〈研究論文〉

Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers
Vol. 14, No. 1, June 1988

二値型 性能變數 대신 連續型 變數를 利用한 最適 選別 檢査方式

(Optimal Screening Procedures with Dichotomous Performance and Continuous Screening Variables)

裵 道 善*
金 相 復*
安 相 式**

Abstract

Optimal screening procedures with dichotomous performance variable T and continuous screening variable X are presented for assuring with a specified degree of confidence that at least ℓ out of m items found acceptable in screening inspection are conforming. It is assumed that T is a Bernoulli random variable and that the conditional distribution of X given T=t is normal. When m is also to be determined, optimal m and cut-off value of X minimizing the total expected cost are obtained. Cases of known and unknown parameters are considered and for unknown parameter cases, Bayesian approaches are used to find the optimal screening procedures.

1. 序 論

檢査하고자 하는 製品을 品質의 主 特性値인 性能變數(Performance Variable)로 檢査한다면 破壞檢査가 되거나 試驗費用이 많이 드는 경우에, 性能變數와 相關性이 높으면서 非破壞로 檢査할 수 있는 變數가 存在한다면 이 選別變數(Screening Variable)를 利用하여 製品을 檢査할 수 있다. 그러나 選別變數에 의한 檢査는 檢査費用이 적게 드는 반면에 檢査過誤가 發生할 수 있다. 따라서 性能變數 대신 選別變數를 利用하여 製品의 檢査를 하는 경우 合格, 不合格의 判斷基準이 되는 選別變數의 棄却値(Cut-off Value)를 구하는 것이 重要한 問題가 된다.

選別變數를 利用한 檢査方法에 관해서는 많은 硏究가 이루어져 왔다. Owen, McIntire와 Seymour(1975), Owen과 Boddie(1976), Owen과 Su(1977), Li와 Owen(1979), Boys와 Dunsmore(1986) 등은 選別變數를 利用하여 檢査를 한 후 良品의 比率을 要求하는 水準으로 높이는 選別方法을 다루었으며, Owen, Li

*韓國科學技術院 產業工學科
**金星 中央研究所

와 Chou(1981), Madsen(1982)은 選別檢査를 통해서 合格된 m개의 製品中에서 적어도 ℓ개 이상이 良品일 確率을 保障하는 選別方法을 다루었다.

그런데 이상의 硏究들은 性能變數와 選別變數가 二變量 正規分布를 따르는 連續型變數라는 假定下에 이루어졌으나, 製品檢査의 關心對象아 性能變數의 값의 크기 程度가 아니라 그 製品의 良, 不良에 국한되는 경우 性能變數가 二値型으로 나타나게 된다. 例를 들어, 어떤 鐵鋼製品 속의 결점의 有無가 主品質 特性値인 경우 超音波를 利用한 非破壞檢査를 통해 製品의 合格與否를 判定할 수 있다. 이 때 性能變數는 결점의 有無를 나타내는 二値型 變數가 되며, 選別變數는 超音波의 振幅의 크기를 나타내는 連續型 變數이다. Riew와 Bai(1984)는 選別變數도 二値型 變數일 때 經濟的 計數型 샘플링 檢査方式을 구했으며, Boys와 Dunsmore(1987)는 性能變數가 二値型 變數이고, 選別變數는 連續型 變數일 때 母數의 事前情報와 n개의 資料로부터 選別 후에 n+1번째 製品이 良品일 豫測確率(Predictive Probability)을 要求하는 水準으로 높이는 選別方法을 다루었다.

本 硏究는 二値型 性能變數 T와 連續型 選別變數 X에 대하여 選別檢査를 통해 合格한 m개의 製品 중에서 ℓ개 이상이 良品임을 주어진 確率값으로 保障하는 最適選別方法을 다루고자 한다. 2節에서는 ℓ개의 良品이 必要한 싯점에서 選別檢査에 合格한 m개의 製品 中에서 적어도 ℓ개 이상이 良品임을 주어진 確率로 保障하고 싶을 때, (T, X) 確率模型을 定義하는 母數가 모두 旣知인 경우와 未知의 母數가 包含되어 있는 경우에 대해 구하고, 3節에서는 確率保障條件을 滿足시키면서 選別檢査時 發生되는 期待費用을 最小化하는 m과 選別變數의 棄却値를 同時에 구하는 方法을 다루었다. 그리고 例題를 통한 最適選別方法의 適用을 4節에서 다루었다.

<u>假定</u>

1) 性能變數 T는 製品이 良品일 때 1, 不良品일 때 0의 값을 갖는 베르누이(Bernoulli) 確率變數이다.
2) 選別變數 X는 性能變數 T값이 주어진 條件下에서 正規分布를 따른다.
3) 選別檢査時 測定한 製品의 X값이 棄却値보다 크거나 같을 때 合格, 작을 때 不合格시킨다.
4) 選別前 良品의 比率 s를 모르는 경우 s가 beta 事前分布를 따른다.
5) 選別變數 X의 平均 μ_i, $i=0,1$를 모르는 경우 μ_i가 각각 正規事前分布를 따른다.

<u>記號</u>

T : 0,1의 두 값을 갖는 性能變數

X : 連續型 選別變數

W : 選別變數 X의 棄却値

s : 選別前 良品의 比率, $P(T=1)$

δ : 選別後 良品의 比率, $P(T=1 \mid X \geq W)$

μ_i, σ_i^2 : $T=i$, $i=0,1$일때, X의 平均과 分散 $(\mu_1 > \mu_0)$

$\phi(\cdot)$, $\Phi(\cdot)$: 標準正規分布의 確率密度函數와 分布函數

K_p : 標準正規分布의 제 p 百分位數

ζ : m 중 ℓ개 이상이 良品일 確率

m : 選別時 合格 갯수

ℓ : 必要한 良品의 數$(m \geq \ell)$

n_i : 크기가 n인 랜덤 샘플 중에서 $T=i$, $i=0$, 1인 製品의 數. 단 $n=n_0+n_1$

$\overline{X}_i$: $T=i$, $i=0,1$일 때 選別變數 X의 標本平均

ν : 選別檢査에서 合格한 m개의 製品 中에 들어있는 良品의 數

$F_{p,a,b}$: 分子의 自由度 a, 分母의 自由度 b인 F 分布의 제 p 百分位數

2. ℓ과 m이 주어진 경우 (T, X) 確率模型

ℓ개의 良品이 必要할 때 직접 性能變數로 ℓ개의 良品이 나올 때까지 檢査를 하면 되나, 性能變數에 의한 檢査가 破壞檢査를 수반하거나 費用이 많이 들 경우에는 選別變數를 利用하여 製品을 選別할 수 있다. 그런데 選別變數를 利用한 檢査는 檢査過誤가 따르게 되므로 ℓ개의 良品을 얻기 위해서는 ℓ보다 많은 m ($>\ell$)개의 製品이 나올 때까지 選別해야 한다. 이 때 選別檢査에서 合格된 m개 중에서 적어도 ℓ개 이상이 良品임을 주어진 確率값으로 保障하기 위한 選別變數의 棄却値(Cut-off Value) W를 구하는 것이 必要하게 된다. ℓ과 m이 주어진 경우 最適棄却値 W*를 구하기 위한 (T, X) 確率模型은 다음과 같다.

ν가 二項分布 b(m, δ)를 따르므로 ζ는 $\sum_{j=\ell}^{m}\binom{m}{j}\delta^{j}(1-\delta)^{m-j}$ 가 되며, 이를 δ에 대해 풀면(Johnson and Kotz(1969))

$$\delta \geq \delta^* \tag{1}$$

단, $\delta^* = 1 - \dfrac{m-\ell+1}{m-\ell+1+(\ell F_{\zeta,2\ell,2m-2\ell+2})}$이다.

그런데 $\delta = P(T=1 \mid X \geq W)$

$$= \frac{s\Phi\left(\frac{\mu_1 - W}{\sigma_1}\right)}{s\Phi\left(\frac{\mu_1 - W}{\sigma_1}\right) + (1-s)\Phi\left(\frac{\mu_0 - W}{\sigma_0}\right)}, \quad i=0,1. \tag{2}$$

따라서 式 (1), (2)로부터 最適解는 다음 式을 滿足하는 最小값 W*가 된다.

$$\frac{s\Phi\left(\frac{\mu_1 - W}{\sigma_1}\right)}{s\Phi\left(\frac{\mu_1 - W}{\sigma_1}\right) + (1-s)\Phi\left(\frac{\mu_0 - W}{\sigma_0}\right)} \geq 1 - \frac{m-\ell+1}{m-\ell+1+(\ell F_{\zeta,2\ell,2m-2\ell+2})} \tag{3}$$

모든 母數의 값을 알고 있는 경우, δ는 W가 增加함에 따라 1에 가까와지는 W의 增加函數이므로 最適解 W*는 唯一하게 存在하며, (3)式으로부터 구해진다.

2.1 母數 s를 모르는 경우

選別前 良品의 比率 s를 모르는 경우 s에 대한 事前 情報로부터 s의 分布가 beta(h_1, h_0)임을 알며, 크기가 n인 랜덤 샘플($T_1, T_2, \ldots, T_n$)이 주어졌다고 하면 s의 事後分布는 beta(h_1+n_1, h_0+n_0)가 되며, s가 確率變數이므로 $\delta \geq \delta^*$일 確率을 η라고 하면 選別檢査를 통해서 合格된 m개의 製品 中 ℓ개 이상이 良品일 確率保障값은 Bonferroni 不等式으로부터 $\zeta+\eta-1$이 된다. ζ, η값은 最終確率保障값 $\zeta+\eta-1$을 滿足하는 任意의 값을 취할 수 있으나, $\eta=\zeta$로 놓고 η값을 구하여 $P(\delta \geq \delta^*)=\eta$를 滿足하는 W를 구한다. 母數 s를 모르는 경우 最適解 W*는 다음 〈定理 1〉로 주어진다.

定理 1 :

$$\eta = \int_{s*}^{1} k(s;\ h_1+n_1, h_0+n_0)\,ds \tag{4}$$

인 s*에 대해

$$s* = \frac{\delta*\Phi\left(\frac{\mu_0 - W}{\sigma_0}\right)}{(1-\delta*)\Phi\left(\frac{\mu_1 - W}{\sigma_1}\right) + \delta*\Phi\left(\frac{\mu_0 - W}{\sigma_0}\right)} \tag{5}$$

를 滿足하는 W가 最適解이다. 단, k(s ; h_1+n_1, h_0+n_0)는 母數 h_1+n_1, h_0+n_0를 갖는 beta 確率密度函數이다.

證明)

$$\frac{d\delta}{ds} = \frac{\Phi\left(\frac{\mu_1 - W}{\sigma_1}\right) \quad \Phi\left(\frac{\mu_0 - W}{\sigma_0}\right)}{\left[(1-s)\Phi\left(\frac{\mu_0 - W}{\sigma_0}\right) + s\Phi\left(\frac{\mu_1 - W}{\sigma_1}\right)\right]^2} > 0$$

이므로 δ는 s에 대해 單調增加函數이다. 따라서 어떤 값 δ^*에 대해 $\delta \geq \delta^*$이면, $s \geq s^*$를 滿足하는 s^*가 唯一하게 存在한다. 式 (1)로부터 δ^*가 주어지면 $s \geq s^*$가 되는 唯一한 s^*는 式 (5)와 같이 주어진다. 따라서 $P(\delta \geq \delta^*) = \eta$를 滿足하는 W^*는, $P(s \geq s^*) = \eta$를 滿足하는 s^*에 대해 式 (5)로부터 구할 수 있다.■

이와같이 구한 W^*에 대해 $X \geq W^*$인 製品을 m개 合格시키면, 그 중 ℓ개 이상이 良品임을 $\zeta + \eta - 1$의 確率로 保障할 수 있다.

2.2 母數 μ_0, μ_1의 값을 모르는 경우

母數 μ_0, μ_1의 값을 모를 때, 事前情報로부터 μ_i, $i=0,1$의 分布가 $N(\tau_i', \lambda_i'^2)$임을 알 수 있고, 크기 n인 랜덤 샘플(T_1, X_1), $(T_2, X_2), \ldots, (T_n, X_n)$으로부터 $T=i$인 製品의 數가 각각 n_1, n_0로 주어진다고 하면, μ_0, μ_1의 事後分布는 $N(\tau_i, \lambda_i^2)$, $i=0,1$,을 따른다. 단, τ_i λ_i는 다음과 같다.

$$\frac{1}{\lambda_i^2} = \frac{1}{\lambda_i'^2} + \frac{n_i}{\sigma_i^2}$$

$$\tau_i = \frac{(\frac{1}{\lambda_i'})^2 \tau_i' + (\frac{n_i}{\sigma_i^2}) \overline{X}_i}{(\frac{1}{\lambda_i'})^2 + (\frac{n_i}{\sigma_i^2})}, \quad i=0,\ 1.$$

이 때 最適解 W^*는 2.1節과 같은 方法으로 구할 수 있다. δ가 未知의 母數 두 개를 包含하고 있으므로, $a_i = \Phi(\frac{\mu_i - W}{\sigma_i})$, $i=0,1$,이라 놓으면 $\delta = \frac{sa_1}{(1-s)a_0 + sa_1}$이 된다. $\frac{\partial \delta}{\partial a_1} > 0$이고, $\frac{\partial \delta}{\partial a_0} < 0$가 되므로 어떤 常數 a_1^*와 確率값 η에 대해 $P(a_1 \geq a^*) = \eta$이고 $P(a_0 \geq a_1^* \frac{s(1-\delta^*)}{(1-s)\delta^*}) = \eta$이면 Bonferroni 不等式을 利用하여 $P(\delta \geq \delta^*) \geq 2\eta - 1$가 됨을 보일 수 있다. 選別變數 X의 最適棄却値 W^*는 다음 〈定理 2〉로부터 구해진다. 이 때 確率保障값은 $\zeta + 2\eta - 2$가 된다.

定理 2 : $a_0^* = a_1^* \frac{s(1-\delta^*)}{(1-s)\delta^*}$라고 하면

$$-\sigma_1 K_{a_1}^* + \sigma_0 K_{a_0}^* = -\tau_1 + \tau_0 + (\lambda_1 + \lambda_0) K_\eta \quad (6)$$

를 滿足하는 a_1^*를 구하고, 最適棄却値는

$$W^* = -\sigma_1 K_{a_1}^* + \tau_1 + \lambda_1 K_{1-\eta} \quad (7)$$

이다.

證明) $P(a_1 \geq a_1^*) = \eta$로부터

$$\eta = P[\Phi(\frac{\mu_1 - W}{\sigma_1}) \geq a_1^*]$$

$$= P[\frac{\mu_1 - \tau_1}{\lambda_1} \geq \frac{W + \sigma_1 K_{a_1}^* - \tau_1}{\lambda_1}]$$

따라서 $W = -\sigma_1 K_{a_1}^* + \tau_1 + \lambda_1 K_{1-\eta}$이다.

같은 方法으로 $P(a_0 \leq a_1^* \frac{s(1-\delta^*)}{(1-s)\delta^*} = \eta$로부터

$$\eta = P[\Phi(\frac{\mu_0 - W}{\sigma_0}) \leq a_1^* \frac{s(1-\delta^*}{(1-s)\delta^*}].$$

즉, $W = -\sigma_0 K_{a_0}^* + \tau_0 + \lambda_0 K_\eta$.

W에 관한 두 方程式으로부터 式 (6), (7)을 구할 수 있다.■

3. ℓ만 주어진 경우 (T, X) 確率模型

選別檢査時 合格되는 製品의 數와 關係없이 ℓ개 良品만이 必要한 경우 合格品 中에서 ℓ개 이상이 良品일 確率값만 一定하게 維持된다면 滿足한다고 할 때, 이 確率값을 滿足하면서 選別檢査에서 發生하는 總 期待費用이 最小가 되는 合格品 數 m과 選別棄却値 W를 同時에 決定할 必要가 생긴다. β를 選別檢査時 하나의 製品이 合格할 確率이라고 하면 選別時 期待檢査 갯수는 m/β이고 良品이면서 不合格되는 期待갯수는 $m(s-\delta\beta)/\beta$이며, 要求하는 良品의 數 ℓ을 超過하는 良品의 期待 갯수

는 $\sum_{j=\ell+1}^{m}(j-\ell)\binom{m}{j}\delta^j(1-\delta)^{m-j}$이다. 따라서 C_s를 製品 單位當 選別檢查費用, C_f를 良品인데도 不合格 處理함에 따른 單位損失費用, C_e를 要求하는 ℓ개보다 더 많은 良品供給에 따른 單位損失費用, C_p를 要求하는 良品의 數 ℓ를 滿足시키지 못하는 경우 罰過費用이라 하면, 選別檢査時 發生하는 總 期待費用 EC(m, W)는 다음과 같다.

$$EC(m, W)=C_s\frac{m}{\beta}+C_f\frac{m}{\beta}(s-\delta\beta)$$
$$+C_e\sum_{j=\ell+1}^{m}(j-\ell)\binom{m}{j}\delta^j(1-\delta)^{m-j}$$
$$+C_p\sum_{j=0}^{\ell}\binom{m}{j}\delta^j(1-\delta)^{m-j}$$

단, $\beta=P(X\geq W)=(1-s)\ \Phi(\frac{\mu_0-W}{\sigma_0})+s\Phi(\frac{\mu_1-W}{\sigma_1})$.

確率保障값 ζ가 充分히 크면 m개 중 良品의 數가 ℓ개보다 작아지는 事件이 發生할 確率이 작아지며, 發生할 경우라도 ℓ과의 差異의 期待값이 작으므로 ℓ에 못 미치는 良品의 數에 相關없이 罰過費用이 一定하게 發生한다고 생각할 수 있다. 즉, 要求하는 良品의 數 ℓ을 滿足시키지 못하는 경우 發生하는 罰過費用은 $C_p(1-\zeta)$의 常數로 나타나게 되어 最適解(m^*, W^*)를 구하는데 影響을 미치지 않게 된다. 한편 選別後 良品의 比率이 選別前보다 크다는 條件으로부터 m은 上限값 M을 가지며, M은 다음 不等式을 滿足하는 m의 最大값으로 주어진다.

$$1-\frac{m-\ell+1}{m-\ell+1+(\ell\ F_{\zeta,2\ell,2m-2\ell+1})}\geq s \qquad (8)$$

따라서 모든 母數값을 아는 경우, 要求하는 確率保障값 ζ를 滿足시키면서 總 期待費用을 最小化하는 (m^*, W^*)는 다음의 最適化 問題로부터 구할 수 있다.

$$\underset{m,W}{\text{最小化}}\ EC(m, W)$$

$$\text{制約條件}:\ \frac{s\Phi(\frac{\mu_1-W}{\sigma_1})}{s\Phi(\frac{\mu_1-W}{\sigma_1})+(1-s)\Phi(\frac{\mu_0-W}{\sigma_0})}$$
$$\geq 1-\frac{m-\ell+1}{m-\ell+1+(\ell\ F_{\zeta,2\ell,2m-2\ell+1})} \qquad (9)$$

$\ell\leq m\leq M$, m은 整數.

즉, m을 ℓ부터 M까지 하나씩 增加시키면서 각 m에 대해 不等式 (9)를 滿足하는 最小값 W를 구한 후 $(M-\ell+1)$개의 (m, W)雙에 대해 EC(m, W)를 最小化하는 (m^*, W^*)를 찾는다. 式 (9)의 左邊은 W가 增加함에 따라 s부터 1까지 變하는 W의 增加函數이고, 右邊은 選別後 良品의 比率 δ이므로, $\delta>s$라는 條件으로부터 式 (9)를 滿足하는 W^*가 唯一하게 存在한다.

4. 例 題

2節과 3節에서 구한 最適選別方法에 대한 두 가지 例를 살펴본다. 最適解를 구하는데 있어서 必要한 分布函數 값의 計算에는 IMSL (1980) 서브루틴을 使用하였다.

例題 1: 主品質特性値 T를 利用하여 良(T=1), 不良(T=0)을 알아낸다면 破壞檢査가 되어 主品質特性値와 相關關係가 큰 代用特性値 X를 利用하여 選別하고자 하는 製品이 있다. X가 T=i, i=0, 1,에서 N(i, 1)을 따르며, 選別前 良品의 比率 s는 beta(13.5, 1.5)의 事前分布를 갖고, n=20인 랜덤 샘플로부터 n_1=18, n_0=2를 얻었다고 하면, 選別檢査에서 合格한 11개의 製品 中에서 9개 이상이 良品일 確率이 0.9 이상이 되도록 하는 最適選別棄却値 W^*는 式 (4), (5)로부터 0.8368이다. 이 때 選別後 良品의 比率 $\delta=P(T=1\mid X\geq W)=0.$

9212가 된다. 表 1은 s의 事前分布 beta(h_1, h_0)에서 s의 期待값이 0.9가 되며, s의 分散이 增加되도록 母數 h_1, h_0값을 變化시킬 때, 最適解 W*의 變化를 보여준다. 選別前 良品의 比率 s의 分散이 커짐에 따라 選別棄却値 W값이 增加하여 選別檢査의 嚴格度가 커짐을 알 수 있다.

表 1. h_1, h_0의 變化에 따른 最適解의 變化
($\ell=9$, $m=11$, $n_1=18$, $n_0=2$, $\mu_1=1$, $\mu_0=0$, $\sigma_1=\sigma_0=1$)

(h_1, h_0)	S 의分散	W*
(27.0, 3.0)	290	0.6787
(22.5, 2.5)	346	0.7204
(18.0, 2.0)	429	0.7761
(16.2, 1.8)	474	0.7991
(13.5, 1.5)	563	0.8368
(10.8, 1.2)	692	0.8784

表 2. m의 變化에 따른 總 期待 費用
($\ell=9$, $s=0.7$, $C_s=0.1$, $C_f=1$, $C_e=10$, $\delta=0.9$, $\mu_0=0$, $\mu_1=1$, $\sigma_0=\sigma_1=1$)

m	W*	β/m	$m(s-\delta\beta)/\beta$	9個를 超過할 期待良品數	EC(m, W)
9	3.8310	5483.7000	3829.7000	0.0000	4378.0700
10	2.0746	95.5993	57.4648	0.5708	72.7327
11	1.2020	33.5267	13.6205	0.9735	26.7082
12	0.5760	21.8367	5.1319	1.2837	20.1522
13	0.0342	17.8336	2.0856	1.5379	19.2280
14	−0.5253	16.1743	0.7200	1.7446	19.7834
15	−1.3248	15.5411	0.1092	1.9171	20.8343

例題 2: 例題 1에서 良品의 比率 s가 0.7이고, m의 크기에 相關없이 9개 이상의 良品이 들어 있을 確率保障값이 0.9이면 滿足한다고 할 때, $C_s=0.1$, $C_f=1$, $C_e=10$이라고 하면, 式 (8)로부터 m의 上限값은 15이므로 m을 9에서 15까지 變化시키면서 式 (9)를 滿足하는 W값을 구한 후 각 (m, W)에 대해 總 期待費用을 구하면 表 2와 같다. 따라서 $(m^*, W^*)=(13, 0.0342)$이다. 단, 表 2의 總 期待費用에는 m개 中 良品의 數가 ℓ개에 못 미치는 경우 發生하는 罰過費用은 包含되어 있지 않다.

5. 結 論

本 硏究에서는 性能變數가 二値型 變數이고 選別變數의 棄却値가 下限값으로 주어지는 경우의 選別檢査問題를 다루었다. 選別檢査에 合格한 m개 中 적어도 ℓ개 이상이 良品임을 주어진 確率값으로 保障하고자 할 때 모든 母數를 아는 경우와 모르는 母數가 包含되어 있는 경우에 대해 最適選別檢査政策을 구하였다. 또한 合格品 數에 關係없이 m중 ℓ개 이상이 良品일 確率값만 一定하면 滿足한다고 할 때, 要求하는 確率保障값을 滿足하면서 發生하는 總期待費用을 最小化하는 選別棄却値 W와 合格品 數 m을 구하였다.

追後硏究課題로는 選別變數의 分散을 모르는 경우와, (T, X) 確率模型을 로지스틱(Logistic) 模型으로 近似시킬 수 있는 경우의 最適選別檢査政策을 생각할 수 있다.

References

Boys, R. J., and Dunsmore, I. R., "Screening in a Normal Model," *Journal of Royal Statistical Society-Series B*, 48, pp. 60–69, 1986.

Boys, R. J., and Dunsmore, I. R., "Diagnostic and Sampling Models in Screening," *Biometrika*, 74, pp. 365–374, 1987.

International Mathematical and Statistical Libraries, Inc., IMSL Library : Reference Manual, Houston, 1980.

Johnson, N. L., and Kotz, S., *Distributions in Statistics : Continuous Univariate Distributions-2*, Houghton Mifflin Co., Boston, 1969.

Li, L., and Owen, D. B., "Two-Sided Screening Procedures in the Bivariate Case," *Technometrics*, 21, pp. 79–85, 1979.

Madsen, R. W., "A Selection Procedure Using a Screening Variate," *Technometrics*, 24, pp. 301–306, 1982.

Owen, D. B., and Boddie, J. W., "A Screening Method for Increasing Acceptable Product with Some Parameters Unknown," *Technometrics*, 18, pp. 195–199, 1976.

Owen, D. B., Li, L., and Chou, Y. M., "Prediction Intervals for Screening Using a Measured Correlated Variate," *Technometrics*, 23, pp. 165–170, 1981.

Owen, D. B., McIntire, D., and Seymour, E., "Tables Using One or Two Screening Variables to Increase Acceptable Product Under One-Sided Specifications," *Journal of Quality Technology*, 7, pp. 127–138, 1975.

Owen, D. B., and Su, Y. H., "Screening Based on Normal Variables," *Technometrics*, 19, pp. 65–68, 1977.

Riew, M. C., and Bai, D. S., "An Economic Attributes Acceptance Sampling Plan with Three Decision Criteria," *Journal of Quality Technology*, 16, pp. 136–143, 1984.