〈研究論文〉

Journal of the Korean Institute
of Industrial Engineers
Vol. 14, No. 2, Dec. 1988

柔軟生産 시스템(FMS: Flexible Manufacturing Systems)의 용량확충을 위한 이산적 최적 제어 모델†
(A Discrete Optimal Control Model for Capacity Expansion Planning of FMS)

朴 泰 亨*
金 勝 權*
金 成 寅*
姜 錫 顯*

Abstract

As flexible manufacturing technology has become available across a broad range of applications, an increasingly large number of firms have confronted decisions about when to adopt the FMS technology and the size of FMS at that time. For small to medium size firms that should invest under budget limitation and high investment risk, proper size of FMS adoption at proper time is very important. In this paper the discrete optimal control theory has been used to make decisions about the size and timing of FMS capacity expansion over a planning period. Sensitivity analysis is presented for analysing the behavior of the model to variations of model parameters.

Ⅰ. 序 論

FMS와 같은 자동화 기술의 도입이 요청되는 기업들 가운데, 대부분을 차지하는 것은 중소기업들이다. 대기업의 경우에는 장래 수요의 증가에 대처하기 위해 막대한 초기 투자비가 드는 생산성이 높고, 유연성이 높은 FMS나 컴퓨터 통합 생산(CIM : Computer Integrated Manufacturing)을 비교적 쉽게 구축할 수 있지만, 중소기업에서는 자본의 제약과 그에 따른 투자 위험이 크므로 확실한 전망이 서지 않는 한 FMS의 도입을 추진하기가 쉽지 않다. 그러므로 모듈별로 자동화를 도입하는 점진적인 자동화나 순차적인 생산용량 증가를 꾀하는 것이 안전하다 하겠다. 그렇지만 언제, 어느 정도의 생산용량을 확장해야 하는지를 결정하기 위해서는 장래에 예상되는 기술 혁신의 정도, 규모의 경제에서 기인하는 이익과 용량 확장에 필요한 초기 투자비,

* 高麗大學校 工科大學 産業工學科

† 본 硏究는 韓國科學財團의 目的基礎硏究 支援에 의하여 수행되었음.

작업자의 재교육, 작업의 중단 등에 따른 비용사이의 이점을 저울질(trade-off)해서 결정해야 한다. 또한 기업이 경쟁력을 확보하기 위해서는 언제나 고객의 수요에 신속하게 반응해야 한다. 만일 용량 부족으로 인한 손실이 발생하게 되면 종국에는 단순한 수입의 감소뿐만 아니라 소비자에 대한 공신력의 감소와 그에 따른 경쟁력 약화에 이르게 된다. 반면에 수요에 비하여 과다한 설비용량을 갖출 경우에는 유휴 설비에 투자된 자본의 손실과 지나친 생산으로 인한 재고 비용이 발생한다. 따라서 장래의 수요를 최대한 충족시키면서 언제 어떤 크기의 용량을 갖는 설비를 설치해야 하는지 결정할 수 있는 중장기 계획의 수립은 대단히 중요하다. 수립된 중장기 계획에 따라 비용을 최소화하는 최적 FMS의 구성은 설치 가능한 여러 가지 대안들을 만들어 그 중에서 시스템 생산자나 기업내의 정보에 근거하여 가장 경제적인 대안을 선정함으로써 가능하다 [김성인(1988) 등].

본 연구에서는 FMS의 도입을 고려할 경우 FMS의 최적 용량확충 문제를 고찰하고자 한다. 그 첫번째 단계로 가중요인 점수산정 모델을 이용하여 FMS투자 대안의 전략적 효과 및 단점들을 먼저 파악하고, 그 다음 단계에서는 투자결정 시스템에 대한 계획기간 동안의 용량확충 시기 및 규모를 결정하도록 한다. 최근에 나온 FMS의 용량확충 분석을 위한 수학적 모델로는 Gaimon(1985a, 1985b, 1986), Burnstein(1986)등의 것이 있다. Gaimon(1986)은 충격 제어 문제(Impulsive Control Problem)를 구성하여, 수동설비 용량의 변화를 고려한 자동화 설비의 투자시기를 결정하였다. 이 모델에서는 장래에 예상되는 전문인력의 부족과 그에 따른 생산의 어려움에 대비한 자동화 일정을 보여 주고 있다. Burnstein(1986)의 모델은 유연생산 시스템과 재래 시스템의 보유용량 비율을 결정하기 위한 것으로서 유연생산 시스템 도입의 모듈 특성이 나타나 있다. FMS처럼 장래에는 그 설치 비용이 점점 낮아질 것으로 예상되는, 즉 기술혁신이 기대되는 경우를 고려한 용량확충 모델로는 Hinomoto(1965)와 Jascold-Gabszewicz 와 Vial(1972)이 개발한 것이 있다. 그리고 Luss(1982), Erlenkotter(1981)는 용량확충 문제 일반에 대한 것을 다루고 있다.

Ⅱ. FMS의 용량확충 모델

시간을 일정한 시점들인 $t=0, 1, \cdots, T$로 나눈다. 시점 t에 발생하는 수요 D(t)는 계획기간 동안 전반적으로 증가하나 약간 감소하는 구간이 발생하기도 한다. 시점 t와 t−1 사이의 수요증가를 D_t라 하면 D_t는 음의 값을 가질 수도 있다. 하지만 계획기간 전체를 살펴볼 때 일정한 양의 수요증가추세가 나타나야 한다.

$$\sum_{t=0}^{T} D_t > 0 \tag{2.1}$$

의사결정 변수 v는 시점 t에서 확충시킬 용량의 크기를 나타내는 T개의 변수의 수열(v_0, v_1, $\cdots$, v_{T-1})로서 설비용량확충 계획이라 부른다. 변수 z_t는 시점 t에서의 수요량에 대한 설비용량의 초과량을 나타낸다(양, 음, 영의 값을 가질 수 있다). z_t를 v_t와 D_t로 나타내면 아래와 같다.

$$z_0 = 0 \tag{2.2}$$

$$z_t = \sum_{j=0}^{t} (v_j - D_j) \quad (t=1, 2, \cdots, T). \tag{2.3}$$

가능한 설비용량확충 계획(feasible capacity expansion schedule) v는 아래 식을 만족한다.

$$v \geq 0 \tag{2.4}$$

$$z_T = 0 \tag{2.5}$$

C(v)를 설비용량확충 계획 v와 관련된 총 비용이라 하자. 함수 C(v)는 계획기간 초기의 현가로

환산되어진 비용이다. 시점 t에서 발생하는 비용 요인을 크게 두가지로 구분한다. 첫번째 비용요인은 용량확충에 드는 투자비용으로서, 시점 t에 세우는 설비용량 v의 함수로서 나타나며 이 비용요인을 $C_t(v_t)$로 나타낸다. 두번째 비용요인은 설비용량의 초과량 z_t에 비례하는 비용으로서 시점 t의 수요량 D(t)보다 설비용량이 크거나 혹은 모자라는 경우에 비용(penalty cost)이 발생한다고 가정하는 것이다. 이것을 $p_t(z_t)$로 나타낸다. 그러므로 총비용 C(v)는 아래와 같다.

$$C(v) = \sum_{t=0}^{T} C_t(v_t) + \sum_{t=0}^{T} p_t(z_t) \qquad (2.6)$$

시점 t에 발생하는 설비용량확충 비용 C(·)는 오목 함수(concave function)라 가정한다. 투자비용 C(·)를 나타내는데 일반적으로 사용되는 오목 함수의 형태는 다음과 같다.

i) $C_t(v_t) = A + B \cdot v_t$: v_t 규모의 용량확충을 할 때에는 고정비 A와 규모 v_t에 선형으로 비례하는 변동비 $B \cdot v_t$가 발생한다고 가정한다.

ii) $C_t(v_t) = k(v_t)^a$ $(0 < a < 1)$: 설비 투자비용에 나타나는 규모의 경제(economies-of-scale) 효과를 나타내는데 사용하는 멱함수(power function) 형태로서 a가 0에 가까와 질수록 규모의 경제효과가 나타난다.

iii) $C(v) = k(v_t)^a$ $(0 < a < 1)$, $v \leqq 1$인 경우

$= k + b(v_t - 1.0)$ $(0 \leqq b \leqq ak)$, $v > 1$인 경우

이 함수는 ii)의 멱함수의 변형으로서, v_t가 1보다 클 때에는 설비확충규모 v_t에 선형으로 비례한다.

시점 t에 발생하는 두번째 비용요인 $p_t(z_t)$는 구분적 오목(piecewise concave)함수라 가정하고 $z_t > 0$이면 $p_t(z_t)$는 과도설비보유비용(overcapacity penalty cost)을 나타내고, $z_t < 0$이면 단기수입비용(temporary import penalty cost)을 나타낸다.

2.1 $D_t \geqq 0$ (t = 1, 2, ⋯, T)일 때

이 경우에는 수요량 D(t)가 비감소함수로서 Manne와 Veinott, Jr.(1967)의 모형과 일치한다. V를 가능한 설비용량확충계획 v의 집합이라 하자. (2.2)에서 (2.5)를 살펴보면 V는 폐쇄 한계 볼록 집합(a closed, bounded convex set)임을 알 수 있다. Manne와 Veinott, Jr.(1967)은 폐쇄 한계 볼록 집합에서의 구분적 오목 함수 최소화 문제에 대한 Zangwill(1967)의 결과를 이용하여 최적 설비용량확충 계획 v의 특징을 아래의 정리로 요약하였다.

먼저, 용량확충계획 v의 회기점(point of regeneration)은 $z_t = 0$이 되는 시점 t를 말한다. 가능한 설비용량확충 계획 v는 반드시 시점 0와 시점 T에서 회기점이 생긴다((2.2), (2.5)). 설비용량확충이 일어나는 기간 중에 회기점이 있을 경우 용량확충계획 v는 회기점 특성(regeneration point property)을 갖는다고 말한다. 즉 $i < k$이고

$$v_i > 0 \,;\, v_{i+1} = v_{i+2} = \cdots = v_{k-1} = 0 \,;\, v_k > 0$$

이면 회기점이 되는 t, $i+1 \leqq t \leqq k-1$,가 존재하므로 회기점 특성을 갖는다고 말한다. 아래와 같이 정의되는 V의 볼록 부분집합(convex subset)을 기본 집합(basic set)이라 부른다.

$$V_{i_1 \ldots i_{T-1}} = \{v \mid v \in V,\ (-1)^{i_t}(z_t) \geqq 0,\ t = 1, 2, \cdots, T-1\}$$

여기에서 첨자 i_t는 0이거나 +1이다. 계획기간이 T인 경우, 2^{T-1}개의 기본 집합이 생긴다.

보조정리 1

최적 설비용량확충 계획 v는 어떤 기본 집합의 극점(extreme point)에 해당한다.

보조정리 2

각 기본 집합의 각각의 극점은 회기점 특성을 갖는다.

보조정리 3

용량부족(backlogging)을 허용하지 않는 경우

에, 가능한 설비용량확충 계획 v가 회기점 특성을 갖고 있고, 두개의 회기점이 시점 i와 시점 k에서 생기면,

$$v_{i+1} = \sum_{t=i+1}^{k} D_t$$

$$v_t = 0 \ (t = i+2, \cdots, k) \quad (2.\ 8)$$

을 만족한다.

위의보조정리3으로부터,단기수입(temporary import)을 0이라 하고, 가능한 설비용량확충 계획 v가 회기점 특성을 갖는다면 v를 그의 회기점과 두개의 회기점 사이의 수요 증가량으로부터 쉽게 구할 수 있다.

Manne와 Veinott, Jr.(1967)은 계산절차를 용이하게 보여 주기 위하여 원래의 문제를 비순환 네트워크(a cyclic network)를 통과하는 최단경로문제(shortest route problem)로 대체하였다. 각 회기점을 비순환 네트워크의 점이라 하고 이 때 두 개의 회기점 사이에 발생하는 설비투자비용

$$C_{ik} = \sum_{t=i+1}^{k} C_t(v_t) + \sum_{t=i+1}^{k} p_t(z_t) \quad (2.\ 9)$$

여기에서 $z_t \geqq 0$

은 호의 길이가 된다. 그렇지만 위의 최단경로문제 구성(shortest route problem formulation)은 원래의 총비용함수

$$C(v) = \sum_{t=1}^{T} C_t(v_t) + \sum_{t=1}^{T} p_t(z_t) \quad (2.\ 10)$$

로부터 직접 역방향 구성(backward formulation)한 동적 계획법과 동일한 계산량을 필요로 한다.

$$I(x(t),\ t) = \min_{\substack{v_j \\ j=t,\cdots,T}} \left[\sum_{j=t}^{T} C_j(v_j) + \sum_{j=t}^{T} p_j(z_j)\right] \quad (2.\ 11)$$

이면, $j=t,\cdots,T$

$$I(x(t),\ t) = \min\left[C_t(v_t) + p_t(z_t) + I(x(t+1),\ t+1)\right] \quad (2.\ 12)$$

$$I(x(T),\ T) = 0$$

여기에서

$$x(t) = \sum_{j=1}^{t} v_j$$

$$x(t+1) = x(t) + v_t \quad (2.\ 13)$$

이다.

역방향 동적 계획법에서의 상태변수(state variable) x(t)는 다음과 같은 이산값

$$S = \{D_1,\ D_1 + D_2,\ \cdots,\ D_1 + D_2 + \cdots + D_T\}$$

와 계획기간 T의 적집합(S × T)에서 가능(feasible)하다. $z_T = 0$ 이므로 D(T)에서 D(0)로 일반적인 역방향 동적 계획법 절차를 밟아가면 최적해를 구할 수 있다.

용량부족이 허용되는 경우에는 보조정리 3을 적용할 수 없으므로 호의 길이 C_{ik}를 다음과 같이 구한다.

$$C^j_{ik} = C_j\left(\sum_{t=i+1}^{k} D_t\right) + \sum_{t=i+1}^{j-1} p_t\left(\sum_{\tau=i+1}^{t} D_\tau\right)$$

$$+ \sum_{t=j}^{k} p_t\left(\sum_{t=i+1}^{k} D_t - \sum_{\tau=i+1}^{t} D_\tau\right) \quad (2.\ 14)$$

$$(i+1 \leqq j \leqq k)$$

여기에서 우변의 세번째 항은 단기수입비용, 네번째 항은 과도 설비 보유비용을 나타낸다. 용량확충이 일어나는 시기 j는 기간 [i, k] 동안의 비용을 최소화하는 시점으로 한다. 즉,

$$C_{ik} = \min_{i+1 \leqq j \leqq k} C^j_{ik} \quad (2.\ 15)$$

이 되는 시점이다.

2.2 $D_t < 0$을 허용하는 경우 ($\sum_{t=0}^{t} D_t > 0$)

Manne(1961), Manne와 Veinott, Jr.(1967)의 용량확충모형은 재고모형(inventory model)을 이용하여 최적 투자시기(재고모형에서는 주문시점)와 투자규모(주문량)를 결정한다. 재고모형의 수요량 ζ_t는 용량확충모형에서는 시점 t와 시점 t

−1 사이의 수요량 증가 D_t에 해당한다. Manne (1961)이 이용하는 Whitin(1957)의 모형이나, Manne와 Veinott, Jr.(1967)이 이용하는 Zangwill(1965)의 모형에서는 수요량 ζ_t가 항상 비음이어야 하므로 설비용량확충 모형에서 수요량의 감소($D_t < 0$)와 같은 현상을 모형화할 수 없다.

그림 2−1에서 보면 구간 $[t_1, t_2]$에서는 수요의 점진적인 감소가 이루어지고, 이 구간에 대해서는 재고모형과의 사이에 유사성이 없다. 그러므로 Manne와 Veinott, Jr.(1967)의 모형에서는 수요량의 함수를 임의의 증가함수(arbitrary increasing function)로 가정하였다. $D_t<0$을 허용할 경우에는 한번 세운 설비용량은 시간에 따라 불변이고, 수요가 감소할 때에는 새로운 투자를 할 필요가 없으므로(overcapacity penalty) 지금의 설비용량과 수요량이 같아지는 시점까지 투자시기를 늦출 필요가 생긴다. $z_i = 0$, $z_k = 0$이라 할 때 $\sum_{t=i+1}^{k} D_t$ 규모의 설비를 시점 $t\,(i+1 \leqq t \leqq k-1)$에 세웠다면, 그 다음에 수요를 만족시키기 위하여 세워야 하는 투자시점은 다음과 같다.

$$\{t' \mid D(t') \geqq D(k),\ t' \geqq k+1\}$$

그림 2−1에서 보면 가능한 회기점은 구간 $[t_1, t_2]$를 제외한 구간에서 발생하며, 각 회기점에 대하여 가능한 다음 회기점은 시점 a의 경우에는 b, c, d, e, f가 모두 가능하지만, 시점 c의 경우에는 시점 e, f만 가능함을 알 수 있다.

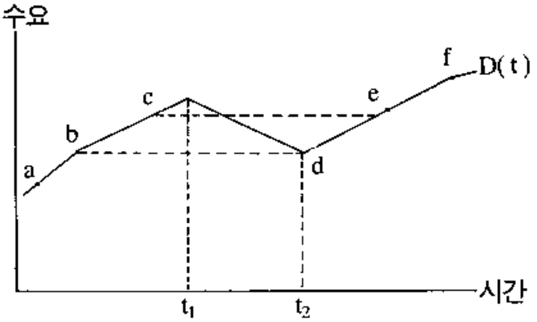

그림 2−1. 비단조 증가 수요 함수.

용량부족을 허용하지 않는 경우에는 먼저, 기존의 수요함수 D(t)로부터 새로운 수요함수 D′(t)를 구성한다.

$$
\begin{aligned}
D'(0) &= D(0) \\
D'(t+1) &= D(t+1),\ D(t+1) \geqq D'(t)\text{인 경우} \\
&\quad\ D'(t),\ \ D(t+1) < D'(t)\text{인 경우}
\end{aligned}
\qquad (2.\ 16)
$$

위의 수요함수 D′(t)는 임의의 증가함수이므로, 2.1절의 결과를 이용하여 용량확충계획 v를 결정한다.

용량부족을 허용하는 경우에는 다음과 같은 조건을 만족하는 두개의 시점 t_i, $t_k(i<k)$가 가능한 한 쌍의 회기점(t_i, t_k)를 형성한다.

조건 1

시점 $t_i(i=1, 2, \cdots, M)$는 수요가 증가하는 구간에 있어야 한다(수요증가 구간의 양 극점을 포함하여). 즉,

$$
\begin{aligned}
t \in \{&s,\ s+1,\ \cdots,\ t \mid D(s) \leqq D(s+1) \leqq \cdots \\
&\leqq D\ (t),\ s<t,\ \forall s,\ t \in [0,\ T]\} \\
&(i=1,\ 2,\ \cdots,\ M)
\end{aligned}
\qquad (2.\ 17)
$$

조건 2

조건 1을 만족하는 t_i, $t_k(i<k)$에 대하여 시점 t_k는 수요량 $D(t_k)$가 시점 t_i의 수요량 $D(t_i)$보다 많은 시점이 되어야 한다.

$$\{t_k \mid D(t_k) \geqq D(t_i),\ k>i\} \qquad (2.\ 18)$$

각 가능한(t_i, t_k)에 대하여 (2. 14)의 C^{j}_{ik}와 유사한 $C^{t_j}_{t_i t_k}$를 다음과 같이 정의한다.

$$
\begin{aligned}
C^{t_j}_{t_i t_k} = C^{-}_{t_j}\,&\Big(\sum_{t=t_j+1}^{t_k} D_t + \sum_{t=t_i+1}^{t_j-1} p_t \Big(\sum_{\tau=t_i+1}^{t} D_\tau\Big) \\
&+ \sum_{t=t_j-1}^{t_k} p_t - \Big(\sum_{t=t_j+1}^{t_k} D_t - \sum_{\tau=t_i+1}^{t_k} D_\tau\Big) \\
&(i+1 \leqq j \leqq k)
\end{aligned}
\qquad (2.\ 19)
$$

용량확충이 일어나는 시기 t_j는 기간 $[t_i, t_k]$ 동안의 비용을 최소화하는 시점으로 한다. 즉,

$$C_{t_i t_j t_k} = \min_{i+1 \le j \le k} C^j_{t_i t_k} \qquad (2.\ 20)$$

이 되는 시점이다.

t_i, t_k를 각각 비순환 네트워크의 두 개의 점으로 가정하고 $C_{t_i t_k}$는 두개의 점 사이의 거리(length)로 가정하면 2.1절의 최단경로문제의 해법인 역방향 동적 계획법으로 풀 수 있다.

2.3 이산적 최적 제어 문제와의 관계

이산적 최적 제어 모형은 다음과 같은 문제 형태에 적용하기가 용이하다.

"특정한 시스템을 어떤 상태(state)에서 운영하길 원하고 동시에 그 상태와 시스템의 실제 상태 사이에 차이가 생기면 비용이 발생하는 경우를 고려하자. 만약에 시스템을 특정한 상태로 전환하고자 할 때에는 이러한 변화를 일으키게 하는데 필요한 노력(control)에 비례하는 추가비용이 발생한다[Bellman과 Dreyfus(1962)]."

일반적인 수요함수를 갖는 경우 용량확충 모형에 이용할 이산적 최적 제어 모형은 다음과 같다.

$$\text{minimize } J = \sum_{t=0}^{T-1} [p[x(t), D(t)] + f(u, t) + qx(t)]e^{-rt} - wx(T)e^{-rT} \qquad (2.\ 21)$$

제약식은

$$\sum_{t=0}^{T-1} f(u, t)e^{-rt} \le B \qquad (2.\ 22)$$

$$0 \le u(t) \le H(t) \qquad (2.\ 23)$$

$$x(t) \ge 0 \qquad (2.\ 24)$$

$$x(0) = c \qquad (2.\ 25)$$

$$x(T) = D(T) \qquad (2.\ 26)$$

이고,

상태 변환 방정식은 아래와 같다.

$$x(t+1) = x(t) + u(t),\ t = 0,\ 1,\ \cdots,\ T-1 \qquad (2.\ 27)$$

여기서 t는 계획기간 중의 단위시간으로서 일년 또는 한 달을 의미하며 수요에 따른 생산은 동시에 할 수 있으며 제품 수요는 총체적인 수요 D(t)로 표시할 수 있는 것으로 가정한다.

- x(t) : 시점 t에서의 설비의 생산 용량 (state variable)
- D(t) : 시점 t에서의 수요량(exogenous variable)
- f(u, t) : 생산 용량 확충에 드는 투자비용(set-up cost)으로 오목 함수이며 함수의 형태는 아래와 같다.

  $$f(u, t) = k[u(t)]^a \ (0 \le a \le 1)$$

  여기서, a = 1이면 규모의 경제가 없는 선형 함수가 되며, a가 0에 가까와 질수록 규모의 경제효과가 나타남.
- u(t) : 시점 t에서의 설비 용량확충 규모 (control variable)
- B : [0, T]에서의 예산 한계(exogenous variable)
- $p[x(t), D(t)] = p_1 \cdot \text{Max}[x(t) - D(t), 0] + p_2 \cdot \text{Max}[D(t) - x(t), 0]$

  여기에서
  - p_1 : 과도설비 보유비용, $x(t) < D(t)$인 경우
  - p_2 : 부족설비 보유비용, $x(t) > D(t)$인 경우
- H(t) : 시점 t에서의 제어 변수 u(t)의 상한
- c : 초기 생산 용량
- r : 할인율($0 \le r \le 1$)
- w : 종료 시점 T에서의 제품생산용량 한 단위에 대한 잔존가치
- q : 운영비. 생산용량 한 단위에 대한 운영비는 생산용량에 대하여 비례한다고 가정하였다.

위의 이산적 최적 제어 모형은 초기조건과 계획기간 말의 조건이 주어진 형태이므로 역방향 동적 계획법으로 모형화가 가능하다. 그렇지만 제어변수 u(t)에 대한 예산상한 제약식(2.22)이 단순한 $1 \leq u(t) \leq b$(1, b는 상수) 형태의 제약식이 아니므로 Everett의 승수(Lagrangian multiplier)를 도입하여 원 문제를 Lagrangian으로 바꾼다. 원 문제의 목적함수(2.21)와 제약식(2.22)을 결합하여 Lagrangian 으로 바꾸면 다음과 같다.

$$L(u, \lambda) = \sum_{t=0}^{T-1} [p[x(t), D(t)] + f(u, t) + qx(t)]e^{-rt} + \lambda[\sum_{t=0}^{T-1} f(u, t)e^{-rt} - B] - wx(T)e^{-rT}$$

$$= \sum_{t=0}^{T-1} [p[x(t), D(t)] + f(u, t) + \lambda f(u, t) + qx(t)]e^{-rt} - wx(T)e^{-rT} - \lambda B \quad (2.28)$$

조건 (2.23)~(2.27) 하에서.

Everett의 정리에 의하면 [Everett(1963), Lasdon(1970)], 식(2.23)~(2.27), (2.28)의 최적해 $u^*(t, \lambda)$는 원 문제의 목적함수(2.21)와 (2.22)의 변형된 제약식

$$\sum_{t=0}^{T-1} f(u, t)e^{-rt} - B \leq y(u^*(t, \lambda)) \quad (2.29)$$

여기에서

$\lambda > 0$이면,

$$y(u^*(t, \lambda)) = \sum_{t=0}^{T-1} f(u^*(t, \lambda), t)e^{-rt}$$

$\lambda = 0$ 이면,

$$y(u^*(t, \lambda)) \geq \sum_{t=0}^{T-1} f(u^*(t, \lambda), t)e^{-rt}$$

과 나머지 제약식(2.23) ~ (2.27)으로 구성된 수정된 원문제(modified primal)의 최적해이다. 그렇지만, u(t)가 이산값을 가지므로 여기서는 $y(u^*(t, \lambda))$가 0에 가까운 $u^*(t, \lambda)$를 구하도록 한다.

역방향 동적 계획법으로 풀기 위한 순환식(recurrence equation)은 다음과 같다.

먼저 최소 비용 함수 I(x(t), t)를 다음과 같이 정의한다.

$$I(x(t), t) = \min_{u(j)} \{\sum_{j=t}^{T-1} [p[x(j), D(j)] + f(u, j) + \lambda f(u, j)] + qx(j)]e^{-rj}\} \quad (2.30)$$

최소 비용 함수 I(x(t), t)는 제어 과정에 대해 시점 t에서 시점 T까지 가능한 제어(admissible control) u(j) ($t \leq j \leq T$)를 적용한 경우에 얻을 수 있는 최소 비용을 나타낸다. 이때 최종적인 순환식은 다음과 같다.

$$I(x(t), t) = \min_{u} \{[p[x(t), D(t)] + f(u, t) + \lambda f(u, t) + qx(t)]e^{-rt} + I(x(t+1), t+1)\} \quad (2.31)$$

식(2.28)에서의 마지막 두 개의 항은 상수이므로 최적해에 영향을 끼치지 않는다. 위의 동적 계획법에서 상태변수 x(t)는 다음과 같은 집합 S

$$S = \{D_1, D_1 + D_2, \cdots, D_1 + D_2 + \cdots + D_T\}$$

와 시간의 집합 T의 적집합($S \times T$)에서 가능한 값을 갖는다.

위의 동적 계획법 모형에서 상태변수 x(t)가 갖을 수 있는 두 개의 가능한 상태를 x(i), x(k), $i<k$,라 하고 x(i)에서 x(k)로 변환하기 위해 제어 u(i), u(i+1), …, u(k−1)가 차례로 적용되었다. 이 때 발생하는 모든 비용을 C_{ik}라 하자. 2.1, 2.2절에서와 같이 x(i), x(k)를 비순환 네트워크의 두 개의 마디라 가정하고 C_{ik}를 두 마디 사이의 길이라 가정하면, 위의 동적 계획법 모형 역시 최단경로문제(shortest route problem)로 바꿀 수 있다. 2.1절의 모형과 이산적 최적 제어

모형과의 관계를 보다 정확하게 알기 위해 2.1절에서 사용한 $C_t(v_t)$, $p_t(z_t)$로 식 (2.31)을 나타내면 다음과 같다.

$$C_t(v_t) = [f(v, t) + \lambda f(v, t) + qx(t)]e^{-rt}$$

$$t = 0, 1, \cdots, T-1,$$

$$p_t(z_t) = p[x(t), D(t)]$$

여기에서,

$$v_t = u(t),$$

$$x(t) = \sum_{j=0}^{t} v_j + c,$$

$$z_t = \sum_{j=0}^{t} (v_j - D_j)$$

$$= \sum_{j=0}^{t} v_j - \sum_{j=0}^{t} D_j$$

$$= x(t) - D(t) \qquad \text{이다.}$$

Ⅲ. 예 제

정식화된 모델의 타당성을 검토하기 위하여 모델변수(parameter)들을 변화시켜 감도분석(sensitivity analysis)을 수행한다. 이 감도분석에서는 생산설비 용량확충에 드는 투자비용에 있어 장래의 기대되는 기술혁신이 일어나는 경우와 예산상한이 감소했을 경우에 최적해의 변화를 분석한다. 이 외에도 수요를 충족시키지 못할 때 발생하는 부족설비 보유비용의 중요성이 더 높아진다고 가정하는 경우, 할인율 r이 변하여 자본비용(cost of capital)이 높아지는 경우, 설비의 잔존가치가 장래에 더 높아지리라 예상되는 경우, 마지막으로는 계획기간이 짧아질 경우에 나타나는 최적해의 변화를 살펴보도록 한다.

예제 1에서 예제 5까지를 정리하면 표 3—1과 같다. 모든 예제에서 공통적으로 사용하는 모델

표 3—1. 예제의 감도 분석 결과

model parameter	example 1	example 2	example 3	example 4	example 5
시설투자 단위비용(k)	20	decreasing function	20	20	20
예산상한(B)	400	400	400	400	400
부족설비 보유비용(p_z)	15	15	35	15	15
할 인 율(r)	0.1	0.1	0.1	0.2	0.1
잔존가치(w)	3	3	3	3	3
계획기간(T)	30	30	30	30	25
solution					
u(t)	u(3) = 22	u(3) = 22	u(3) = 22	u(3) = 22	u(3) = 22
	u(8) = 40	u(8) = 40	u(6) = 17	u(8) = 40	u(8) = 40
	u(17) = 26	u(17) = 26	u(8) = 35	u(17) = 31	u(17) = 31
	u(20) = 27	u(20) = 27	u(18) = 37	u(23) = 38	u(23) = 51
	u(25) = 43	u(25) = 43	u(23) = 47	u(28) = 49	
	u(29) = 22	u(29) = 22	u(29) = 22		
Σf(u, t)e	343.17	303.31	397.64	160.02	319.68
objective	5209.21	5169.35	5819.34	2132.06	4831.38

변수들의 값은 다음과 같다. $c = 50$, $a = 0.7$, $p_1 = 10$, $q = 4$, $w = 3$. 예제 1에서 사용하는 나머지 모델변수들은 $p_2 = 15$, $r = 0.10$, $B = 400$, k는 계획기간 동안 일정한 값 20으로 하였다. 계획기간 동안의 총 비용을 나타내는 목적함수 값 J는 5209.21이며 용량확충 계획은 $u(3) = 22$, $u(8) = 40$, $u(17) = 26$, $u(20) = 27$, $u(25) = 43$, $u(29) = 22$이다. 이때 설비투자에 사용한 예산은 343.17이다. 예제 2에서는 예제 1과 달리 장래에 기대되는 기술혁신을 나타내도록 용량확충에 드는 단위비용의 계수 k가 시간에 따라 점차 낮아진다. 이 예제에서는 $k = k_1 (0 \leqq t \leqq t_1)$, $k = k_2 (t_1 < t \leqq t_2)$, $k = k_3 (k > t_3)$, $k_1 \geqq k_2 \geqq k_3$, 인 간단한 형태를 사용하였으며, 이때 $t_1 = 10$, $t_2 = 20$, $k_1 = 20$, $k_2 = 13$, $k_3 = 9$이다. 예제 1과 예제 2를 비교하여 보면, 용량확충 시기나 규모는 같지만 설비투자비용이 303.31로 낮아졌음을 알 수 있다. 예제 3에서는 설비부족 보유비용 p_2를 35로 증가시킨 경우이다. 예제 1과 예제 3을 비교하여 보면 용량확충 시기 및 규모가 부족설비가 일어나지 않도록 조정하였다. 예제 3의 용량확충계획은 $u(3) = 22$, $u(6) = 17$, $u(8) = 35$, $u(18) = 37$, $u(23) = 47$, $u(29) = 22$이다. 목적함수 값이 5819.34로 증가된 이유는 설비초과에 따른 비용이 발생했기 때문이다. 예제 4에서는 할인율 r을 0.2로 하였다. 이 경우에는 현금의 시간적 가치를 반영하여 계획기간의 후반부에 많은 투자가 이루어졌다. 이 경우의 용량확충계획은 $u(3) = 22$, $u(8) = 40$, $u(17) = 31$, $u(23) = 38$, $u(28) = 49$이고 목적함수 값은 2132.06이다. 예제 5에서는 계획기간을 변경하였을 때 최적 용량확충계획은 $u(3) = 22$, $u(8) = 40$, $u(17) = 31$, $u(23) = 51$이고 예제 1과 비교하면 세번째 및 네번째 용량확충 시기 및 규모가 변화했음을 알 수 있다.

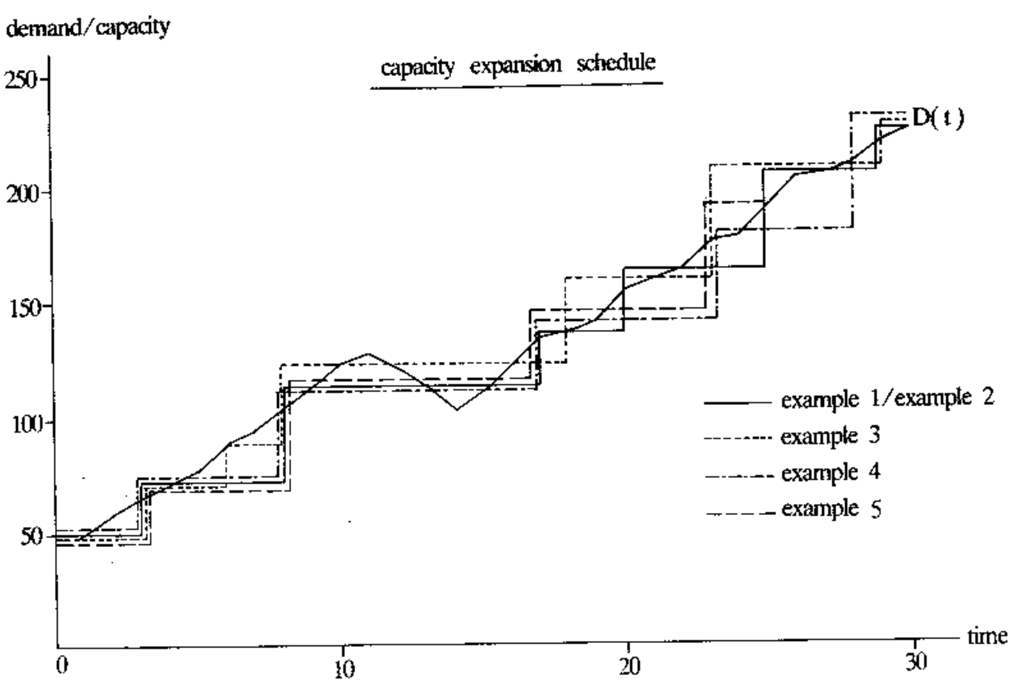

그림 3—1. 예제의 최적 용량 확충 계획.

Ⅳ. 결 론

본 연구에서는 예산제약하의 설비용량확충 모델을 이용하여 FMS와 같이, 장래에 기술혁신이 기대되는 설비에 대한 투자문제를 분석하는데 기본이 되는 용량확충문제를 고찰하였다. 본 연구에서는 수요함수가 일반적인 증가함수를 갖는 경우의 용량확충모형을 보다 임의의 수요함수를 갖는 경우의 모형으로 확장하였고, 이산적 최적 제어 모형과의 관계를 살펴보았다. 이같은 모형은 생산제품에 대한 수요가 시간에 따른 기복은 있으나 장기적으로 볼때 증가하는 경향이 있는 일반 생산업체의 FMS 설비투자 계획수립에 이용될 수 있을 것으로 생각된다.

재고모형에서 비롯된 Manne와 Veinott, Jr.(1967)의 용량확충모형의 비용함수는 이산적 최적 제어 모형의 수행도 함수(performance function)로 일반화시킬 수 있음도 알 수 있었다. 이러한 결과는 동적 계획법 알고리즘의 구조가 최단경로문제와 유사하기 때문에 얻어진 결과이다.

앞으로의 연구에서는 일반적으로 FMS 시스템에 대한 용량을 단위 시간당 시스템 출력(system throughput)으로 정의하는 점을 고려하여, 이 경우에 유용한 용량확충 모형을 개발하도록 한다. 또한 불확실한 미래 수요에 대한 용량확충 모형은 개발중에 있다.

Reference

1. Bellman, R. and S. Dreyfus, *Applied Dynamic Programming,* Princeton University Press, N.J., 1962.
2. Burnstein, M.C., "Finding Economical Mix of Rigid and Flexible Automation for Manufacturing," *Proceedings of the Second ORSA/TIMS Conference on FMS,* 1986.
3. Erlenkotter, D., "A Comparative Study of Approaches to Dynamic Location Problems," *European Journal of Operational Research,* Vol. 6, 1981.
4. Everett, H., "Generalized Lagrange Multiplier Method for Solving Problems of Optimum Allocation of Resourses," *Operations Research,* Vol. 11, 1963.
5. Gaimon, C., "The Dynamical Optimal Acquisition of Automation," *Annals of Operations Research,* Vol. 3, 1985.
6. _______, "An Impulsive Control Approach to Deriving the Optimal Dynamic Mix of Manual and Automatic Output," *European Journal of Operational Research,* Vol. 24, No. 3, March 1986a.
7. _______, "The Strategic Decision to Acquire Flexible Technology," *Proceedings of the Second ORSA/TIMS Conference on FMS,* 1986b.
8. Hinomoto, H., "Capacity Expansion with Facilities under Technological Improvements," *Management Science,* Vol. 11, 1965.
9. Jascold-Gabszewicz, J. and J.P. Vial, "Optimal Capacity Expansion under Growing Demand and Technological Progress," in P.G. Szego and K. Shell (eds.), *Mathematical Methods in Investment and Finance,* North-Holland, Amsterdam, 1972.
10. Lasdon, L.S., *Optimization Theory for Large Systems,* The Macmillan Company, N.Y., 1970.

11. Luss, H., "Operations Research and Capacity Expansion Problems : A Survey." *Operations Research,* Vol. 30, 1982.
12. Manne, A.S., "Capacity Expansion and Probabilistic Growth," *Econometrica,* October 1961.
13. Manne, A.S. and A.F. Veinott, Jr., "Optimal Plant Size with Arbitrary Increasing Time Paths of Demand," in A.S. Manne (eds.), *Investments for Capacity Expansion : Size, Location, Time-Phasing,* George Allen & Unwin Ltd., London, 1967.
14. Whitin, T.M., *The Theory of Inventory Management,* Princeton University, Princeton, 1957.
15. Zangwill, W. I., "A Dynamic Multi-Product Multi-Facility Production and Inventory Model," *Technical Report No. 1, Program in Operations Research,* Stanford University, Stanford, California, April 1965.
16. 김성인, 김승권, 강석현, 박태형, "유연생산 시스템 도입의 경제적 타당성 평가를 위한 전술적 모델," 산업공학, Vol. 1, No. 2, Dec., 1988.