〈硏究論文〉

Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers
Vol. 14, No. 1, June 1988

두 종류의 도착형태를 갖는 대기행렬 체계의 분석†

(Analysis of a Queueing System with Two Types of Arrival Patterns)

이 화 기*
윤 은 상*

ABSTRACT

The aim of this project is to analyze the queueing model with the two types of custom ers which either can wait unrestrictedly or wait restrictively in the system depending on the condition of service facility unless they may be served immediately.

This model consists of the three-dimensional state space and then quasi birth-death process is formulated. The steady-state probabilities and measures of performance of this system are derived by using Matrix Geometric method.

1. 서 론

대기체계에 대한 연구는 사회에서 운영되어지고 있는 단순한 모형을 가지고 많은 연구가 실행되어져 왔으나, 점점 실제적이고 복잡한 현상을 갖는 체계의 출현에 따라 대기모형을 분석하는 데에 많은 어려움이 따르게 된다. 본 논문은 Matrix Geometric Method를 이용하여, 서어비스를 요청하는 고객이 두가지 형태로 도착이 이루어질때 한 유형의 고객들은 아무 제약없이 대기가 가능하며 다른 유형의 고객들은 제한적으로 대기가 가능한 대기행렬체계의 현상을 분석하려는데 목적이 있다.

Matrix Geometric Method〔6〕를 적용하여 특수형태의 대기모형을 다룬 예로는 Green〔4〕에 의해 발표된 두 형태의 고객을 가지며 두 형태의 고객 모두에게 서어비스를 제공할 수 있는 일반적으로 이용 가능한 n명의 서어비스 제공자와 두 형태의 고객 중에서 한 형태의 고객에게만 서어비스를 제공할 수 있는 제한적으로 이용가능한 m명의 서어비스 제공자를 갖는 대기모형의 연구를 들 수 있다. 또 다른 예로는 Sato와

* 인하대학교 공과대학 산업공학과

† 본 연구는 1987년도 한국과학재단의 연구지원비에 의해 이루어진 것임.

Mori[8]에 의해 발표되어진 두 형태의 고객을 가지며 각 형태의 고객에게만 서어비스를 제공할 수 있는 서어비스 제공자와 이들이 바쁨으로 인해 손실되어 질 수 있는 두 형태의 고객들에게 서어비스를 제공할 수 있는 제 3 의 서어비스 제공자를 갖는 대기모형의 연구 등이 있다. 또한 Neuts[6]는 Bhat와 Fisher[2]의 연구에서 제시된 대기 가능한 data와 대기 불가능한 data를 입력으로 하는 telecommunication model에 대해 Matrix Geometric Method를 적용하였다. 본 연구는 대기가 아무 제한없이 가능한 고객과 대기가 제한적으로 가능한 고객을 입력원으로 가진 대기행렬체계에 대해 상태공간이 3차원으로 구성된 Block-partitioned stochastic Matrix를 구하고 이어 Matrix Geometric Method를 적용하였다.

2. Model의 설정

본 연구는 원거리 Terminal을 가진 Computer Network System과 정보센터, 그리고 여행사 등에서 발생할 수 있는 대기체계를 다루게 되며 이 모형은 다음과 같은 특성을 갖는다.

1) 대기체계내에 k명의 서어비스 제공자(또는 capacity k)를 가지며 각각 다른 방법으로 체계에 도착하는 두 형태의 고객을 갖는다.

2) 서어비스 제공자는 두 형태의 고객들에 대해 모두 서어비스를 제공할 수 있다.

3) 한 유형의 고객들은 서어비스를 제공받기 위해 체계내에서 기다리는 것이 항상 가능하다.

4) 다른 유형의 고객에 대해서는 이들 고객의 수가 서어비스 제공자의 수와 같을 때 체계에 도착하는 그 이상의 고객은 손실된다.

앞에서 언급한 예에서 첫번째 유형의 고객은 Computer Center내의 사용자나 여행사의 경우에는 사람의 직접 방문에 의한 서어비스 문의가 해당되며 두번째 유형의 고객은 각각 Dial Modem(전화를 이용한 Computer 통신장치)으로 연결된 원거리 Terminal의 이용자와 전화로 서어비스를 문의하는 고객이 해당된다. 여기서 전자는 아무 제한없이 대기가 가능한 고객이며 후자는 대기가 제한적으로 가능한 고객이다. 여행사의 예를 상술하면 다음과 같다. 아무 제한없이 대기 가능한 고객들은 사람이 직접 여행사를 방문하여 문의하는 고객들이며 평균도착율 λ_1을 갖는다. 대기가 제한적으로 가능한 고객들은 여행사에 전화를 걸어 문의하는 고객들로 평균도착율 λ_2를 갖는다. 서어비스를 행하는 사람은 여행사 직원이 되며 직접 방문한 고객과 전화문의 고객 모두를 서어비스할 수 있다. 직접 방문한 고객은 직원이 바빠서 서어비스를 받을 수 없을때에 여행사 내에서 대기하는 것이 가능하며 전화로 문의하는 고객은 직원이 모두 전화상으로 서어비스를 하고 있을때는 손실되어지나 직접 방문한 고객을 서어비스 하고 있을 때는 전화수 만큼까지는 대기가 가능할 수 있다.

지금부터 대기 체계에서 아무 제한없이 대기가 가능한 고객을 형태1의 고객이라 하고 대기가 제한적으로 가능한 고객을 형태2의 고객이라 하며, 계량적 모형을 세우기 위해 다음과 같은 가정이 수반된다.

1) 형태1의 고객에 대한 평균도착율은 λ_1, 형태2의 고객의 평균도착율은 λ_2이며 각각 독립적으로 Poisson Process를 이루며 체계에 도착한다.

2) 형태1의 고객은 평균서어비스율 μ_1으로 서어비스 되고 형태2의 고객은 평균서어비스율 μ_2로 서어비스되며, 서어비스 시간은 각각 지수분포를 이룬다.

3) 형태1 고객에 대한 Queue Capacity에는 제한이 없다.

4) 서어비스 원칙은 형태2 고객에 Nonpreemptive Priority를 준다. 즉 형태1 고객과 형태2 고객이 서어비스를 위해 각각 기다리는 경우 형태2 고객에게 먼저 서어비스를 제공한다.

위의 가정들은 고객의 도착과 서어비스가 random으로 이루어 진다는 면에서 현실적으로 타당한 것이며, 한편 두 형태의 고객들 사이에서 서어비스 규칙의 종류는 여러가지 일 수 있으나 2종류로 대기열이 이루어진 상태에서 FIFO원칙을 적용하기는 서어비스 면에서 현실적으로 어려움이 있으며 또한 되도록 체계에서 손실되는 고객을 줄이는 의도에서도 위의 원칙이 현실적으로 한층 타당성이 있다고 하겠다.

3. Model의 구성과 분석

3.1 Model의 구성

2장에서 설정된 대기체계는 상태공간(State Space)이 3차원 상태를 가진 Markov 과정으로 구성한다. 상대공간 E는

$E=\{(\ell, m, n),\ \ell > 0,\ 0 < m < k,\ 0 < n < k-m\}$

여기서 ℓ : System내에 있는 고객수

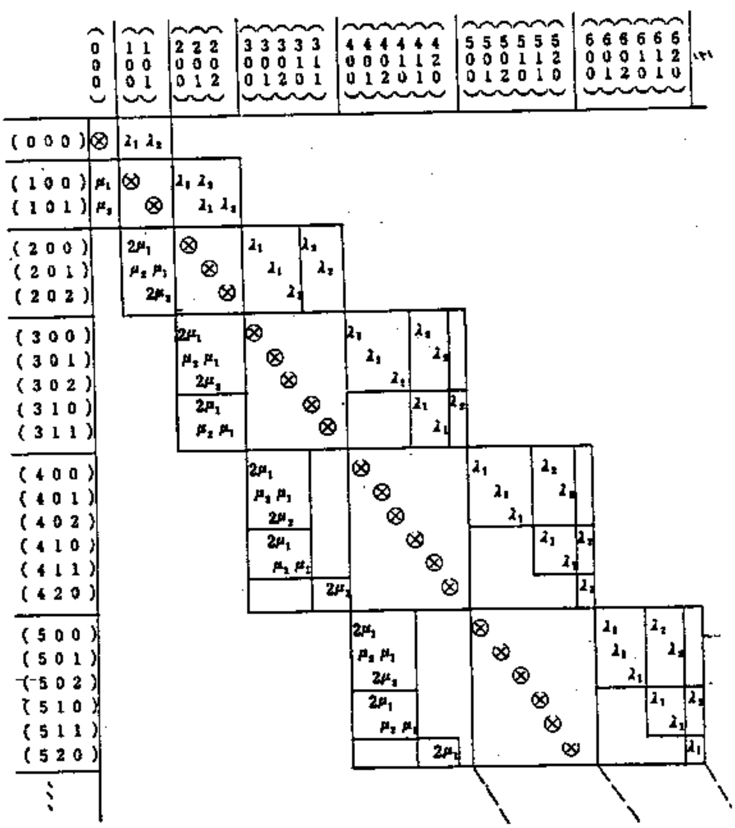
m : Queue내에 있는 형태2의 고객수

n : Service내에 있는 형태2의 고객수

k : 서비스 제공자의 수

로 정의된다. 이 상태공간 E를 바탕으로 유사출생소멸(QBD : Quasi Birth-death)과정을 가진 Generator matrix G를 구성할 수 있게 된다. 앞에서 정의한 상태공간 E를 바탕으로 서어비스 제공자가 2명(k=2)일때 구성된 G Matrix는 표 3.1과 같은 모양을 갖는다.

(표 3.1) k=2일 때의 Generator matrix의 형태



여기서, ⊗는 행의 합을 '0'로 만들어 주기 위해 행의 모든 요소를 더해 -를 붙여준 값이다.

이 G matrix를 k가 일반적인 경우로 확장하여 구성하면 다음과 같은 Block화된 모양을 가지게 된다.

$$
G = \begin{bmatrix}
A_0 & E_1 & & & & & & & & & & \\
F_1 & A_1 & E_2 & & & & & & & & & \\
 & F_2 & A_2 & E_2 & & & & & & & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & & \\
 & & & F_{K-1} & A_{K-1} & E_K & & & & & & \\
 & & & & F_K & A_K & D_{K+1} & & & & & \\
 & & & & & C_{K+1} & A_{K+1} & D_{K+2} & & & & \\
 & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
 & & & & & & & C_{2K-1} & A_{2K-1} & D_{2K} & & \\
 & & & & & & & & C_{2K} & B_1 & B_0 & \\
 & & & & & & & & & B_2 & B_1 & B_0 \\
 & & & & & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots
\end{bmatrix}
$$

여기에서, 각 Block들의 Matrix 형태는 다음과 같다.

$$
E_a = \begin{bmatrix}
\lambda_1 & \lambda_2 & & & & \\
 & \lambda_1 & \lambda_2 & & & \\
 & & \ddots & \ddots & & \\
 & & & \lambda_1 & \lambda_2 & \\
 & & & & \lambda_1 & \lambda_2
\end{bmatrix}
$$

$(a) \times (a+1)$ matrix

$(a = 1, 2, 3 \cdots, k)$

$$
F_a = \begin{bmatrix}
a\mu_1 & & & & \\
\mu_2 & (a-1)\mu_1 & & & \\
 & 2\mu_2 & \ddots & & \\
 & & \ddots & \ddots & \\
 & & & (a-1)\mu_2 & \mu_1 \\
 & & & & a\mu_2
\end{bmatrix}
$$

$(a+1) \times (a)$ matrix

$(a = 1, 2, 3, \cdots, k)$

$$D_{K+1} = \begin{bmatrix} d^1_{K+1} & d^2_K \end{bmatrix}$$

$$D_{K+2} = \begin{bmatrix} d^1_{K+1} & d^2_K & \\ & d^1_K & d^2_{K-1} \end{bmatrix}$$

$$D_{K+3} = \begin{bmatrix} d^1_{K+2} & d^2_K & & \\ & d^1_K & d^2_{K-1} & \\ & & d^1_{K-1} & d^2_{K-2} \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$D_{2K} = \begin{bmatrix} d^1_{K+1} & d^2_K & & & & \\ & d^1_K & d^2_{K-1} & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & d^1_3 & d^2_2 & \\ & & & & d^1_2 & d^2_1 \end{bmatrix} \quad \frac{k(k+3)}{2} \times \frac{(k+1)\ (k+2)}{2} \ \text{matrix}$$

여기에서,

$$d^1_i = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_1 & \\ & & & & \lambda_1 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} (i) \times (i) \ \text{matrix} \\ (i=2, 3, 4, \cdots, k+1) \end{matrix}$$

$$d^2_j = \begin{bmatrix} \lambda_2 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_2 \\ & & & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} (j+1) \times (j) \ \text{matrix} \\ (j = 1, 2, 3, \cdots, k) \end{matrix}$$

이다.

$$\mathbb{C}_{K+1} = \begin{bmatrix} C^1_{K+1} & \\ & C^2_K \end{bmatrix} \quad \mathbb{C}_{K+2} = \begin{bmatrix} C^1_{K+2} & & \\ C^2_K & & \\ & & C^2_{K-1} \end{bmatrix} \quad \mathbb{C}_{K+2} = \begin{bmatrix} C^1_{K+1} & & & \\ C^2_K & & & \\ & C^2_{K-1} & & \\ & & & C^2_{K-2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{C}_{2K} = \begin{bmatrix} C^1_{K+1} & & & & & \\ C^2_K & & & & & \\ & C^2_{K-1} & & & & \\ & & C^2_{K-2} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & C^2_2 & \\ & & & & & C^2_1 \end{bmatrix} \qquad \frac{(k+1)\ (k+2)}{2} \times \frac{k(k+3)}{2} \text{ matrix}$$

여기에서,

$$C^1_{K+1} = \begin{bmatrix} k\mu_1 & & & \\ \mu_2 & (k-1)\mu_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & (k-1)\mu_2, & \mu_1 \\ & & & k\mu_2\,0 \end{bmatrix} \qquad (k+1) \times (k+1) \text{ matrix}$$

$$C^2_K = \begin{bmatrix} 0 & k\mu_1 & & \\ & \mu_2 & (k-1)\mu_1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & (k-1)\mu_2 & \mu_1 \end{bmatrix} \qquad (k) \times (k+1) \text{ matrix}$$

$$C^2_{K-1} = \begin{bmatrix} 0 & k\mu_1 & & \\ & \mu_2 & (k-1)\mu_1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & (k-2)\mu_2 & 2\mu_1 \end{bmatrix} \qquad (k-1) \times (k) \text{ matrix}$$

$$C^2_1 = [0 \ \ k\mu_1] \qquad (1) \times (2) \text{ matrix}$$

이다.

$$B_0 = \begin{bmatrix} d^1_{K+1} & d^2_K & & & & \\ & d^1_K & d^2_{K-1} & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & d^1_2 & d^2_1 & \\ & & & & d^1_1 \end{bmatrix} \qquad \frac{(k+1)\ (k+2)}{2} \times \frac{(k+1)\ (k+2)}{2} \ \text{matrix}$$

여기서 d^1_i, d^2_j는 D_{2K}에서 정의된것

$$B_2 = \begin{bmatrix} C^1_{K+1} & & & & \\ C^2_K & & & & \\ & C^2_{K-1} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & C^2_1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \frac{(k+1)\ (k+2)}{2} \times \frac{(k+1)\ (k+2)}{2} \ \text{matrix}$$

여기에서 C^1_{k+1}, C^2_1는 $\mathfrak{C}_{2k}$에서 정의된 것
$(i=1, 2, 3, \cdots, k)$

A_o는 $-(E_1$의 row sum)값이 main diagonal을 구성하는 matrix. $(\ell=0)$

A_l은 $-(E_{l+1}$의 row sum$+F_l$의 row sum)값이 main diagonal을 구성하는 matrix. $(1<\ell<k+1)$

A_k는 $-(D_{k+1}$의 row sum$+F_k$의 row sum)값이 main diagonal을 구성하는 matrix. $(\ell=k)$

A_l은 $-(D_{l+1}$의 row sum$+C_l$의 row sum)값이 main diagonal을 구성하는 Matrix. $(k+1<\ell<2k-1)$

B_l은 $-(B_o$의 row sum$+B_l$의 row sum)값이 main diagonal을 구성하는 matrix. $(\ell>2k)$

3.2 안정상태확률의 도출

각 상태(State)에 대응하는 안정상태확률(Steady-State Probability)은 다음과 같이 정의되며

$$
\overline{P}_{\ell}=\begin{cases}
\ell \leq k \qquad P(\ell, m, n) & \begin{cases} \ell = 0,\ 1,\ 2\cdots,\ k \\ m=0 \\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ \ell \end{cases} \\[2ex]
k+1 \leq \ell \leq 2k \quad P(\ell, m, n) & \begin{cases} \ell = k+1,\ k+2,\ k+3,\cdots,2k \\ m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ \ell - k \\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ k-m \end{cases} \\[2ex]
\ell \leqq 2k+1 \qquad P(\ell, m, n) & \begin{cases} \ell = 2k+1,\ 2k+2,\ 2k+3,\cdots \\ m=0,\ 1,\ 2,\cdots,k \\ n=0,\ 1,\ 2,\cdots,k-m \end{cases}
\end{cases}
$$

이 안정상태확률을 구하기 위한 안정상태방정식은 Markov 과정의 특성에 의해, 먼저 $\overline{P}_l G=\overline{0}$ 의 식을 통해 다음과 같이 유도된다.

$$
\left.\begin{aligned}
&\overline{P}_0 A_0+\overline{P}_1 F_1 &&= \overline{0}, && \ell = 0 \\
&\overline{P}_{\ell-1} E_{\ell}+\overline{P}_{\ell} A_{\ell}+\overline{P}_{\ell+1} F_{\ell+1} &&= \overline{0}, && 1 \leq \ell \leq k-1 \\
&\overline{P}_{K-1} E_K+\overline{P}_K A_K+\overline{P}_{K+1}\ \mathbb{C}_{K+1} &&= \overline{0}, && \ell = k \\
&\overline{P}_{\ell-1} D_{\ell}+\overline{P}_{\ell} A_{\ell}+\overline{P}_{\ell+1}\ \mathbb{C}_{\ell+1} &&= \overline{0}, && k+1 \leq \ell \leq 2k-1 \\
&\overline{P}_{2K-1} D_{2K}+\overline{P}_{2K} B_1+\overline{P}_{2K+1}\ B_2 &&= \overline{0}, && \ell = 2k
\end{aligned}\right\} \quad (3.1)
$$

$$
\overline{P}_{\ell-1} B_0+\overline{P}_{\ell} B_1+\overline{P}_{\ell+1}\ B_{2\ \ell} = \overline{0}, \qquad \ell \geq 2k+1 \qquad (3.2)
$$

위의 식을 이용하여 안정상태확률을 구하는 과정은 우선 (3.2)식을 통해 2차원적 Traffic Density인 R을 구하고, 이어 $\ell \geq 2k+1$인 경우의 안정상태확률,

$\overline{P}_l=\overline{P}_{2k} \cdot R^{l-k}$, $\ell=2k+1, 2k+2, 2k+3, \cdots$ (3.3)

으로 정의되는 식과 (3.1)식을 결합하여 $0 \leq \ell \leq 2k$일 때의 확률을 구한다. 마지막으로, $\ell \geq 2k+1$일 때의 확률은 앞에서 구해진 $\overline{P}_{2k}$와 (3.3)식을 통해 해를 얻는다.

3.2.1 R값의 계산

R값의 계산을 위해 (3.2)식에 Difference Equation의 특성방정식을 도입하면

$B_o+RB_1+R^2B_2=\overline{0}$

의 식이 된다. 이 식을 통한 R값의 해석적 유도는 특수한 경우 [6]를 제외하고는 불가능하다. 이 식은

$R=-R^2B_2B_1^{-1}-B_oB_1^{-1}$

로 변형되며, 수치해법의 반복법을 적용하여 R값을 계산한다. 다음은 그 절차이다.

$R_{l+1}=-R_l^2B_2B_1^{-1}-B_0B_1^{-1}$

i) $R_1=-B_oB_1^{-1}$

ii) 반복계산

$R_2=-R_1^2B_2B_1^{-1}-B_oB_1^{-1}$

$R_3=-R_2^2B_2B_1^{-1}-B_oB_1^{-1}$

⋮

iii) 만약 $R_{l+1}=R_l$이면, 멈추고 해는 $R=R_{l+1}$이 된다.

여기서, 고려되어야 할 사항은 반복계산 Algorithm의 수렴성에 대해 알아 보아야 한다. 이것은 행렬 R의 Spectral Radius가 1보다 작다는 것을 계산전에 보증해야 한다. 즉,

$SP(R)=\max \mid \alpha_i \mid < 1$

α_i는 R matrix의 eigenvalue 값이다.

Neuts[6]에 의하면 R의 수렴성 여부는 다음과 같다. 즉, $B=B_0+B_1+B_2$로 정의되며, 만약 Matrix B가 irreducible하면 $SP(R)<1$이 되는 필요 충분조건은

$\overline{\pi}B_2\overline{1} > \overline{\pi}B_0\overline{1}$

이다. 여기서 $\overline{1}$은 1의 요소를 가진 vector이고 $\overline{\pi}$는

$\overline{\pi}B=\overline{0}$

$\overline{\pi}\overline{1}=1$

을 만족하는 solution vector이다.

3.2.2 $0<\ell<2k$일 때의 $\overline{P}_\ell$값의 계산.

$\overline{P}_\ell(0<\ell<2k)$의 값은 (3.1)식과 다음의 식

$$\sum_{l=0}^{\infty} \overline{P}_l \overline{1} = 1$$

을 이용하여 구한다. 이 식은

$\overline{P}_0 \cdot \overline{1}+\overline{P}_1 \cdot \overline{1}+ \cdots +\overline{P}_{2k} \cdot \overline{1}+\overline{P}_{2k} \cdot R \cdot (I-R)^{-1} \cdot \overline{1}=1$(3.4)

의 식으로 변형되며, 윗식의 변형과정은 (3.3)식을 이용해서 $\ell=2k+1, 2k+2, 2k+3, \cdots$일 때의 $\overline{P}_\ell$의 값들을 치환하여 변형시킨 것이다. 또한 $(I-R)^{-1}=I+R+R^2+R^3+\cdots$은 R의 수렴함에 따라 당연히 정의된다.

한편, (3.1)식 중 $\ell=2k$일 때의 식은 (3.3)식에 의해

$\overline{P}_{2k-1}D_{2k}+\overline{P}_{2k}(B_1+R \cdot B_2)=\overline{0}$

으로 변형되며, 결과적으로 윗식으로 대치된 (3.1)식과, (3.4)식을 이용하여 해를 구하게 된다. 이 식들을 다시 정리하면 다음과 같다.

$$
\left.\begin{array}{lll}
\overline{P}_0 A_0 + \overline{P}_1 F_1 & = \overline{0}, & \ell = 0 \\
\overline{P}_{\ell-1} E_\ell + \overline{P}_\ell A_\ell + \overline{P}_{\ell+1} F_{\ell+1} & = \overline{0}, & 1 \le \ell \le k-1 \\
\overline{P}_{K-1} E_K + \overline{P}_K A_K + \overline{P}_{K+1} \mathbb{C}_{K+1} & = \overline{0}, & \ell = k \\
\overline{P}_{\ell-1} D_\ell + \overline{P}_\ell A_\ell + \overline{P}_{\ell+1} \mathbb{C}_{\ell+1} & = \overline{0}, & k+1 \le \ell \le 2k-1 \\
\overline{P}_{2K-1} D_{2K} + \overline{P}_{2K} (B_1 + R \cdot B_2) & = \overline{0}, & \ell = 2k
\end{array}\right\} \quad (3.5)
$$

$$
\sum_{\ell=0}^{2K} \overline{P}_\ell \cdot 1 + \overline{P}_{2K} \cdot R \cdot (I - R)^{-1} \cdot \overline{1} = 1 \quad (3.6)
$$

위의 식들이 가진 방정식의 갯수는 모두 $k(k+2)(k+4)/3+2$개가 되며, 구하고자 하는 확률값의 수는 $k(k+2)(k+4)/3+1$개가 된다. 따라서 (3.5)식 중에서 1개의 식을 제거하여 일차 연립방정식을 풀면 $0 < \ell < 2k$일 때의 $\overline{P}_\ell$값을 구할 수 있다.

본 논문에서는 계산과정의 효율을 위해 다음의 개선된 방법을 적용한다. (3.5)식에서 $\ell=0$일 때의 식을 제거하고 $\overline{PP}_0 = C \cdot \overline{P}_0$로 놓고, $\overline{PP}_0=1$을 대입하여 일차연립방정식을 계산한다.

$\overline{PP}_1 = C \cdot \overline{P}_\ell$ (3.7)

여기서 C는 미지의 상수이며 $\overline{PP}_{0=1}$을 대입하여 계산된 PP_ℓ은 다음의 식으로 정의된다. 따라서, 위의 값들은 (3.6)식이 변형된

$1+\overline{PP}_1 \cdot \overline{1} + \cdots + \overline{PP}_{2k} \cdot \overline{1} + \overline{PP}_{2k} \cdot R \cdot (I-R)^{-1} \cdot \overline{1} = C$

을 만족시킴으로써 상수 C는 계산되며, (3.7)식을 통해 고유의 확률값 $\overline{P}_\ell$들이 계산된다.

3.3 수행척도의 유도

3.3.1 형태2 고객의 손실 확률

System내에 있는 형태2 고객의 수가 서비스 제공자의 수와 같을때 System으로 들어오는 형태로 고객은 손실되므로 이 손실되는 확률(LS)은

i) $\ell \le k$ 일때 $P(k, o, k)$

ii) $k+1 \le \ell \le 2k$ 일때

$$
\sum_{l=k+1}^{2k} \sum_{m=0}^{l-k} \left[\sum_{n=0}^{K-m} P(l,m,n) - \sum_{n=0}^{K-m-1} P(l,m,n) \right]
$$

iii) $\ell \ge 2k+1$일 때의 확률은

$$
\sum_{l=2K+1}^{\infty} \sum_{m=0}^{k} \left[\sum_{n=0}^{K-m} P(l,m,n) - \sum_{n=0}^{K-m-1} P(l,m,n) \right]
$$

$$
= \sum_{m=0}^{k} \left[\sum_{n=0}^{k-m} \sum_{l=2K+1}^{\infty} P(l,m,n) - \sum_{n=0}^{k-m-1} \sum_{l=2K+1}^{\infty} P(l,m,n) \right] \quad (3.8)
$$

로 표현된다. 한편, (3.3)식으로부터

$$
\sum_{l=2K+1}^{\infty} \overline{P} = \overline{P}_{2K} \cdot R \cdot (I-R)^{-1} \quad (3.9)
$$

이 유도되며, 확률 vector $\overline{P}_{2k} \cdot R \cdot (I-R)^{-1}$를 상태공간을 나타내는 기호를 사용하면 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$
\hat{P}(2k, m, n) \quad 0 \le m \le k, \ 0 \le n \le k-m \quad (3.10)
$$

따라서 (3.8)식은

$$
\sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{n=0}^{K-m} \hat{P}(2k,m,n) - \sum_{n=0}^{K-m-1} \hat{P}(2k,m,n) \right]
$$

로 표현되어, LS는 다음과 같은 식으로 정리된다.

$$
LS = P(k,o,k) + \sum_{l=K+1}^{2K} \sum_{m=0}^{l=k} \left[\sum_{n=0}^{k-m} P(l,m,n) - \sum_{n=0}^{K-m-1} P(l,m,n) \right] + \sum_{m=0}^{K} \left[\sum_{n=0}^{k-m} \hat{P}(2k,m,n) - \sum_{n=0}^{k-m-1} \hat{P}(2k,m,n) \right]
$$

3.3.2 서비스 제공자의 Idle확률

서비스 제공자가 일이 없이 쉬게 되는 확률(ID)는 다음과 같다.

$$ID=\bar{P}_0\cdot\bar{1}+\frac{k-1}{k}\bar{P}\cdot\bar{1}+\frac{k-2}{k}\bar{P}_2\cdot\bar{1}+\frac{1}{k}\bar{P}_{K-1}\cdot\bar{1}$$

3.3.3 대기열에 대한 기대값

형태1 고객의 대기열의 길이에 대한 기대값 (Lg_1)은

ⅰ) $k+1\leq \ell \leq 2k$ 일때

$$\sum_{\ell=K+1}^{2K}\sum_{m=0}^{\ell-k}\sum_{n=0}^{k-m}(l-k-m)\cdot P(\ell, m, n)$$

ⅱ) $\ell \geq 2k+1$ 일때

$$\sum_{\ell=2K+1}^{\infty}\sum_{m=0}^{K}\sum_{n=0}^{k-m}(\ell-k-m)\cdot P(\ell, m, n)$$

$$\sum_{l=2K+1}^{\infty}\sum_{m=0}^{K}\sum_{n=0}^{k-m}\ell\cdot P(\ell, m, n)-\sum_{l=2K+1}^{\infty}\sum_{m=0}^{k}\sum_{n=0}^{m-k}K\cdot P(\ell, m, n)-\sum_{l=2K+1}^{\infty}\sum_{m=0}^{K}\sum_{n=0}^{k-m}mP(\ell, m, n) \quad (3.11)$$

으로 표현된다. (3.11)식의 우변의 첫째항은

$$\sum_{l=2K+1}^{\infty}\sum_{m=0}^{K}\sum_{n=0}^{k-m}\ell . P(\ell, m, n)$$

$$=\sum_{l=2K+1}^{\infty}\ell\cdot\bar{P}_{2K}\cdot R^{\ell-2K}.\bar{1}$$

$$=\bar{P}_{2K}\cdot R\sum_{S=0}^{\infty}(S+2K+1)R^{S}\cdot\bar{1}$$

$$=\bar{P}_{2K}\cdot R^2\cdot(I-R)^{-2}\cdot\bar{1}+(2k+1)\bar{P}_{2K}\cdot R\cdot(I-R)^{-1}\cdot\bar{1}$$

여기서 $(I-R)^{-2}$은 $(I-R)^{-1}\cdot(I-R)^{-1}$ 이다.

또한 (3.11)식 우변의 두번째항

$$\sum_{l=2K+1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{k-m}K\cdot P(\ell, m, n)$$

$$=K\sum_{\ell=2K+1}^{\infty}\bar{P}_{2K}\cdot R^{l-2K}\cdot\bar{1}$$

$$=K\cdot\bar{P}_{2K}\cdot R\cdot(I-R)^{-1}\cdot\bar{1}$$

마지막으로 우변의 세번째항

$$\sum_{l=2K+1}^{\infty}\sum_{m=0}^{k}\sum_{n=0}^{k-m}m\cdot P(\ell\cdot m, n)$$

$$=\sum_{m=0}^{k}\sum_{n=0}^{k-m}m\sum_{l=2k+1}^{\infty}P(\ell, m, n)$$

$$=\sum_{m=0}^{k}\sum_{n=0}^{K-m}m\hat{P}(2k, m, n) \quad (3.12)$$

여기서 $\hat{P}(2,m,n)$은 (3,9)식과 (3,10)식으로부터 정의된 것이다. 따라서 ⅰ)과 ⅱ)를 통해

$$L_{q1}=\sum_{l=K+1}^{2K}\sum_{m=0}^{l-K}\sum_{n=0}^{K-m}(\ell-k-m)\cdot P(\ell, m, n)+\bar{P}_{2K}\cdot R^2\cdot(I-R)^{-2}\cdot\bar{1}+(k+1)\bar{P}_{2K}\cdot R\cdot(I-R)^{-1}\cdot\bar{1}\sum_{m=0}^{K}\sum_{n=0}^{K-m}m\cdot\hat{P}(2k, m, n)$$

로 정리된다.

형태2 고객에 대한 대기열의 기대값(Lg_2)는

ⅰ) $k+1\leq \ell \leq 2k$ 일때

$$\sum_{\ell=K+1}^{2K}\sum_{m=0}^{\ell-K}\sum_{m=0}^{K-m}m\cdot P(\ell, m, n)$$

ⅱ) $\ell \geq 2k+1$ 일때 (3.12)식을 통해

$$\sum_{\ell=2v+1}^{\infty}\sum_{m=0}^{K}\sum_{m=0}^{K-m}m\cdot P(\ell, m, n)=\sum_{m=0}\sum_{n=0}^{K-m}m\cdot P(2k, m, n)$$

로 표현된다. 따라서,

$$L_{q_2}=\sum_{\ell=K+1}^{2K}\sum_{m=0}^{\ell-K}\sum_{n=0}^{k-m} m\cdot P(\ell,m,m)+\sum_{m=0}^{K}\sum_{n=0}^{K-m} m\cdot P(2k,m,m)$$

로 정리된다.

4. 수치 예

이 장은 앞에서 유도된 식을 이용하여, 서버가 2명인 경우의 각 State가 갖는 안정상태확률과 System의 수행척도의 수치 예를 제시한다.

$k=2$

$\lambda_1=5,\ \lambda_2=6,\ \mu_1=6,\ \mu_2=8.$

위의 수치를 대입한 B_0, B_1과 B_2는

$$B_0=\begin{bmatrix}5&0&0&6&0&0\\0&5&0&0&6&0\\0&0&5&0&0&0\\0&0&0&5&0&6\\0&0&0&0&5&0\\0&0&0&0&0&5\end{bmatrix}$$

$$B_1=\begin{bmatrix}-23&0&0&0&0&0\\0&-25&0&0&0&0\\0&0&-21&0&0&0\\0&0&0&-23&0&0\\0&0&0&0&-19&0\\0&0&0&0&0&-17\end{bmatrix}$$

$$B_2=\begin{bmatrix}12&0&0&0&0&0\\0&6&0&0&0&0\\0&16&0&0&0&0\\0&12&0&0&0&0\\0&8&6&0&0&0\\0&0&0&0&12&0\end{bmatrix}$$

과 같이 제시되며, R은 특성방정식 $B_0+RB_1+R^2B_2=\overline{0}$를 이용하여

$$R=\begin{bmatrix}0.242&0.054&0.000&0.261&0.058&0.000\\0.014&0.256&0.042&0.000&0.316&0.000\\0.000&0.306&0.238&0.000&0.000&0.000\\0.000&0.023&0.000&0.217&0.114&0.353\\0.000&0.022&0.020&0.000&0.263&0.000\\0.000&0.000&0.000&0.000&0.055&0.294\end{bmatrix}$$

의 값이 유도되며, 또한

$$(I-R)^{-1}=\begin{bmatrix}1.321&0.118&0.017&0.441&0.239&0.220\\0.025&1.369&0.090&0.008&0.590&0.000\\0.001&0.065&1.317&0.000&0.028&0.000\\0.001&0.047&0.009&1.278&0.266&0.639\\0.001&0.043&0.038&0.000&1.376&0.000\\0.000&0.003&0.003&0.000&0.106&1.417\end{bmatrix}$$

와 같다. 안정상태확률 $\bar{P}_\ell$은 (3.5)식과 (3.6)식에 의해

$\overline{P}_0=P_{000}=0.195$

$\overline{P}_1=(P_{100},\ P_{101})=(0.152,\ 0.138)$

$\overline{P}_2=(P_{200},\ P_{201},\ P_{202})=(0.062,\ 0.108,\ 0.050)$

$\overline{P}_3=(P_{300},\ P_{301},\ P_{302},\ P_{301},\ P_{311})$

$=(0.026,\ 0.046,\ 0.020,\ 0.016,\ 0.038)$

$\overline{P}_4=(P_{400},\ P_{401},\ P_{402},\ P_{410},\ P_{411},\ P_{420})$

$=(0.009,\ 0.021,\ 0.009,\ 0.010,\ 0.028,\ 0.006)$

의 값이 구하여 지며 $\ell\geq 5$일때 $\overline{P}_\ell$는 (3.3)식

$$\overline{P}_\ell=\overline{P}_4\cdot R^{\ell-4}$$

에 의해 계산될 수 있다.

System의 수행척도를 구하기 위해

$$\sum_{\ell=5}^{\infty}\overline{P}_\ell=\overline{P}_4\cdot R\cdot(I-R)^{-1}=(\hat{P}_{400},\ \hat{P}_{401},\ \hat{P}_{402},\ \hat{P}_{410},\ \hat{P}_{411},\ \hat{P}_{420})$$

$=(0.004,\ 0.011,\ 0.006,\ 0.007,\ 0.028,\ 0.011)$

$$\overline{P}_4\cdot R^2\cdot(I-R)^{-2}=(\widetilde{P}_{400},\ \widetilde{P}_{401},\ \widetilde{P}_{402},\ \widetilde{P}_{410},\ \widetilde{P}_{411},\ P_{420})$$

$=(0.029,\ 0.093,\ 0.110,\ 0.006,\ 0.033,\ 0.012)$

의 값들이 계산되며, 위 값들과 P_ℓ의 값을 이용하여 고객2의 손실확률, 서버의 idle확률 및 고객1과 고객2의 대기열의 평균값들이 다음과 같이 계산된다.

$$
\begin{aligned}
LS = & P_{202}+(P_{302}+P_{311})+(P_{402}+P_{411}+P_{420}) \\
& +(\hat{P}_{402}+\hat{P}_{411}+\hat{P}_{420}) \\
& =0.196
\end{aligned}
$$

$$
ID=P_{000}+\frac{1}{2}(P_{100}+P_{101})=0.339
$$

$$
\begin{aligned}
Lg_1 = & 0\cdot(P_{310}+P_{311}+P_{420}-\hat{P}_{400}-\hat{P}_{401}- \\
& \hat{P}_{402})+1\cdot(P_{300}+P_{301}+P_{302}+P_{410}+P_{411} \\
& -\hat{P}_{410}-\hat{P}_{411})+2\cdot(P_{400}+P_{401}+P_{402}- \\
& \hat{P}_{420}+3\cdot(\hat{P}_{400}+\hat{P}_{401}+\hat{P}_{402}+\hat{P}_{410}+\hat{P}_{411}+ \\
& \hat{P}_{420})+(\widetilde{P}_{400}+\widetilde{P}_{401}+\widetilde{P}_{402}+\widetilde{P}_{410}+\widetilde{P}_{411}+ \\
& \widetilde{P}_{420}) \\
& =0.635
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Lg_2 = & 0\cdot(P_{300}+P_{301}+P_{302}+P_{400}+P_{401}+P_{402} \\
& +\hat{P}_{400}+\hat{P}_{401}+\hat{P}_{402})+1\cdot(P_{310}+P_{311}+ \\
& P_{410}+P_{411}+\hat{P}_{410}+\hat{P}_{411})+2\cdot(P_{420}+\hat{P}_{420}) \\
& =0.161
\end{aligned}
$$

5. 결 론

본 연구는 서어비스를 요청하는 고객이 두가지 형태로 도착이 이루어져 한 유형의 고객은 아무 제한없이 대기가 가능하며 다른 유형의 고객은 서어비스 설비의 상태에 따라 제한적으로 대기가 가능한 대기행렬 모형에 대해 다루었다. 제시된 모형은 현실적으로 많이 나타날 수 있는 형태로서 Matrix Geometric Theory의 개념을 통해 비교적 간단히 안정상태확률과 필요한 수행척도를 유도하였다. 또한, 많은 차원의 Matrix를 다루는 과정에서 흔히 볼 수 있는 실제 해를 구하는 계산과정에서의 round-off error를 방지하기 위해 개선된 방법이 도입되었으며, 따라서 유도된 해법을 실제 현상에 적용해 볼 때 서어비스 제공자의 수가 굉장히 많이 수반되지 않는다면 Computer Pogram을 통해 간단히 해결되리라고 본다.

한편, Nonpreemtive Priority Queue의 관점에서 볼 때 Multichannel 서어비스 제공자의 경우, Priority가 다른 고객간에 평균서어비스 시간이 다를 때는 기존의 Generating function등을 적용하는 방법으로는 모델 해석에 대한 접근이 불가능했다. 본 연구에서는 특수한 경우이기는 하나 Priority간의 다른 서어비스 시간을 가진 Multichannel Queueing 문제를 다루었으며 이것은 앞으로 이 분야의 계속적인 연구에 기여할 수 있으리라 생각된다.

Reference

1. 김성식, "A Matrix Method for the Analysis of Two-Dimensional Markovian Queues". 대한산업공학회지. 제 8 권, pp. 15~21, 1982.
2. Bhat, U.N. and Fisher, M.J., "Multichannel Queueing Systems with Heterogenious Classes of Arrivals", Nav. Res. Logist. Quart. Vol, 23, pp. 271–282, 1976.
3. Burden, R.L., Faires, J.D. and Reynolds, A.C., Numerical Analysis, Second edition, Prindle Weger & Schmidt, 1981.
4. Green, L., "A Queueing System with General-Use and Limited-Use Servers", Oper. Res. Vol. 33, pp. 168–182, 1985.
5. Gross. D. and harris. C.M., Fucdamentals of Queueing Theory, John wiley & Sons, Inc., 1974.
6. Neuts, M.F., Matrix Geometric Solutions in Stochastic Models–An Algorithmic Apprach, The Johns Hopkins university Press Baltimore and Londan, 1981.
7. Snyder, P.M. and Stewort, W.J., "Explicit and Iterative Numerical Approaches to Solving Queueing Models". Oper. Res. Vol. 33, pp. 183–202, 1985.
8. Tsukasa Sato and Masso Mori, "An Application of the Lumping Method to a Loss System with two types of Customers". Jour. of Oper. Res. Society of Japan, Vol.26, pp. 51–59, 1983.