

타이어의 振動特性

協會 李 光 宰

[概要] 空氣入 타이어는 다음과 같은 4 가지 機能을 가지고 있다.

- 荷重을 지탱한다.
- 自動車的 方向調整을 한다.
- 路面에 制動力·驅動力을 전달한다.
- 乘車感을 좋게 한다 - 振動과 騒音

두 차례의 石油危機를 契機로 自動車會社에서는 自動車的 燃費效率를 높이기 위하여 車의 重量을 減少시키면서 效率이 높은 엔진 開發에 努力하고 있는 한편, 타이어 業界에서는 타이어의 回轉抵抗을 減少시키기 위하여 많은 努力을 해왔다. 結果的으로 自動車는 以前보다 振動에 敏感해졌을 뿐 아니라, 타이어의 振動減衰力도 떨어지게 되었다. 그러나 한편으로 自動車는 점점 騒音이 없어지고 조용하고 安定된 분위기를 維持하여야 하므로 타이어의 振動特性은 自動車 메이커와 타이어 메이커 雙方에 있어서 最大의 關心事로 되어 있다.

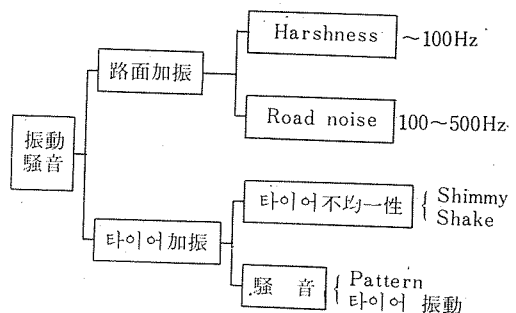
1. 타이어에 關聯되는 振動

自動車的 振動源은 엔진, 路面 凹凸, 타이어의 不均一性 등 범위가 매우 넓으며, 周波數도 幅넓은 스펙트럼 分布을 가지고 있다. 이 중에서 타이어와 關聯된 振動은 다음과 같이 分類된다. 즉 路面에서 加振되어 그것이 타이어를 통하여 車에 傳達되는 것과, 타이어 自身이 加振源이 되는 것인데, 路面에서 加해지는 振動은 周

波數가 約 100Hz 以下인 Harshness와 100Hz~500Hz의 Road noise로 다시 分類된다. 그리고 타이어 自身이 加振源이 되는 것은 타이어가 完全히 均一하게 되어 있지 않으므로 回轉에 의해서 勵起되는 것인데, 나타나는 現象에 따라 Shimmy, Shake 등으로 區分하고 있다.

또 타이어 接地部의 패턴에 의해서 일어나는 Pattern noise나 타이어 自体가 振動하여 일어나는 타이어 振動이 있는데, 이것은 주로 音으로 車内に 傳達되고 있다.

타이어의 振動問題가 過去에는 타이어의 不均一性(Uniformity)에 의한 것과 Harshness 등 比較的 낮은 周波數의 振動이 問題되었으나, 점차 Road noise나 騒音 등 높은 周波數까지 問題되기 시작하였으며, 最近에는 어떤 特定한 路線과 特定한 패턴이 연계되어 發生하는 1kHz 以上の 높은 音까지도 問題가 되고 있다.



2. 타이어의 振動 모드

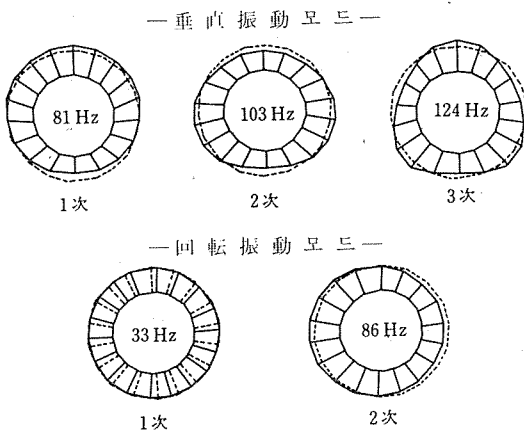
타이어는 構造体이며, 따라서 特有한 振動 모드(mode)와 固有振動數를 가지고 있다. 타이어의 振動特性을 생각할 때 이와같은 것은 基本的인 것이며, 過去에도 理論과 實驗 兩面에서 몇 가지 報告된 것이 있다.¹⁾

그림 1은 타이어의 垂直振動 모드, 回轉振動 모드 및 각각의 固有振動數를 例로 表示한 것이다. 그 밖에 橫方向振動 모드나 橫方向屈曲振動 모드도 있으나, 이들은 타이어의 乘車感에서는 별로 問題視되지 않는다.

타이어를 그림 2와 같이 모델化하면 固有振動數를 計算으로 求할 수 있다.¹⁾ 타이어의 트레드部는 Young率 E , 單位 길이當 質量 ρ , 張力 S 인 円筒殼으로 代身하고 이 円筒殼이 徑方向 Stiffness C_r , 周方向 Stiffness C_t 인 彈性体로서 剛体軸에 結合되어 있다. 타이어의 回轉을 생각하지 않을 경우, 이 모델의 平衡方程式은 다음과 같이 表示된다.

$$\rho \ddot{w} + \frac{EI}{r^4} (w'''' + w'') + \frac{C_s}{r^2} (u' + w) - \frac{S_0}{r^2} (w'' + w) + C_r w = 0 \quad (1)$$

$$\rho \ddot{u} + \frac{EI}{r^4} (w''' + w') - \frac{C_s}{r^2} (u'' + w') + C_t u = 0 \quad (2)$$



[그림 1] 타이어의 振動 모드

여기서 u, w 는 周, 徑方向의 變位, \ddot{w} 는 時間微分, w'' 는 그 方向에 대한 變位微分, I 는 円筒殼의 慣性 모멘트이다.

E, I 및 其他定數에, 타이어에서 求한 適當한 材料定數와 尺寸를 代入하여 式(1), (2)를 풀면 固有振動數를 구할 수 있다. 表 1은 이와 같이 하여 求한 固有振動數를 實驗에서 求한 값과 比較한 것인데, 比較的 잘 一致하고 있음을 알 수 있다. 타이어의 振動特性을 생각할 경우에는 1次의 垂直振動 모드가 80Hz 附近에, 또 0次의 回轉振動 모드가 40Hz 附近에 각각 固有振動數를 가지는데 注目할 必要가 있다.

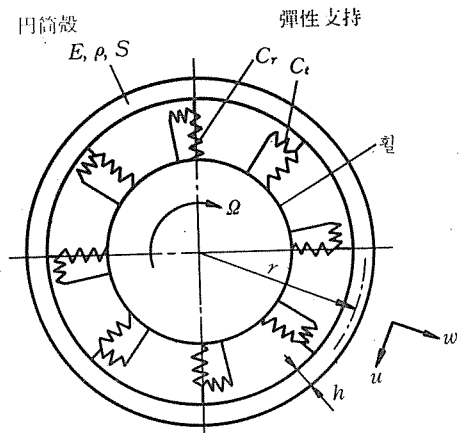
3. 路面入力의 振動

그림 3은 거칠은 鋪裝路를 走行할 때의 乘用車前輪의 前後方向 및 上下方向의 加速度와 車內音의 한 例인데, 두 가지 경우 다 매우 넓은 範圍의 周波數分布를 가지고 있다. 보통 上下方向에는 15Hz부근에 스프링 共振의 피크(peak)

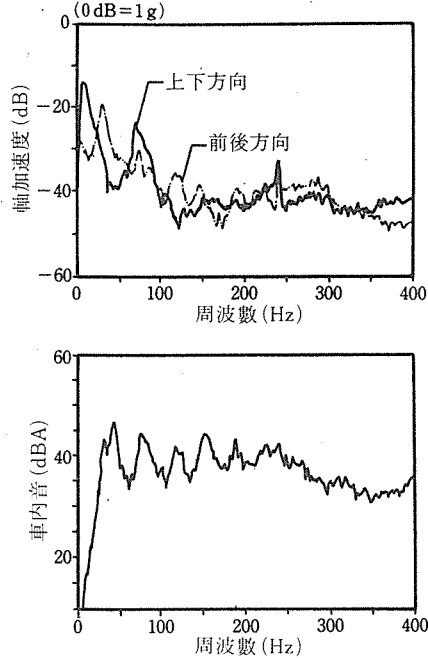
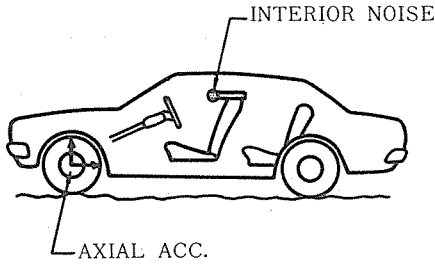
타이어의 固有振動數 (135SR13)

(表 1)

		0	1	2	3	4	5
垂直振動 모 드	測定	—	83	98.5	115	136	158
	計算	(45.5)	83.7	105.5	119	134	150
回轉振動 모 드	測定	39	44	76	114	149	—
	計算	40	42.7	64.2	110	162	—

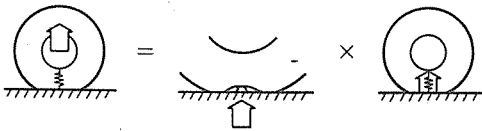


[그림 2] 円筒殼 타이어 모델



[그림 3] 거칠은 鋪裝路에서의 前輪加速度와 車內音

$$\text{軸力} = \text{振動入力} \times \text{伝達函數}$$



[그림 4] 路面入力の 振動

가 있고 또 80Hz 부근에는 타이어의 徑方向固有振動에 의한 피크가 있다. 그리고 250Hz 부근에도 水準은 낮으나 명확한 피크가 있는데, 이것은 타이어 内部의 氣柱共鳴에 의한 것으로 보고 있다. 自動車의 車内の 氣柱共鳴도 對應하는 피크를 가지고 있는데, 이것은 大略 130Hz, 250 Hz 부근에 있으며 타이어의 共振振動數와 合致되는 경우도 있다.

다음에는 路面 凹凸에 의해 勵起된 振動이 어떻게 車軸에 伝達되고 있는지 살펴보기로 한다. 여기서는 그림 4에 表示된 바와 같이 路面에서 타이어로 들어오는 振動入力과 그것이 車軸으로 전달되는 타이어의 伝達特性으로 나누고, 軸力은 이 入力과 伝達函數를 곱한 것(積)과 같다고

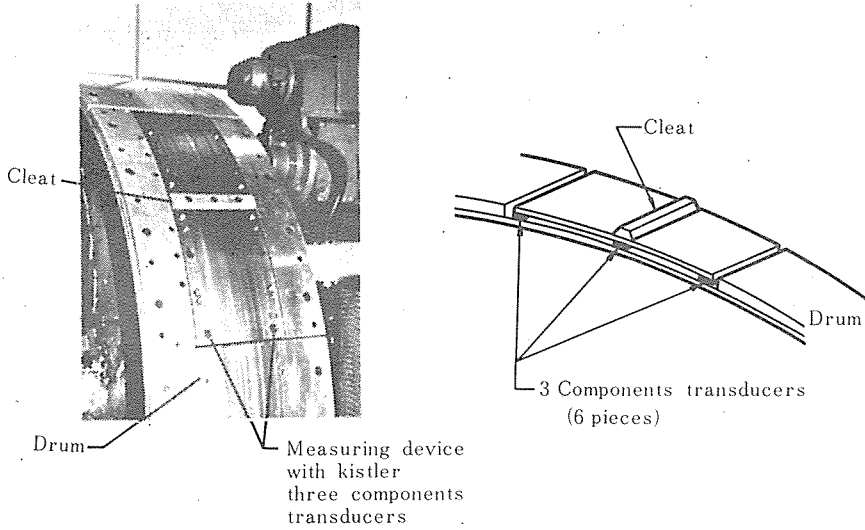
생각하면 便利하다.

(1) 路面으로부터의 入力特性

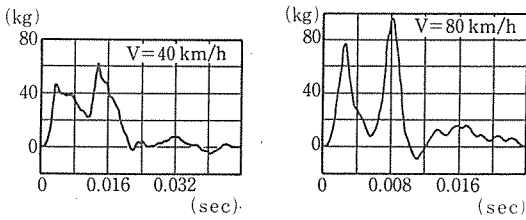
路面으로부터 타이어로 들어오는 入力特性을 實驗的으로 구하기 위하여 그림 5와 같이 室内 드럼의 表面一部에 6-pieces型 3分力計가 달린 플레이트 表面을 장치하고 그 중앙에 클리트(cleat)를 설치하여 그 위로 타이어가 굴러갈 때 加해지는 힘을 路面쪽에서 計測하였다. 즉, 클리트를 설치했을 때와 클리트가 없을 때의 힘의 差를 이 클리트로 인한 타이어의 入力이라고 생각하였다. 이와 같이 하여 測定한 上下方向의 入力의 例를 보면 그림 6과 같으며, 또 이것을 Fourier 變換하면 그림 7과 같은 周波數領域의 데이터를 구할 수 있다. 그림 8, 9는 前後方向 入力에 관한 같은 方法의 測定例이다.

(2) 타이어의 振動伝達特性

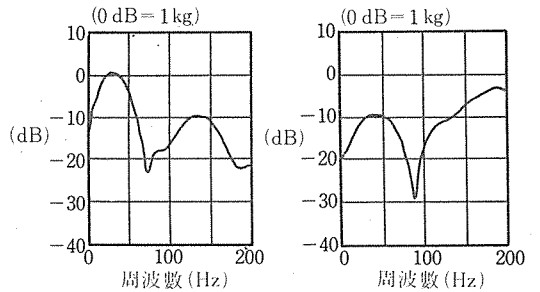
Hammering 法으로 타이어의 伝達特性은 實驗的으로 구할 수 있다. 타이어를 드럼上에서 回轉시키고 Impedance head를 가진 해머(hamm-



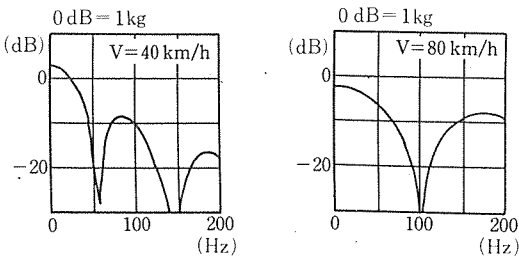
[그림 5]突起入力の測定



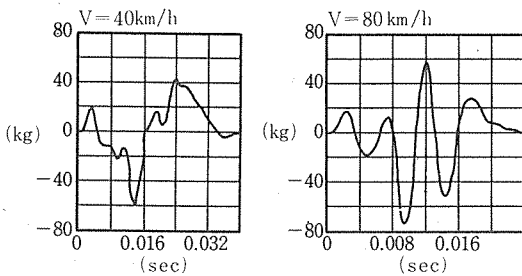
[그림 6] 上下方向入力 (155SR13)



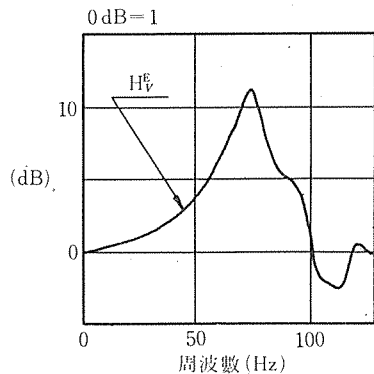
[그림 9] 前後方向入力の周波數 스펙트럼



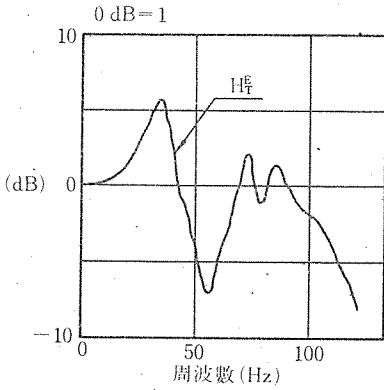
[그림 7] 上下方向入力の周波數 스펙트럼



[그림 8] 前後方向入力 (155SR13)



[그림 10] 타이어의 上下方向 伝達函數



[그림 11] 타이어의 周方向 伝達函數

er)로 타이어를 打撃하여 軸力을 測定한다. Impedance head에 의해 구한 衝擊力과 軸力으로 伝達函數를 구할 수 있다. 이와같은 方法으로 구한 上下方向의 伝達函數는 그림 10과 같으며, 70Hz의 피크는 타이어의 1次固有振動數에 대응하고 있다. 같은 方法으로 타이어를 周方向으로 打撃하여 周方向의 伝達函數를 구한다(그림 11). 35Hz부근의 피크는 타이어의 回轉振動 모드 的 固有振動數에 對應하고 있다.

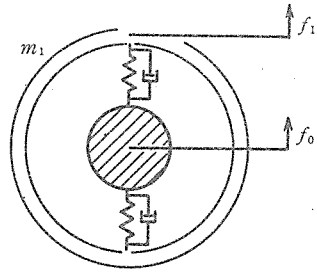
(3) 타이어의 振動 모델

타이어의 振動伝達特性을 理解하려고 할 때에는 모델化하여 생각하는 것이 좋다.²⁾ 上下方向의 振動에 대해서는 그림 12와 같은 1自由度 모델을 생각한다. 트레드는 質量 m_1 인 링으로 대신하고, 이 링이 스프링 定數 k_1 인 용수철과 減衰係數 c_1 인 dashpot(緩衝制動裝置)에 의해 軸에 結合되어 있다. 이 모델의 伝達函數는 式(3)과 같다.

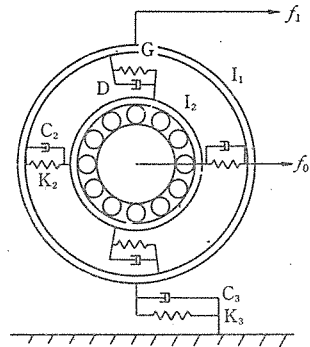
$$H_V = (A_V s + B_V) / (s^2 + A_V s + B_V) \quad (3)$$

$$A_V = -c_1 / m_1, B_V = -k_1 / m_1$$

$$A_V = c_1 / m_1, B_V = k_1 / m_1$$



[그림 12] 타이어의 上下方向 1自由度 모델



[그림 13] 타이어의 周方向 3自由度 모델

周方向에 대해서는 그림 13에서와 같은 3自由度 모델을 생각할 수 있다. 이 모델에서는 타이어의 回轉振動과 함께 並進振動도 고려되고 있다. 이 모델의 伝達函數는 式(4)와 같다.

$$H_M = \frac{A_T s^5 + B_T s^4 + C_T s^3 + D_T s^2 + E_T s + F_T}{s^5 + A_T s^5 + B_T s^4 + C_T s^3 + D_T s^2 + E_T s + F_T} \quad (4)$$

係數 $A_T, B_T, \dots, F_T, A'_T, B'_T, \dots, F'_T$ 는 복잡한 式으로 나타나므로 附表에 별도로 表示한다.

이들 모델로 各 Parameter의 값을 決定하기 위하여 앞에서 說明한 155SR13 타이어로 實驗的으로 구한 伝達函數에 對해 計算值과의 差異가 最小가 되도록 커브를 맞추어서 거기서 各 Parameter의 값을 推定한다(表 2). 各 推定值

<表 2>

振動 모델의 各 Parameter의 推定值

$m_1 : 3.82 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{s}^2 / \text{mm}$	$I_2 : 24.9 \text{ kg} \cdot \text{s}^2 / \text{mm}$	$c_3 : 7 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{s} / \text{mm}$
$k_1 : 112 \text{ kg} / \text{mm}$	$k_2 : 125 \text{ kg} / \text{mm}$	$G : 3.6 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{mm}$
$c_1 : 1.03 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{s} / \text{mm}$	$c_2 : 1 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{s} / \text{mm}$	$D : 1.6 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{s} / \text{mm}$
$I_1 : 30.0 \text{ kg} \cdot \text{s}^2 / \text{mm}$	$k_3 : 52 \text{ kg} / \text{mm}$	

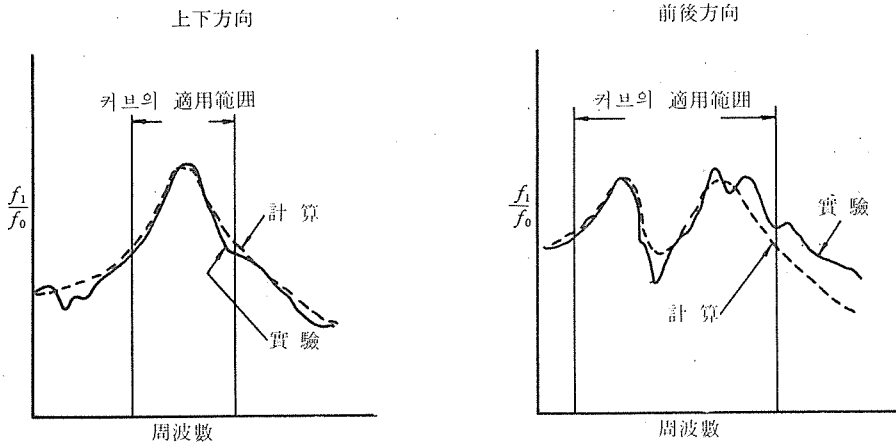
는 실제의 타이어에 비해서 거의 妥當한 값이라 할 수 있다. 그림14는 이러한 方法으로 구한 Simulation 計算의 伝達函數와 實驗的으로 구한 것을 比較한 것인데, 커브 適用範圍에서는 잘 一致하고 있다.

(4) 車軸의 振動特性

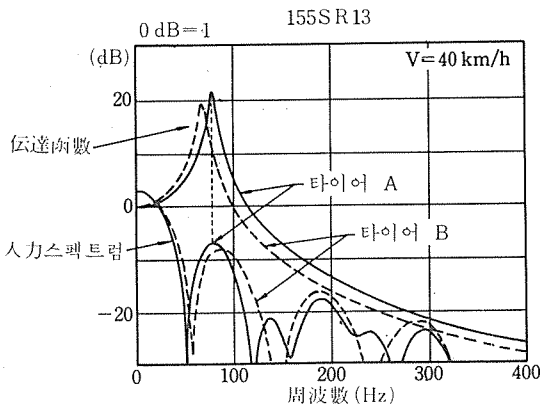
路面에서 타이어로 들어가는 入力特性和 타이어의 伝達特性을 알게 되면, 路面入力の 경우, 車軸의 振動特性을 求할 수 있다. 그림15는 155 SR 13으로서 構造가 서로 다른 두 타이어 A, B에 대해서 速度 40km/h時의 入力特性和 伝達特性의 周波數 스펙트럼을 表示한 것이다. 實線인

타이어 A에서는 伝達 스펙트럼의 피크와 入力 스펙트럼의 피크가 合致하므로 車軸入力は 커지고, 點線인 타이어 B에서는 兩者의 피크가 일치하지 않아 이것을 더하면 타이어 A의 경우보다도 작아진다. 이것을 Fourier 逆變換을 하여 보통의 時間軸으로 고쳐보면 그림16과 같이 되며 軸力의 振幅은 타이어 A 쪽이 크다.

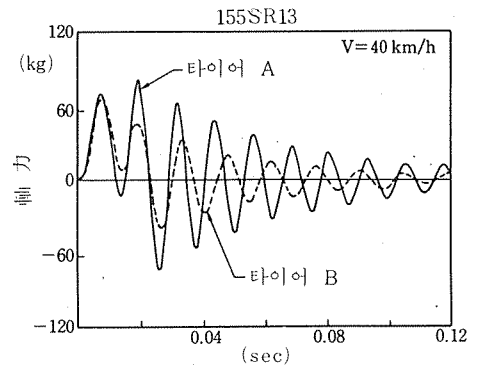
그림 17에서와 같이 速度가 增加하여 60km/h가 되면 타이어의 伝達 스펙트럼은 變하지 않으나 入力 스펙트럼은 高周波쪽으로 기울어져, 結果的으로 伝達 스펙트럼의 피크는 入力 스펙트럼의 골(谷)과 一致하여 軸力으로서는 작아진다. 또 速度가 增加하여 80km/h가 되면 그림18에서



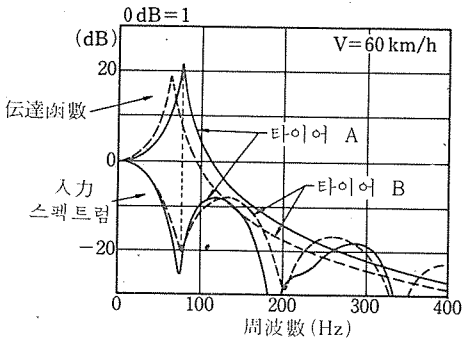
[그림 14] Simulation 計算에 의한 伝達函數의 適用



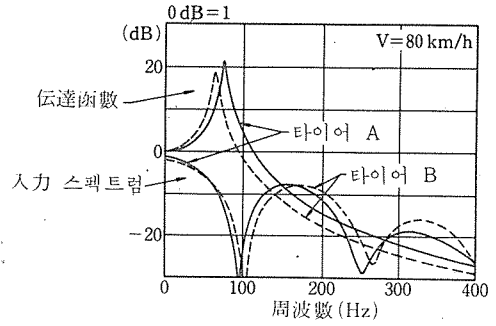
[그림 15] 타이어 A, B의 入力 스펙트럼과 伝達函數 (40km/h)



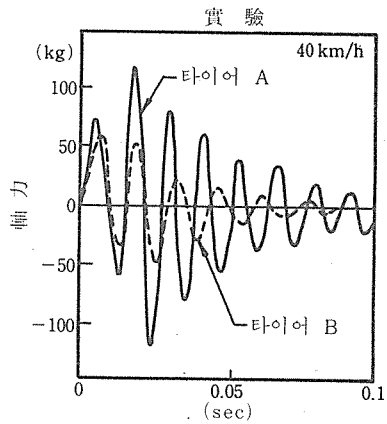
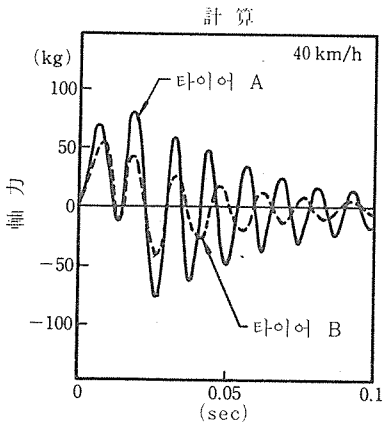
[그림 16] 타이어 A, B의 軸力 計算值 (40km/h)



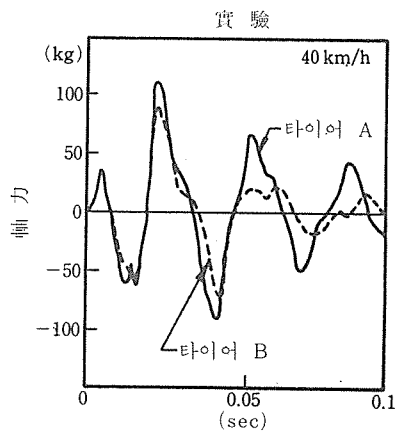
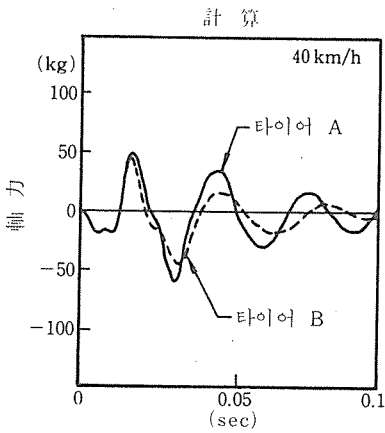
[그림 17] 60km/h時的 入力 스펙트럼과 伝達函數



[그림 18] 80km/h時的 入力 스펙트럼과 伝達函數



[그림 19] 上下方向軸力の 計算値와 實驗의 比較



[그림 20] 前後方向軸力の 計算値와 實驗의 比較

와 같이 伝達 스펙트럼의 피크는 入力 스펙트럼의 다음 산(山)에 걸려 軸力은 다시 커진다.

前後方向의 振動에 관해서도 같은 方法으로 軸力을 구할 수 있다. 이와같이 하여 求한 軸力과 直接 實驗으로 求한 軸力을 比較하면 그림 19(上下方向), 20(前後方向)과 같이 되며, 타이어 間의 比較에서 비교적 잘 一致하고 있음을 알 수 있다. 또 軸力인 $p-p$ 值의 速度依存性을 實驗結果와 對應시켜 보면 그림 21(上下方向), 22(前後方向)와 같으며, 大體的인 傾向으로 絶對値는 다르나, 타이어 間의 特徵은 잡혀 있다고 볼 수 있다.

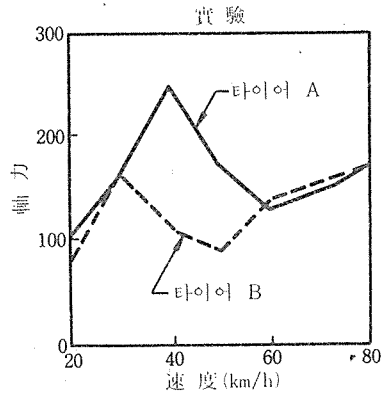
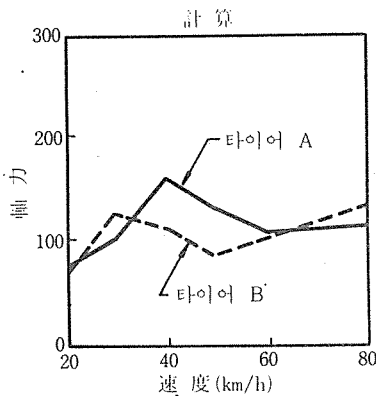
Simulation 모델이 한 번 確立되면, 타이어의

어떤 部分이 振動入力, 伝達特性에 어떠한 寄與를 하게 되는지 Parameter를 變히하여 檢討할 수 있으며, 특히 振動特性이 좋은 타이어를 開發하는데 有用하다.

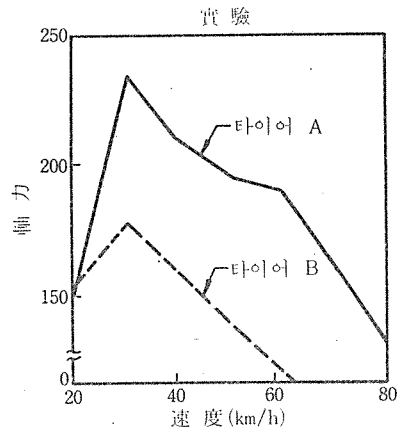
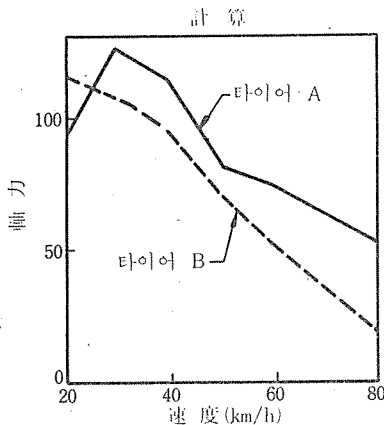
일반적으로 入力特性에는 트레드부의 構造가 크게 寄與하고 있고, 또 伝達特性에는 Side ~ Bead 部の 構造가 크게 寄與하고 있다.

(5) Road noise

周波數가 100Hz 以上되는 振動은 흔히 騒音으로 들리고 있다. 그림 23은 平滑한 路面과 거칠은 鋪裝路를 走行하였을 때의 車內騒音의 周波數 스펙트럼인데, 거칠은 路面에서는 특히 100

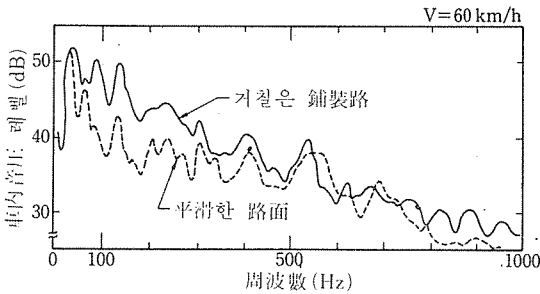


[그림 21] 上下方向 軸力 $p-p$ 值의 速度依存性

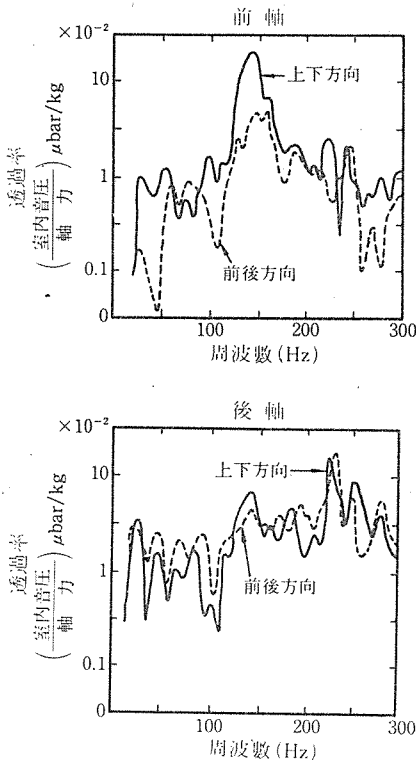


[그림 22] 前後方向 軸力 $p-p$ 值의 速度依存性

~500Hz 領域에서 레벨이 높아지고 있다. 이것이 Road noise이며 이 領域의 振動은 바닥, dashboard, 지붕 등 주로 固体伝播音으로 車内に 전달된다. 따라서 Road noise의 경우에는 路面에서 車軸으로의 入力·伝達特性 뿐 아니라, 車軸에서 車내로의 遮音特性도 고려할 必要가 있다. 自動車의 遮音特性의 한 例를 보면 그림 24와 같다.



(그림 23) 車内騒音 레벨의 周波數 스펙트럼



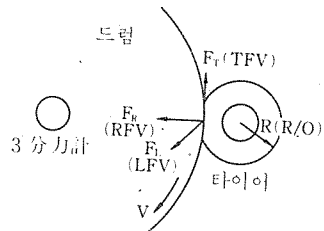
(그림 24) 車軸에서 車내로의 遮音特性

4. 타이어가 加振源이 되는 振動

(1) Uniformity

지금까지 說明한 바와 같이 路面의 凹凸에 의해 타이어가 勵振되는 외에도 타이어 自体가 加振源이 되는 振動이 있는데, 그 代表的인 것이 Uniformity (均一性)不良이다. 타이어는 원래 理想的으로는 完全한 円形으로서 치數나 剛性도 完全히 軸對稱이어야 한다. 그러나 실제로는 많은 不均一性을 가지고 있으며, 이것을 Uniformity 不良이라고 한다. Uniformity 不良의 原因은 表 3에서와 같이 여러가지 種類의 構造上의 缺陷 (不均一)이다. Uniformity를 改善하는데는 長期間의 努力이 必要하며, 每年 平均 조금씩 改善되어가고 있다.

Uniformity 중에서 타이어가 1회轉하는 동안 半徑의 變動을 Run out이라 하며, 또 負荷時 1회轉하는 동안 軸力의 變動을 徑方向, 橫方向, 周方向으로 각각 RFV(Radial Force Variation), LFV(Lateral Force Variation), TFV(Tangential Force Variation)라 부르고 있다(그림 25). 이러한 힘들의 變動은 보통 드럼 위에서 타이어를 回轉시키면서 軸에 장치되어 있는 3分力計



(그림 25) Uniformity 測定

Uniformity 不良의 原因

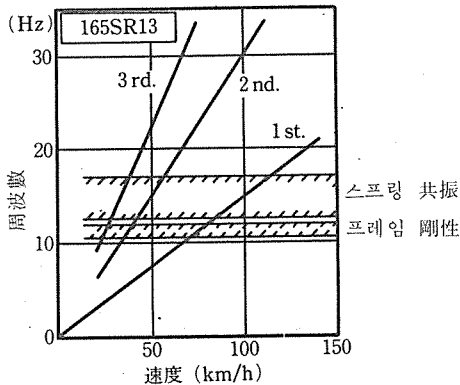
〈表 3〉

Run out	힘의 變動
타이어 몰드	Run out
生타이어 中心 어긋남	트레드 이음매 (이음자리)
타이어 不均一收縮	벨트, 플라이 이음매
트레드 두께 變動	벨트 角度變動
不均一 Green 타이어	벨트 中心 어긋남
其 他	其 他

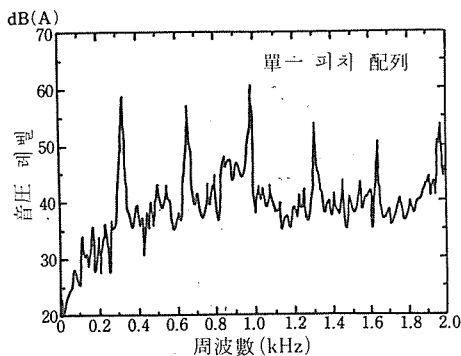
로測定한다. RFV와 LFV는 어떤範圍에서速度에는 별로 의존하지 않으나, TFV는速度依存性이 있어速度의增加와 함께急速히 커진다.

이러한 힘의變動은 타이어가回轉할 때加振力으로作用하며, 車의振動系와共振하면不快한振動을 일으키게 된다. 그림 26은速度와加振周波數의關係를表示한 것인데, 11~12Hz에는 車의플레임剛性으로 인한固有振動이 있고, 또 15~20Hz에는 스프링共振의固有振動이存在한다. 힘의變動을 Fourier 變換하면基本周波數外에 많은高調波가 포함되어 있으나,基本周波數의 경우 100km/h 前後에 있어서 스프링振動系와共振하여 종종不快한振動을 느끼게 된다.

過去에는 주로 RFV와 LFV가注目되었으나, 最近에는 TFV가注目되고 있다. TFV는前後方向으로車軸을加振시키며, 高速에서 Shimmy나 Shake의原因이 된다.



[그림 26] 加振周波數의速度依存性



[그림 27] 單一 피치 配列의周波數 스펙트럼

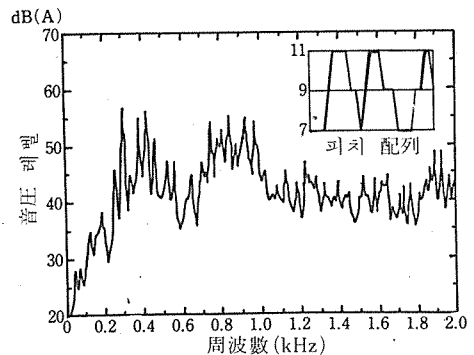
(2) 타이어 騒音(Tire noise)

타이어 騒音도 타이어를加振源으로 하는振動중의 하나이다. 타이어 騒音이라고 하면 두가지意味가 있는데, 하나는車內音이고 또 하나는車外音이다. 車內音은 運轉技士에 문제되나 車外音은 環境公害의 觀點에서 문제가 된다.

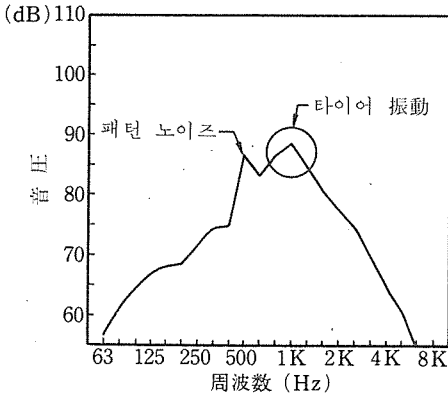
타이어 騒音의發生 메카니즘은 몇가지 있으나, 그중 하나는 Air pumping(排氣)이라 하는데, 트레드의 패턴要素가接地面을 통과할 때 흡이伸縮되어空氣의疎密波, 즉音이發生하는 것이다. 만일 패턴의 흡을周上에等間隔으로配置한다면 이 타이어 騒音은 타이어의回轉數 n 과 피치個數 N 의 곱(積)으로定해지는單一周波數 및 그高調波의音이 되어 매우 귀에 거슬리는音이 된다. 이것을 피하기 위하여 패턴의 피치 길이를周上에서變動시키는 Pitch Variation 法을 널리採用하고 있다. 이로써 패턴 노이즈 全体의 힘은變하지 않지만 광범위한周波數分佈를 가진音이 되어不快感을減少시키게 된다.

모노 피치의 경우周波數 스펙트럼과 Pitch Variation을採用한 경우의周波數 스펙트럼의 예를 보면 각각 그림 27·28과 같다. Pitch Variation에 의해銳利한 피크가消滅되고周波數分佈가 넓어졌음을 알 수 있다.

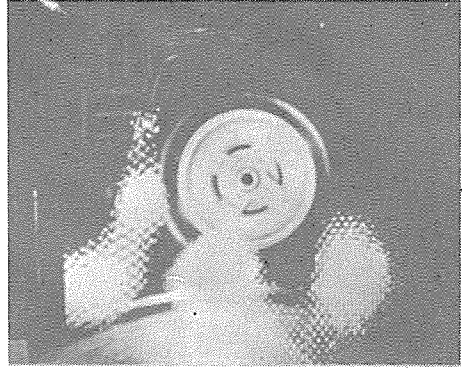
一般乘用車用 타이어의 경우, 타이어 騒音은 그림 29에表示된 바와 같이 패턴 노이즈 외에 800~1kHz에 광범위한 피크를 가지고 있다. 이러한現象은 트레드의 패턴 블록이走行時에路



[그림 28] Pitch Variation의周波數 스펙트럼



[그림 29] 타이어 騒音의 周波數分布



[그림 30] 타이어에서 放射되는 音의 強度分布

面을 두드리게 됨으로써 타이어가 加振되기 때
문이라고 볼 수 있다. 여기에는 물론 패턴의 混
配列, 轟 角度, 트레드 고무 硬度, 其他 많은 要
因이 관련되어 있다. 그리고 타이어의 構造도
중요하다. 타이어에 대한 加振力은 같다고 하여
도 音으로 變換되는 放射效率은 타이어의 構造,
특히 사이드월 部分의 構造에 많은 影響을 받
는다.

그림 30은 音의 強度分布를 可視化한 것인데,
800Hz에서 사이드部에서의 音의 強度分布를 본
것이다. 사이드의 어느 部分에서 音이 나오
고 있는지 쉽게 觀察할 수 있다. 帶域 필터를 써서
特定한 周波數帶를 선택해가면 周波數帶마다의

強度分布圖를 얻을 수 있으므로 상세한 解析이
가능하다.

[結言] 타이어의 振動特性은 지금까지만 아
니라 앞으로도 계속 注目을 끌게 되어 있다. 또
어느 정도는 原因과 對策을 理解할 수 있을 정
도로 되어 있으나, 乘車感과 騒音에 대한 要求
는 점점 高度化되고 있으므로 이 要求에 答하기
위해서는 더 많은 研究가 推進되어야 할 것이다.

參 考 文 獻

- 1) F. Böhm: ATZ. 69. 255 (1967)
- 2) Takayama M., Yamagishi K.: Tire Sci & Technol.. 11 38 (1983)

(附表)

自由度 모델에 있어서 傳達函數의 各係數

$$\begin{aligned}
 m_1 &\equiv I_1/r^2, m_2 \equiv I_2/r^2, m = m_1 m_2 / (m_1 - m_2) \\
 k_0 &\equiv G/r^2, c_0 \equiv D/r^2 \\
 A_T &= c_0/m_2 + (c_0 + c_2 + 2c_3)/m_1 \\
 B_T &= k_0/m_2 + (k_0 + k_2 + 2k_3)/m_1 + c_0(c_2 + 2c_3)/m_1 m_2 + (c_0 c_2 + c_2 c_3 + c_3 c_0)/m_1^2 \\
 C_T &= \{c_0(k_2 + 2k_3) + k_2(c_2 + 2c_3)\}/m_1 m_2 + \{c_0(k_2 + k_3) + c_2(k_0 + k_3) + c_3(k_0 + k_2)\}/m_1^2 + c_0 c_2 c_3/m_1^2 m_2 \\
 D_T &= k_0(k_2 + 2k_3)/m_1 m_2 + (k_0 k_2 + k_2 k_3 + k_3 k_0)/m_1^2 + (k_0 c_2 c_3 + k_2 c_3 c_0 + k_3 c_0 c_2)/m_1^2 m_2 \\
 E_T &= (c_0 k_2 k_3 + c_2 k_3 k_0 + c_3 k_0 k_2)/m_1^2 m_2 \\
 F_T &= k_0 k_2 k_3/m_1^2 m_2 \\
 A'_T &= c_2/m_1 \\
 B'_T &= k_2/m_1 + c_0 c_2/\bar{m} m_1 + 2c_2 c_3/m_1^2 \\
 C'_T &= (k_0 c_2 + k_2 c_0)/\bar{m} m_1 + 2(k_2 c_3 + k_3 c_2)/m_1^2 + 2c_0 c_2 c_3/m_1^2 m_2 \\
 D'_T &= k_0 k_2/\bar{m} m_1 + 2k_2 k_3/m_1^2 + 2(k_0 c_2 c_3 + k_2 c_3 c_0 + k_3 c_0 c_2)/m_1^2 m_2 \\
 E'_T &= 2(c_0 k_2 k_3 + c_2 k_3 k_0 + c_3 k_0 k_2)/m_1^2 m_2 \\
 F'_T &= 2k_0 k_2 k_3/m_1^2 m_2
 \end{aligned}$$