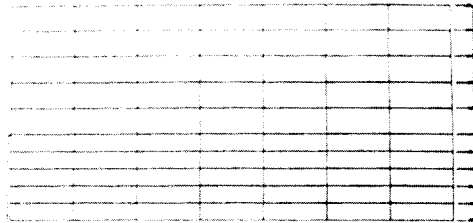
식 (1)에서 π 는 총 포텐셜 에너지를 나타내고, \underline{U} 는 유한요소 해석 결과인 변위 벡터를, \underline{R} 은 외력 벡터(externally applied force)를, \underline{K} 는 강성 매트릭스(stiffness matrix)를 나타낸다.

이 방법에서는 x 와 \underline{U} 의 관계가 복잡하고, 또 변수로 사용되는 절점의 위치 x 에 대한 기하학적 구속조건이 까다로우므로 수치적 최적화 기법을 적용하기가 쉽지 않다. 또한 그 결과 얻어지는 요소망도 그다지 만족스럽지 못한 경우가 많다. 이 밖에도 Kikuchi 등은 보간오차이론(interpolation error theorem)을 적용하여 보간함수에서 오는 오차를 최소화 시키는 방법을 사용함으로써 비교적 좋은 요소망을 얻고 있다^(19,33). 이 방법을 파괴역학 문제에 적용하여 요소망을 구성한 예가 그림 4에 나타나 있다. 그림 4(a)는 크랙이 있는 평판의 1/4모델에 대한 초기 요소망이며, 그림 4(b)는 r-method를 사용하여 얻은 요소망이다⁽¹⁹⁾.

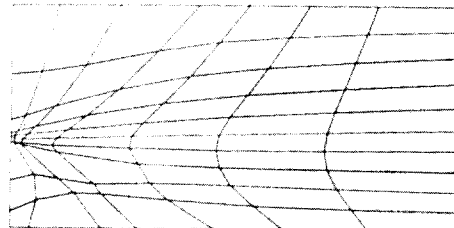
그러나 위와 같이 r-method에 의해 요소망을 개선하는 방법은 매개변수인 절점을 계속적으로 변화시키는 데 많은 양의 계산이 필요하게 되어 경제적이지 못하며, 또 초기에 충분한 자유도를 가진 요소망을 사용하지 않으면 주어진 정확도를 만족시키는 결과를 결코 얻을 수

없다는 단점이 있다.

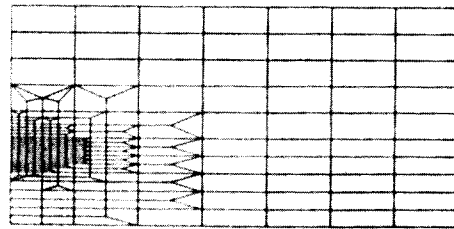
두번째 방법은 요소망에 사용되는 자유도를 늘려감으로써 해석결과의 정확도를 높이는 것으로서, 요소분할방법(element refinement, h-method)과 고차보간방법(higher-order interpolation, p-method) 및 양자를 보완한 hp-method등이 있다. 이 방법은 해석결과에 대한 오차를 각 요소별로 계산하여 오차가 많이 발생한 요소들의 자유도를 늘려나가는 것이다. 여기서 h-method는 해석에 사용된 보간함수(interpolation function)의 차수(order)는 변화시키지 않고 해당요소를 더 작은 여러개의 요소들로 세분화(subdivide)시킴으로써 자유도를 늘려나가는 방법이며, 이는 기존의 프로그램을 쉽게 보완하여 사용할 수 있는 장점이 있



(a) 크랙이 있는 탄성 평판의 1/4모델



(b) r-method에 의한 요소망



(c) h-method에 의한 요소망

그림 4 파괴역학에 적용된 r-method 및 h-method

다⁽³⁵⁻³⁷⁾. p-method는 요소의 크기를 변화시키지 않고 보간함수의 차수를 높여 나가는 것으로서, 이는 기존의 프로그램에 적용시키기가 어렵다^(38,39). 일반적으로 응력집중 부위를 제외하고는 p-method를 사용한 경우가 h-method를 사용한 경우보다 엄밀해(exact solution)에 수렴하는 속도(rate of convergence)가 훨씬 빠른 것으로 알려져 있다. 이 밖에 h-method와 p-method를 동시에 사용하는 hp-method도 있으며 이는 세가지 방법중에서 수렴속도가 가장 빠른 것으로 알려져 있으나, 실제 적용이 매우 복잡하다⁽⁴⁰⁾. 아직까지는 위의 세가지 방법중에서 기존의 프로그램에 쉽게 적용할 수 있는 h-method가 가장 많이 사용되고 있다. 그림 4(c)는 h-method를 사용하여 얻은 요소망을 보여주고 있다⁽¹⁹⁾.

위와 같은 방법들을 적용하는 데 있어서 고려해야 할 다른 중요한 사항으로 어떠한 오차지표(error indicator)를 사용할 것인가의 문제를 들 수 있다. 오차지표에 관해서는 Babuska등에 많은 연구가 이루어져 왔으며⁽⁴¹⁾, 보통 변위를 기초로한(displacement-based) 유한요소법에서는 평형 방정식이 만족되지 않는 정도를 에너지 형태(energy norm)로 변형시켜 사용하고 있다.

이상과 같이 요소망에 사용되는 자유도를 계속 늘려가는 방법에 의하면 주어진 정확도를 만족시키는 요소망을 얻을 수 있게 된다. 그러나 초기에 조악한 요소망을 사용하는 경우, 최종 요소망을 얻을 때까지 여러번에 걸친 요소의 분할과정(refinement process)이 필요하므로 계산량이 많아지고, 또한 최종 요소망은 초기 요소망에 기하학적으로 국한되어(constrained) 세분화 되는 단점이 있다.

세번째는 요소망의 재구성(remeshing)방법으로서^(32,42,43), 이는 초기해석에서 얻어진 특정한 해석변수들의 분포상태를 기준으로 요소망에 사용되는 자유도와 위상을 모두 바꾸어 전혀 새로운 요소망을 재구성 하는 것이다. 이때 요소망 재구성의 기준이 되는 해석 변수들로는

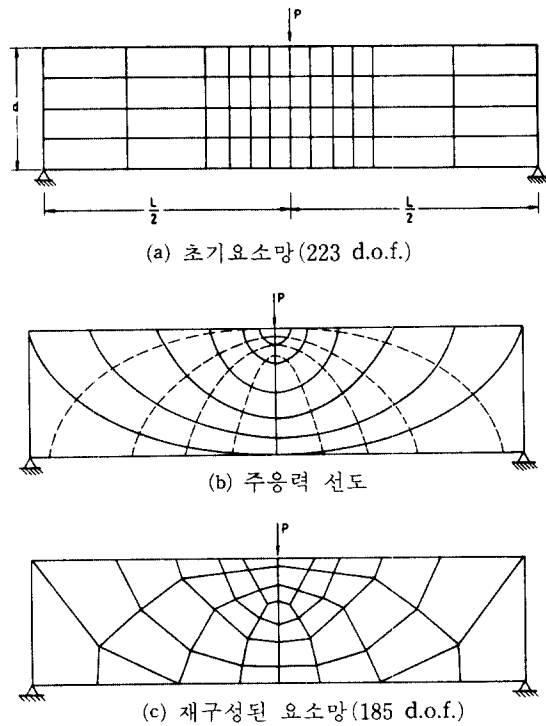


그림 5 주응력 선도(isostatics)에 의한 요소망의 재구성 예.

등에너지선도(isoenergetics), 주응력선도(isostatics), 등변위선도(contours of constant displacement)등이 있으며, 이는 이러한 변수들의 분포가 효율적인 요소망과 유사하다는 가정에 근거를 두고 있다. 그림 5는 주응력선도(isostatics)를 사용하여 요소망을 재구성한 예를 보여주고 있다⁽⁴⁴⁾. 이 방법의 가장 큰 장점은 새로운 요소망이 초기 요소망에 제한되지 않고 재구성될 수 있는데 있으나, 반면에 재구성된 요소망이 주어진 정확도를 만족시킨다는 보장이 없다는 문제가 있다.

이상과 같이 요소망의 효율을 개선하기 위한 방법들을 살펴보면, 주어진 정확도를 만족시키는 효율적인 요소망을 구성 하기위해서는 위의 세가지 방법을 적절히 조합하여 사용하는 것이 가장 바람직할 것으로 전망된다.

4. 해석 결과의 평가(Evaluation of the Analysis Results)

유한요소해석 결과의 정확도를 판단하는 데는 탄성이론의 기존식들을 사용할 수 있다. 즉 선형탄성해석에 있어서, 엄밀해(exact solution)는 다음 세가지 조건을 만족시키게 된다⁽⁴⁵⁾.

- 변위 경계조건을 포함한 변위의 적합성 (compatibility)
- 경계를 포함한 해석영역의 모든 점에서의 평형 미분방정식(equilibrium equation)
- 응력-변형의 관계(stress-strain law)

역으로 위의 세가지 조건들을 만족시키는 결과가 있다면, 이는 수학적 모델에 대한 엄밀해를 나타내게 된다. 변위를 기초로 한(displacement-based) 유한요소법에 있어서 적합성 조건과 응력-변형 관계 조건은 적합한 요소(compatible element)와 적절한 응력-변형 관계식을 사용함으로써 항상 만족될 수 있다. 그러나 평형 조건은 보통 전체적인(적분적인) 관점에서만 만족된다. 말하자면 미분평형 방정식이 해석영역 내의 임의의 점에서는 일반적으로 만족되지 않더라도, 절점들에 대한 평형 방정식은 항상 만족되며, 모든 유한요소는 절점에 작용하는 힘(nodal point forces)들에 의해 평형을 이루고 있다. 평형 방정식이 해석영역 내에서 국부적으로 만족되지 않는다는 사실은, 각 요소들의 경계에서 응력이 불연속이며 응력 경계조건(stress boundary condition)도 만족되지 않는다는 것을 의미한다. 이러한 사실을 근거로 해석 결과의 정확도를 손쉽게 판단하는 방법으로서 다음의 두가지를 들 수 있다.

첫번째 방법은 유한요소망에서의 특정한 선을 따라 응력분포를 도시(plotting)해 보는 방법이다⁽⁴⁶⁾. 이때 사용되는 응력은 요소내의 적분점(integration point)에서 구하지 않고 각 요소의 절점에서 직접 구하여 매끄럽게(smoothing)하지 않은 값을 사용함으로써 응

력의 불연속성을 직접 확인할 수 있도록 하는 것이다. 이 방법은 특정 부위에서의 정확도를 검증하는 데는 도움이 되나, 일반적으로 해석 영역 전체에 걸쳐서 분석해 볼 수 없고 또 모든 응력 요소들에 대해서도 검토해야 하므로 불편한 점이 있다. 더우기 서로 다른 두가지의 요소망을 비교할 경우, 관심 부위에 있는 요소들간의 경계가 일치하지 않을 경우 직접 비교하기 곤란한 점도 있다.

두번째 방법은 이러한 단점을 보완하기 위해 개발된 것으로 압력띠(pressure band) 혹은 응력띠(stress band)를 사용하여 해석영역 전체에 걸친 응력의 불연속성을 도시해 보는 것이다⁽⁴⁷⁾. 즉 여러 가지의 응력 요소를 조합하여 스칼라 형태로 바꾸어 도시하는 것으로, 식(2)와 같이 정수압 압력을 매개 변수로 하는 것과

$$P = -\frac{(\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz})}{3} \quad (2)$$

식(3)과 같이 Von Mises의 등가 응력을 매개 변수로 하는 방법등이 있다.

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \quad (3)$$

이렇게 얻어진 응력 값을 사용하여 전체 해석영역을 동일한 간격의 응력선으로 나누어 응력띠를 도시하는 것이다. 이때 인접하는 응력 간격을 검은부분과 흰 부분으로 구분하여 표시한다. 이 방법에서도 응력띠에 사용되는 응력은 평균하지 않은 값으로 응력띠가 인접한 요소사이에서 연속일 필요가 없다. 만약 조악한 요소망을 사용한 경우에는 응력띠가 확실히 보이지 않게 되며, 요소망이 조밀한 경우에는 띠가 명확하게 보이고 거의 연속으로 나타나게 된다. 이러한 응력띠선도(stress band plots)를 사용하면 다음과 같은 효과를 얻을 수 있다.

- 응력띠선도는 해석 결과의 정확도를 나타낼 수 있다. 즉 응력띠 선도는 응력의 불연속 정도를 보여 주므로, 해석 결과가 평형방정식을 만족시키지 않는 정도를 나타

내게 된다. 특히 응력 집중이 발생하는 부위에서는 응력띠 선도가 가늘고 또 밀집해 있게 되며, 균일한 응력이 작용하는 부위에서는 응력띠 선도가 굵고 넓게 퍼져 있음을 알 수 있다. 이러한 응력띠 선도는 광탄성(photoelastic) 실험에서 얻는 결과와 유사한 점이 있음을 알 수 있다.

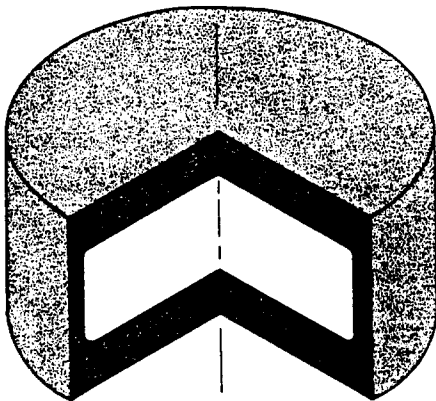
- 응력띠 선도를 사용하면 서로 다른 요소망에서 얻은 결과를 직접 비교할 수 있다.

(적용예)

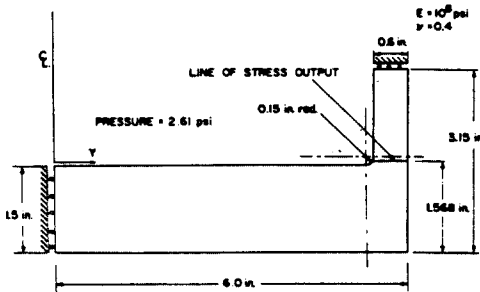
유한요소해석 결과를 평가하기 위한 방법을 실제 문제에 적용하는 예는 다음과 같다^(46,47). 그림 6에 나타나 있는 압력 용기의 문제는 Floyd에 의하여 해석되었는데⁽⁴⁸⁾, 이 문제는 응력집중이 예상되는 부위의 특정한 선(line of stress output)을 따라 응력분포를 계산하는 데 어려움이 따른다고 보고되었다. 이 문제 해석

의 핵심은 적절하고도 충분한 정도의 요소망을 선택하는 데 있다. 일반적으로 유한요소해석 결과는 사용된 요소망이 충분히 조밀한 경우, 수학적 모델에 대한 엄밀해에 수렴하게 된다는 것은 잘 알려진 사실이다.

그림 7은 8개의 절점을 가진 69개의 요소를 사용하여 얻은 결과를 관심부위의 선을 따라 주응력요소의 분포상태를 보여주고 있다. 이때의 응력은 각 절점에서 변형-변위 관계를 이용하여 직접 구한 것으로 매끄럽게(smoothing) 처리되거나, 보간(extrapolation)법을 사용하지 않은 것이다. 따라서 각 절점에서의 응력값의 갯수는 해당 절점을 포함하고 있는 요소의 수와 동일하게 된다. 이 그림에서 볼 수 있듯이 응력집중 부위에서 인접 요소간의 응력 불연속 정도가 매우 크므로 사용된 요소망이 충분히 조밀하지 못하다는 것을 알 수 있다.



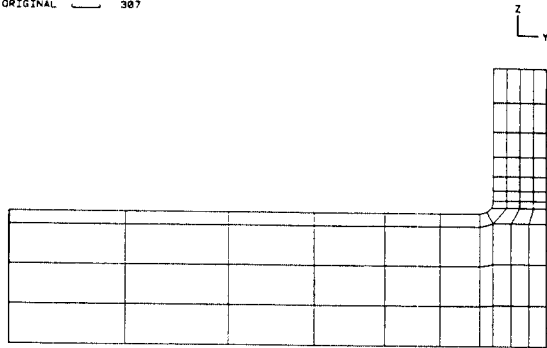
(a) 압력 용기의 모습



(b) 축대칭 모델

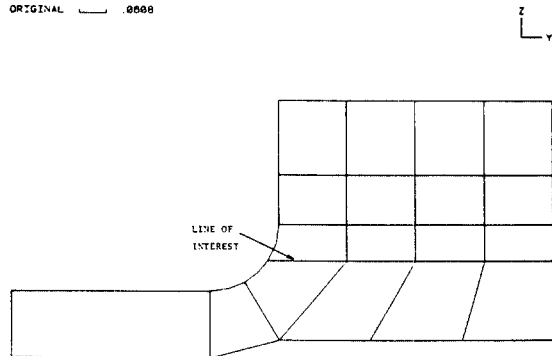
그림 6 압력 용기의 해석

ORIGINAL — 307



(a)

ORIGINAL — 0000



(b)

용기 내면에서의 최소 주응력은 내압과 평형을 이루고 있음을 알 수 있다. 이상과 같이 주어진 선을 따라 응력 불연속 정도를 조사함으로써

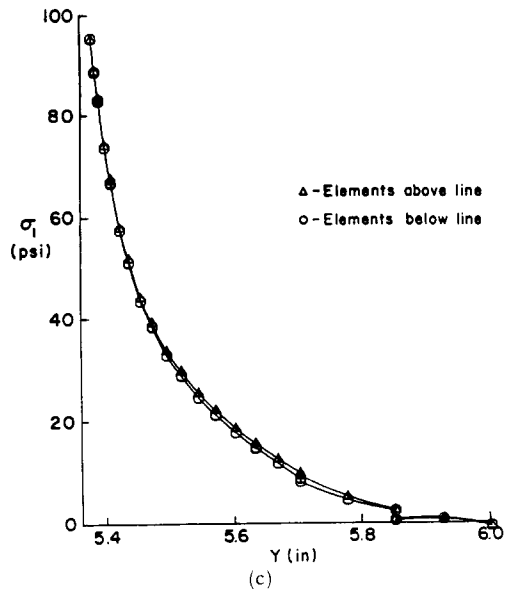
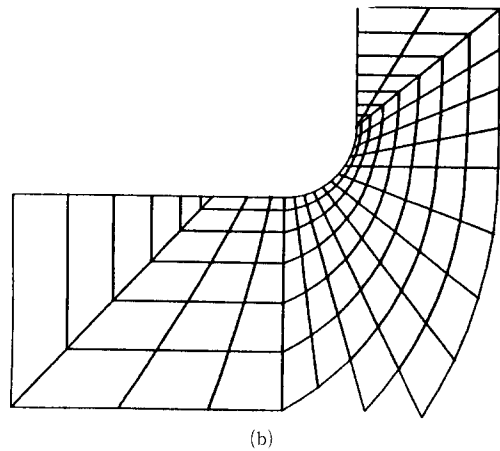
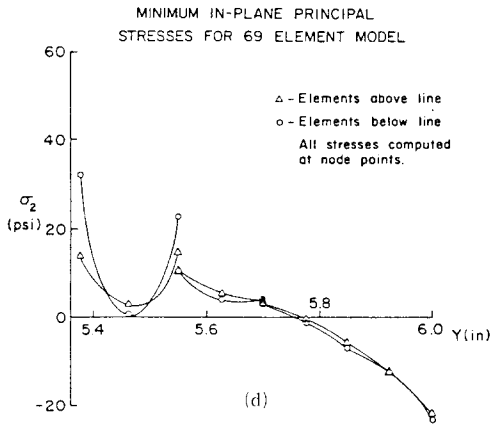
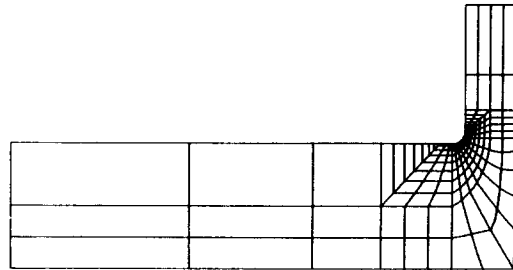
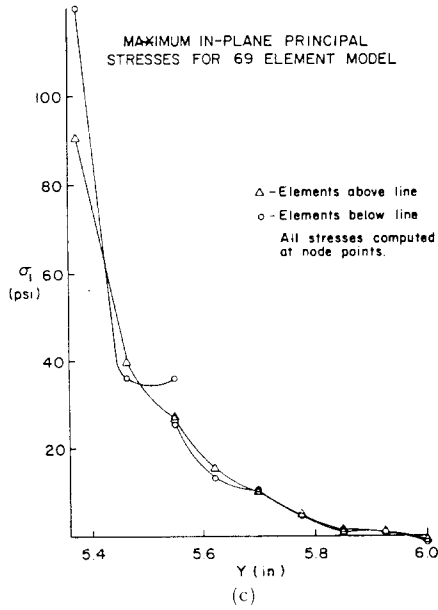


그림 7 (a) 69개의 요소로 된 요소망
(b) 관심부의 요소망
(c) 최대주응력(maximum principal stress)의 분포
(d) 최소주응력(minimum principal stress)의 분포

그림 8은 8개의 절점을 가진 181개의 요소를 사용하여 얻는 결과로서, 인접 요소간의 응력 불연속 정도가 매우 작으므로 사용된 요소망이 적절하다는 것을 알 수 있다. 이 문제에서의 응력 집중 계수는 대략 35정도로 높으며, 압력

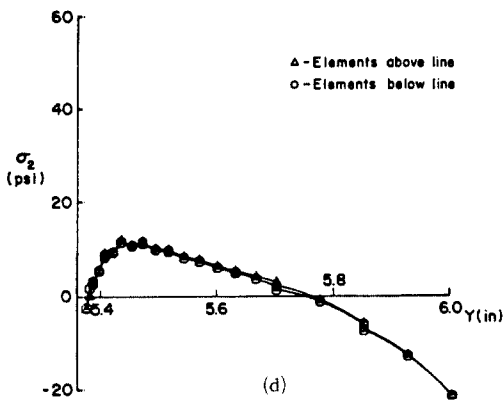


그림 8 (a) 181개의 요소로 된 요소망
 (b) 관심부위의 요소망
 (c) 최대주응력(maximum principal stress)의 분포
 (d) 최소주응력(minimum principal stress)의 분포

써 사용된 요소망이 충분히 적절한지의 여부를 알 수 있다.

이와 같은 방법은 3차원 문제의 경우 6개의 응력 요소들을 고려해야 하므로 실제 처리해야 할 자료가 방대하게 된다. 따라서 보다 간편한 방법으로 제시된 압력띠 선도 및 응력띠 선도를 사용한 예는 다음과 같다. 그림 9는 앞에서와 같이 181개의 요소를 사용한 요소망에 대해 압력띠 선도 및 등가응력띠 선도를 보여주고 있다. 이 그림에서는 해석 영역 전체에 걸쳐 응력띠 선도가 비교적 균일하게 연속적인 것을 볼 수 있으며, 이는 사용된 요소망이 적절하다는 것을 알 수 있다. 또한 등가응력띠 선도의 경우가 압력띠 선도의 경우에 비해 비교적 매끄럽게 나타나 있는 것은, 등가응력을 계산하는 과정에서 여러값들이 조합되어 평균효과를 나타내는 때문이다. 여기서 응력의 값은 직접 띠를 이룰 수 있을 정도로 각 요소내의 많은 점들에서 계산된 것으로 요소간의 띠의 불연속성은 응력의 불연속성에 기인하는 것을 알 수 있다. 참고로 부적절한 요소망에 대한 압력띠 선도는 그림 10에 나타나 있다. 이 그림은 4개의 절점을 가진 724개의 요소를 사용한 요소망

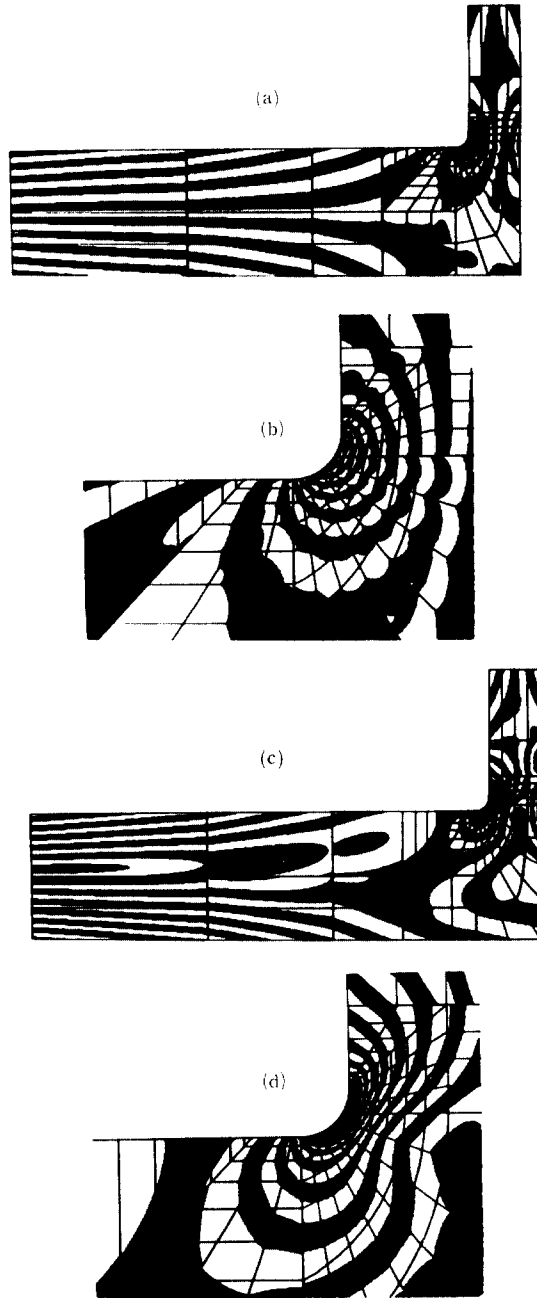


그림 9 (a) 181개의 요소의 요소망에 대한 압력띠 선도 (pressure band plot)
 (b) 관심부위의 압력띠 선도
 (c) 등가응력띠 선도(effective stress band plot)
 (d) 관심부위의 등가응력띠 선도

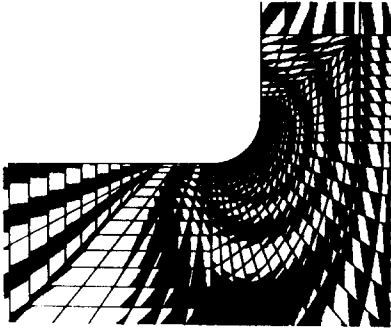


그림 10 724개 요소(4개의 절점)의 요소망에 대한 압력띠 선도

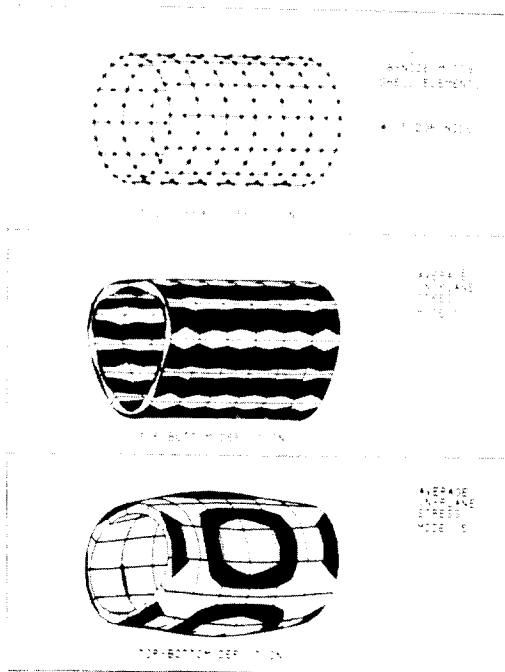


그림 11 실린더의 고유모드에 대한 응력띠선도

에 대한 것으로, 응력띠 선도가 크게 불연속인 것을 알 수 있다. 이 그림은 특히 4개의 절점을 가진 요소와 8개의 절점을 가진 요소와의 효율성을 비교하는 데에도 쓰일 수 있으나, 이에 대한 논의는 이 글의 범위를 벗어나므로 생략하기로 한다.

이러한 응력띠 선도는 3차원 요소나 셸

(shell)요소들을 사용한 요소망에도 적용이 가능하다. 그림 11은 실린더의 고유진동수와 고유모드 계산시에 사용된 요소망에 대한 응력띠 선도를 보여주고 있다. 이때 사용된 응력띠는 적분점에서 구한 응력을 보간법을 사용하여 얻은 것이다. 이렇게 보간법을 사용하여 얻은 응력과 직접 변위-변형 관계에서 계산된 응력의 차이는 크지 않으나, 보간에 의한 방법이 재질 비선형인 경우의 해석에 있어서는 빠르고 일반적이라 할 수 있다. 이같은 응력띠 선도는 유한요소해석 후처리 프로그램(post-processor)에 의해 쉽게 처리 될 수 있으며, ADINA-PLOT과 같이 이러한 기능을 포함한 상용 프로그램도 있다.

5. 맺 음 말

이상과 같이 CAD/CAM시스템에서 유한요소해석에 필요한 과정들과 이와 관련된 기술 및 연구 동향을 살펴 보았다. 근래에 이르러 CAD/CAM시스템의 개념이 초기의 자동제도 시스템에 그치지 않고, 이제는 제품의 설계 개발에서부터 제조에 이르는 일련의 엔지니어링 작업을 통합하는 CAE(Computer Aided Engineering) 시스템의 개념으로 발전되고 있으며, 우리나라에서도 이 분야에 많은 관심과 수요가 크게 늘고 있음은 당연한 추세라 할 수 있다. 그러나 아직까지 이에 필요한 소프트웨어들이 국내에서 개발되지 않아 전량 수입에 의존하고 있는 실정으로, 앞으로 이러한 수입추세는 점점 늘어날 것으로 전망된다. 더욱이 최근들어 선진국들이 원천 프로그램(source code)의 이전을 기피함에 따라 관련기술의 국산화가 어렵고, 이들의 응용에 제약이 많아 기술의 예측화가 우려된다 하겠다. 따라서 현재 국내의 산업 규모와 기술 수준으로 미루어볼 때, 국내에서도 그림 1에서 보는 바와 같은 소프트웨어들을 개발해야 할 시점에 와 있다고 하겠다.

참 고 문 헌

- (1) Bathe, K.J., 1986, "Finite Elements in CAD and ADINA", Nuclear Engineering and Design, 98, pp. 57~67.
- (2) Bathe, K.J., 1986, "Some Advances in Finite Element Procedures for Nonlinear Structural and Thermal Problems", in Future Directions of Computational Mechanics, (A. Noor, ed), Pergamon Press.
- (3) Shephard, M.S., 1985, "Finite Element Modeling within an Integrated Geometric Modeling Environment: Part II - Attribute Specification, Domain Differences, and Indirect Element Types", Engineering with Computers, 1, pp. 73~85.
- (4) Ho-Le, K., 1988, "Finite Element Mesh Generation Method: a Review and Classification", Computer Aided Design, 20(1), pp. 27~38.
- (5) Thacker, W.C., 1980, "A Brief Review of Techniques for Generating Irregular Computational Grids", Int. J. Numer. Meth. Eng. 15(9), pp. 1335~1341.
- (6) 고현무., 1987 "유한 요소망의 자동생성", 대학기계학회지, 제 27 권, 제 6 호, p. 496.
- (7) Cavendish, J.C., 1974, "Automatic Triangulation of Arbitrary Planar Domains for the Finite Element Method", Int. J. Numer. Meth. Eng. Vol. 8, pp. 679~696.
- (8) Shaw, R.D., and Pitchen, R.G., 1978, "Modification to the Suhara-Fukuda Method of Network Generation", Int. J. Numer. Meth. Eng. 12, pp. 93~99.
- (9) Lo, S.H., 1985, "A New Mesh Generation Scheme for Arbitrary Planar Domains", Int. J. Numer. Meth. Eng. 21, pp. 1403~1426.
- (10) Cavendish, J.C., Field, D.A. and Frey, W. H., 1985, "An Approach to Automatic Three-Dimensional Finite Element Mesh Generator", Int. J. Numer. Meth. Eng., Vol. 21, pp. 329~347.
- (11) Nguyen, V. Ph., 1982, "Automatic Mesh Generation with Tetrahedron Elements", Int. J. Numer. Meth. Eng. 18, pp. 273~280.
- (12) Cendes, Z.J., Shenton, D. and Shahnasser, 1983, "Magnetic Field Computation using Delaunay Triangulation and Complementary Finite Element Methods", IEEE Trans. Mag. Vol. MAG-19, No. 6, November.
- (13) Brostow, W. and Dussault, J.P., 1978, "Construction of Voronoi Polyhedra", J. of Computation Physics Vol. 29, pp. 81~92.
- (14) Green, P.J. and Sibson, R., 1977, "Computing Dirichlet Tessellations in the Plane", The Computer J. Vol. 21, No. 2, pp. 168~173.
- (15) Zienkiewicz, O.C. and Phillips, D.V., 1971, "An Automatic Mesh Generation Scheme for Plane and Curved Surfaces by 'Isoparametric' Co-ordinates", Int. J. Numer. Meth. Eng. Vol. 3, pp. 519~528.
- (16) Haber, R., Shephard, M.S., Abel, J.F., Gallagher, R.H. and Greenberg, D.P., "A General Two-Dimensional Graphical Finite Element Preprocessor Utilizing Discrete Transfinite Mappings", Int. J. Numer. Meth. Eng. Vol. 17, pp. 1015~1044.
- (17) Gordon, W.J. and Hall, C.A., 1973, "Construction of Curvilinear Co-ordinate System and Applications to Mesh Generation", Int. J. Numer. Meth. Eng. Vol. 17, pp. 461~477.
- (18) Brown, P.R. 1981, "A Non-Interactive Method for the Automatic Generation of Finite Element Meshes using the Schwarz-

- Christoffel Transformation", *Comp. Methods in Appl. Mech. Eng.* Vol. 25, pp. 101~126.
- (19) Kikuchi, N., 1986, "Adaptive Grid-Design Methods for Finite Element Analysis", *Comput Methods in Applied Mech. Eng.* Vol. 55, pp. 129~160.
- (20) Yerry, M.A. and Shephard, M.S., 1983, "A Modified Quadtree Approach to Finite Element Mesh Generation", *IEEE Comput. Graph. & Appl.* 39~46, Feb.
- (21) Kela, A., Perucchio, R. and Voelcker, H. B., 1986, "Toward Automatic Finite Element Analysis", *Comput. Mech. Eng.* Vol. 5, No. 1, July.
- (22) Yerry, M.A. and Shephard, M.S., 1984, "Automatic Three-Dimensional Mesh Generation by the Modified-Octree Technique", *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 20, 1965~1990.
- (23) Tracy, F.T., 1977, "Graphics Pre-and Post-Processor for Two-Dimensional Finite Element Programs", *Computer Graphics (Proc. Siggraph' 77)* 11(2), 8 ~ 12, Aug.
- (24) Sadek, E.A., 1980, "A Scheme for the Automatic Generation of Triangular Finite Elements", *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 15(12), 1813~1822, December.
- (25) Yokoyama, Masaaki, 1985, "Automated Computer Simulation of Two-Dimensional Elastostatic Problems by the Finite Element Method", *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 21, 2273~2287.
- (26) Imafuku Ichiei, Kodera Yoichi, Sayawaki Massaki and Kono Makoto., 1980, "A Generalized Automatic Mesh Generation Scheme for Finite Element Method", *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 15, 713~731.
- (27) Chae, S.W. and Bathe, K.J., "On Automatic Mesh Construction and Mesh Refinement in Finite Element Analysis", *J. Computer & Structures*, in press.
- (28) Bykat, A., 1983, "Design of a Recursive Shape Controlling Mesh Generator", *Int. J. Numer. Meth. Eng.* Vol. 19, pp. 1375~1390.
- (29) Sluiter, M.L.C. and Hansen, D.C., 1982, "A General Purpose Automatic Mesh Generator for Shell and Solid Finite Elements", L. E. Hulbert (ed) *Computers in Engineering*, Vol. 3, Book No. G00217, ASME 29~34.
- (30) Woo, T.C. and Thomasma, T., 1984, "An Algorithm for Generating Solid Elements in Objects with Holes", *Computers and Structures* 8(2), 333~342.
- (31) Wördenweber, B., 1984, "Finite Element Mesh Generation", *computer-Aided Design*, 16(5), 285~291.
- (32) Shephard, M.S. and Gallagher, R.H., 1979, "Finite Element Grid Optimization", ASME Special Publication PVP-38.
- (33) Diaz, A.R., Kikuchi, N. and Taylor, J.E., 1983, "A Method of Grid Optimization for Finite Element Methods", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 41, 29~45.
- (34) Sussman, T. and Bathe, K.J., 1985, "The Gradient of the Finite Element Variational Indicator with Respect to Nodal Point Coordinates: An Explicit Calculation and Applications in Fracture Mechanics and Mesh Optimization" *Int. J. Num. Meth. Eng.* 21, 763~774.
- (35) Gago, J.P.De S.R., Kelly, K.W., Zienkiewicz, O.C. and Babuska, I., 1983, "A Posteriori Error Analysis and Adaptive Processes in the Finite Element Method: Part II - Adaptive Mesh Refinement", *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 19, 1621~1656.
- (36) Itoh, T., 1981, "Adaptive Finite Ele-

- ment Method in Two-Dimensional Structural Problems”, PhD thesis, Univ. of California, Berkeley.
- (37) Babuska, I. and Yu, Dehao., 1986, “Asymptotically Exact A-Posteriori Error Estimator for Biquadratic Elements”, Technical Report BN-1050, Institute for Physical Science and Technology, University of Maryland.
- (38) Zienkiewicz, O.C. Gago, J.P. De S.R. and Kelly, D.W., 1983, “The Hierarchical concept in Finite Element Analysis”, *Computes & Structures* 16(1~4), 53~65.
- (39) Szabo, Barna A., 1986, “Mesh Design for the p-Version of the Finite Element Method”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 55, 181~197.
- (40) Rank, E. and Babuska, I., 1987, “An Expert System for the Optimal Mesh design in the hp-Version of the Finite Element Method”, *Int. J. Num. Meth. Eng.* 24, 2087~2106.
- (41) Babuska, I., Zienkiewicz, O.C., Gago J. and Oliveira E.R. de A. 1986, “A Wiley-Interscience Publication: Accuracy Estimaties and Adaptive Refinements in Finite Element Computations”, John Wiley & Sons.
- (42) Shephard, M.S., Gallagher, R.H. and Abel. J.F., 1980, “The Synthesis of Near-Optimum Finite Element Meshes with Interactive Computer Graphics”, *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 15, 1021~1039.
- (43) Ladeveze, P. and Leguillon, D., 1983, “Error Estimate Procedure in the Finite Element Method and Application”, *SIAM J. Numer. Analysis* 20(3), 485~509, June.
- (44) Turcke, D.J., 1979, “Characteristics of Piecewise Approximations in Numerical Analysis”, *ASME Special Publication PVP* -38.
- (45) Bathe, K.J., 1982, “Finite Element Procedures in Engineering Analysis”, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J.
- (46) Sussman, T. and Bathe, K.J., 1985, “Studies of Finite Element Procedures-On Mesh Selection” *Computers and Structures*, 21(1/2), 257~264.
- (47) Sussman, T. and Bathe, K.J. 1986, “Studies of Finite Element Procedures-Stress Band Plots and the Evaluation of Finite Element Meshes”, *Engineering Computations*. 3, 178~191, September.
- (48) Floyd, C.G., 1984, “The Determination of Stresses Using a Combined Theoretical and Experimental Analysis Aproach”, 2nd Int. Conf. on Computational Methods and Experimental Measurements (Ed.C.A. Brebbia).

