산 업 공 학
제1권 제1호
1988. 4.

分割技法을 이용한 線型計劃法의 應用에 관한 事例 硏究

A Case Study on the Application of Decomposition Principle to a Linear Programming Problem

尹 寅 重*
金 成 寅*

Abstract

This paper discusses the applicability of the decomposition principle to an LP (Linear Programming) problem. Through a case study on product mix problems in a chemical process of Korean Steel Chemical Co., Ltd., the decomposition algorithm, LP Simplex method and a modified method are compared and evaluated in computation time and number of iterations.

1. 硏究의 背景 및 目的

高麗大學校 産業工學科와 韓國製鐵化學(株)(이하 제철화학이라고 부름)은 산학협동으로서 제철화학의 화학제품 생산공정에 관한 제품별 최적 생산량 결정(Product Mix) 모델을 개발한 바 있다[1]. 즉, 제철화학의 10여개 생산공정 간의 유기적인 관계를 수학적 모델로 표시하고 컴퓨터를 이용하여 최적해를 구하였다. 이 모델은

- 경제적 변수의 변동에 따른 전 생산공정의 계획기간별 최적 원료 구입량 결정,
- 제품 생산량 결정 및 판매 전략 수립,
- 최적 에너지 사용을 위한 민감도 분석,
- 시설확충 및 시설대체를 위한 계획 수립,
- 새로운 촉매의 경제적 가치, 경제적 수명 결정 등

에 필요한 중요한 자료 및 정보를 제공하여 經營戰略 樹立에 실질적인 기여를 하고 있다. 이 논문은 위의 연구 중에서 線型計劃法 문제에 分割技法을 적용하는 부분을 다룬다.

多數의 제품을 생산하는 기업에서 중요한 의사결정 문제 중의 하나는 製品別 最適生産量을 결정하는 것이다. 즉, 기업이 갖고 있는 제

* 高麗大學校 工科大學 産業工學科

한된 資源을 가능한 여러 제품 또는 활동에 割當하는 문제이다. 이 문제에 대한 해결 기법들 중의 하나가 線型計劃法이다[7]. 선형계획법이 O.R.(Operations Research)의 여러 모델 중에서 가장 널리 사용되고 있는 것 중의 하나인 이유는 우리가 잘 알고 있는 바와 같이 현실의 상황이 선형계획법의 모델 또는 선형계획법의 변형 모델로 잘 反影되는 경우가 많으며 또한 해를 구할 수 있는 기법으로 單體法(Simplex Method)이라는 효율적인 해법이 개발되어 있기 때문이다[3].

선형계획법의 해법인 단체법은 變數 및 制約式의 수가 상당히 많은 경우에도 비교적 적은 컴퓨터 容量과 짧은 計算時間으로 문제를 분석할 수 있다. 또한 문제의 데이타가 변경되거나 새로운 변수 및 제약식이 첨가 또는 제거되는 경우에도 이에 대한 敏感度 分析이 효율적으로 수행될 수 있다.

그러나 사회가 復雜해지고 多變化해짐에 따라 사회적 모델을 수학적 모델로 표시하는 데에 있어서, 각각의 요인을 설명하는 변수의 수나, 요인들의 관계 또는 제한사항을 나타내는 제약식의 수가 상당히 커지고 있다. 선형계획법의 해법이 매우 효율적이라고는 하나 이에 대한 최적해 도출과정에서 컴퓨터 용량을 초과하거나 계산시간이 지나치게 긴 경우가 많이 발생하고 있다[2].

그러나 일반적으로 이렇게 커다란 선형계획법 문제는 零(0)인 係數가 차지하는 비율이 크면서 그 구조가 보다 효율적인 해법이 적용될 수 있는 작은 문제들로 分割될 수 있는 특별한 형태로 존재하는 경우가 많다. 이와 같이 선형계획법 문제를 一般的인 형태와 보다 효율적인 해법이 적용될 수 있는 特別한 형태로 나누어서 최적해를 구하는 기법이 分割技法이다[4],[5]. (통상적인 선형계획법과, 분할기법이 적용되는 선형계획법을 구별하기 위하여 전자를 선형계획법, 후자를 분할기법이라고 부르기도 한다.)

본 논문에서는 61개의 변수와 66개의 제약식을 갖는 제철화학의 실제 事例에서 분할기법의 適用可能性을 검토하여 분할기법의 效率을 컴퓨터 기억용량, 컴퓨터 계산시간 및 반복횟수 면에서 분석하여 본다. 또한 분할기법에서 유입변수 및 유출변수를 설정하는 방법을 약간 修正하여 이 해법의 效率을 비교, 평가하여 본다.

2. 分割技法

適用事例. 본 논문에서 고려하고 있는 分割技法의 적용가능성 및 유입, 유출변수를 선정하는 修正된 方法의 효율을 비교, 평가하기 위한 事例로서 제철화학의 화학공정을 대상으로 하였다. 이 기업의 全 工程에 대한 흐름도(Material Processing Chart)는 그림 1과 같다. 회사의 기밀상 완전하고 세밀한 공정을 표시하지는 못한다.

그림에서 굵은 선 안의 부분에만 적용하기로 하고, 이 부분을 떼어내어서 세분하고 다시 배열하면 그림 2와 같이 된다. 이때 이 부분은 61개의 變數와 66개의 制約式을 갖고 있는 線型計劃法 모델로서 표시될 수 있다. 이들 제약식 중에서 31개는 등식(=)의 형태, 35개는 부등식(≤)의 형태를 갖는다.

分割技法의 適用可能性. 이 工程 흐름도를 살펴보면 각 공정에서는 다른 공장의 output인 반제품 또는 그 공장에서만 사용되는 원료를 input으로 하여, 다른 공장의 input인 반제품 또는 완제품을 생산한다. 그러므로 공정 흐름도를 공장에 따라 분류하여 보면 하나의 공장은 그 공장 안에 한정되는 원료와 제품 그리고 다른 공장과 연결되는 반제품으로 구성되어진다. 하나의 공장 안에 한정된 원료와 제품에 대한 制約式은 다른 공장에 대한 제약식과 관련이 없는 하나의 獨立된 선형계획법 문제가 되어 서브(sub) 문제로 간주된다. 그러나 반제품에 대한 제약식은 각각의 공장을 연결하므로 다른 공장

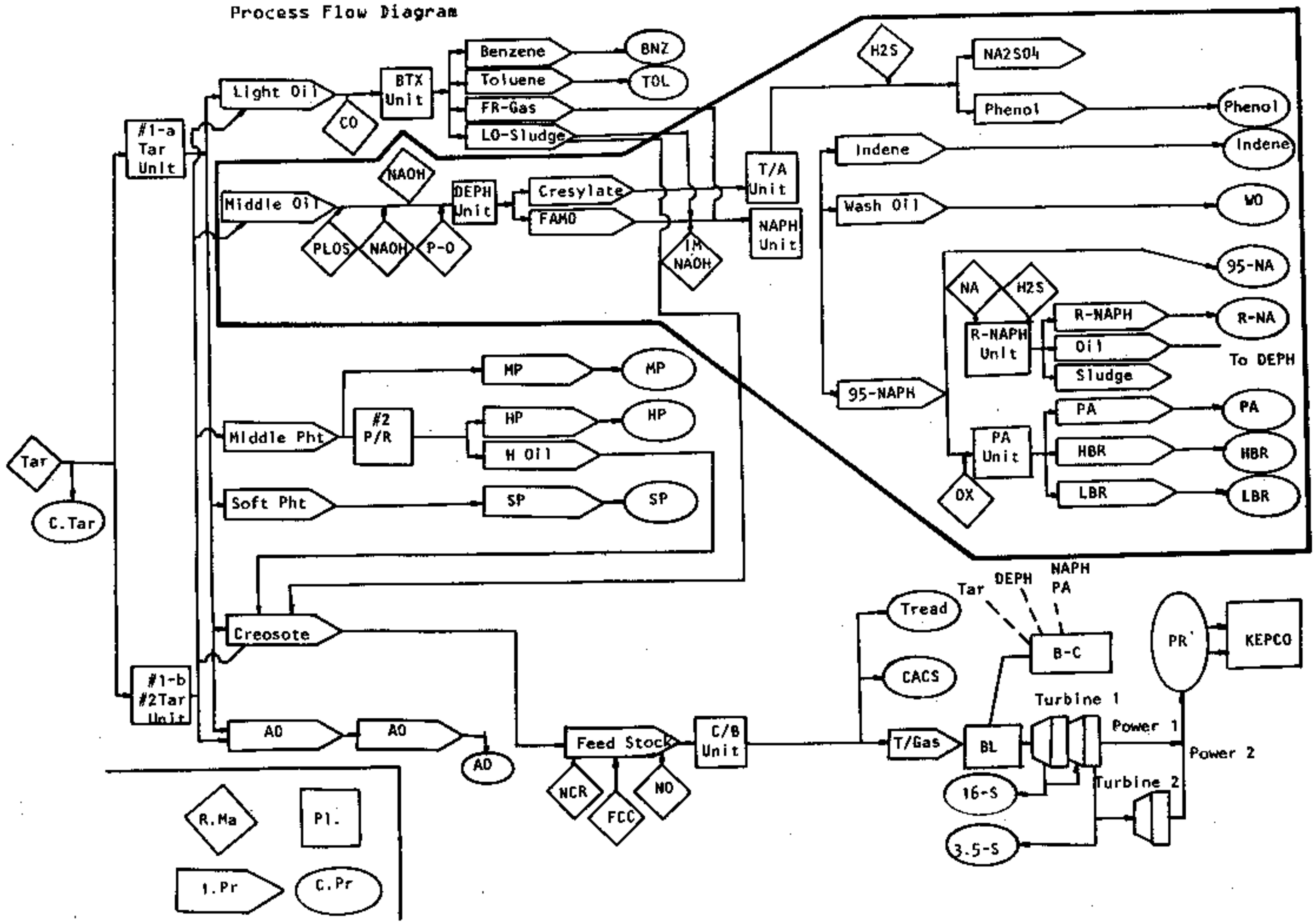

그림 1. 製鐵化學의 全 工程 흐름도

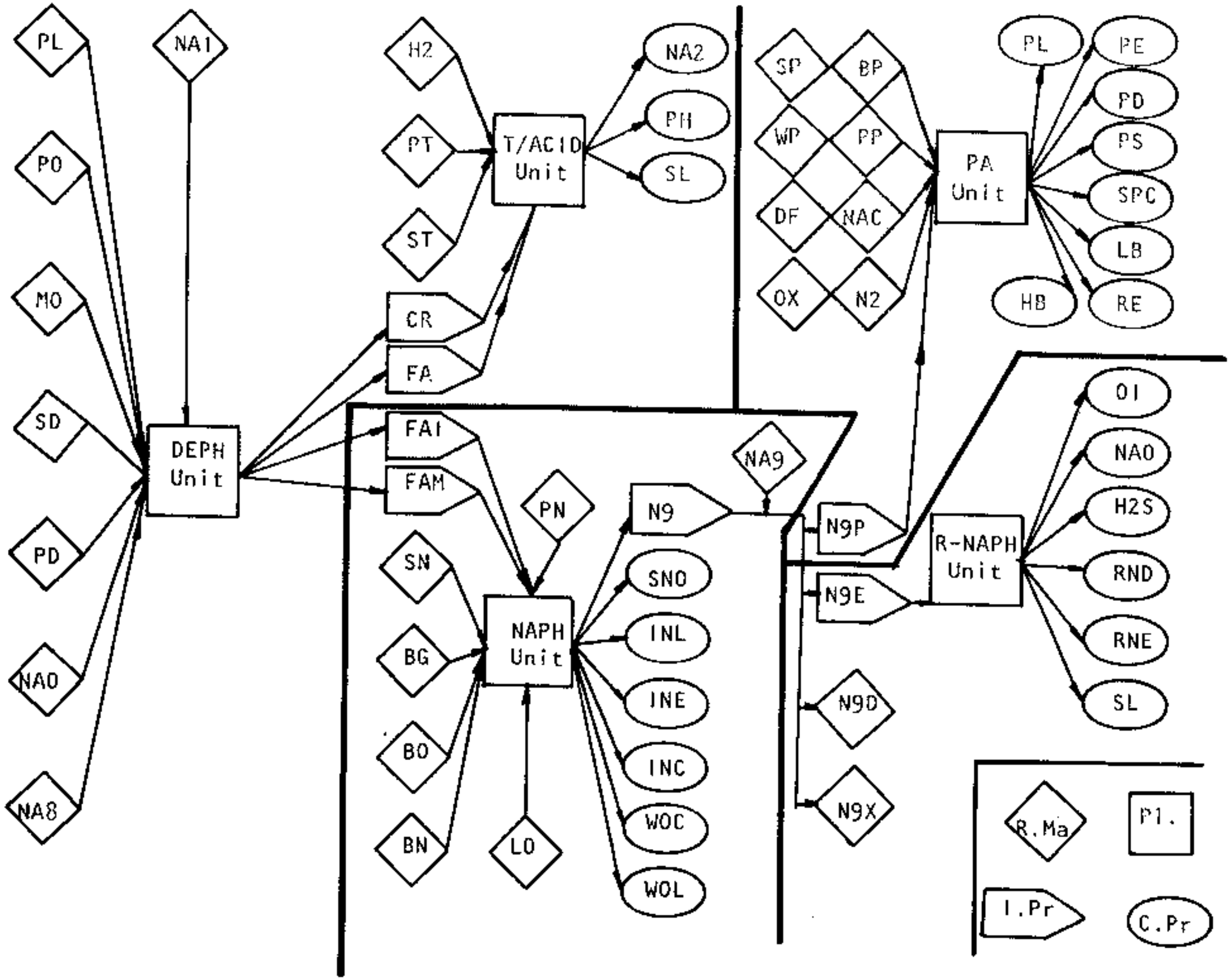

그림2. 4개의 블럭으로 나눈 部分 工程 흐름도

의 제약식과 聯關을 갖게 된다. 이와 같은반제품에 대한 제약식을 따로 분리하여 마스터(master) 문제로 간주해서 사례모델에 적용할 수 있다.

마스터 문제에서는 모든 변수가 필요하므로 제약식마다 소요되는 컴퓨터 記憶容量이, 일부의 변수를 필요로 하는 서브 문제의 제약식마다 소요되는 컴퓨터 기억용량보다 크다. 서로 연관이 있는 서브 문제들로 생겼던 마스터 문제의 제약식들은 그 서브 문제들을 결합해서 생긴 통합된 서브 문제의 제약식에 포함된다. 이때 마스터 문제의 제약식을 줄임에 따라 감소된 컴퓨터 기억용량과, 연관있는 서브 문제들을결합함에 따라 증가된 컴퓨터 기억용량의 차이에 따라 전체적으로 소요되는 컴퓨터 기억용량은달라지게 된다. 그러므로 블럭들을 통합하기 위해서는 서로 연관있는 블럭들을 결합하여야 한다. 본 연구에서는 각각의 공장을 블럭으로 간주하여 그림 2 에서와 같이 線型計劃法 문제를 4 개의 블럭을 갖는 分割技法 문제로 전환하였다.

解法의 修正. 일반적으로 선형계획법의 기존 해법은 流入變數로 陰의 割引價(Negative Reduced Cost) 중 최소값을 갖는 변수를 선정한다. 流出變數로는 最小比率을 갖는 변수를 선정한다. 그리고 유입, 유출이 가능한 변수가 여러개 있을 경우에는 이들 중에서 어떤 변수를 유입, 유출변수로 선정하느냐에 따라 最適解를 구하기까지의 總 反復回數가 달라짐은 물론이다. 선형계획법의 대부분의 기존 해법은 이러한 경우 첫번째의 변수를 유입, 유출변수로 선정하고 있다.

한편 Dickson은 流入變數의 결정기준으로는 음의 할인가를 갖는 비기저변수 중 목적함수와 최소의 角을 형성하는 것으로 정하였다. 그리고 流出變數의 결정기준으로는 기저변수를 목적함수와 최소의 角을 형성하는 것으로 정하였다. 그는 이러한 해법을 44개의 변수와 34개의 제약식을 갖고 있는 문제에 적용하여 본 결과 기존 해법보다 효율적임을 밝혔다[6].

본 연구에서는 기존의 유입, 유출변수 선정방법을 채택하고 유입, 유출이 가능한 변수가 여러 개 있을 경우에는 이들 중에서 Dickson의 角을 이용하는 방법을 고려해 보기로 한다. 이를 修正된 해법이라고 부르고 기존의 해법을 旣存 해법이라고 부르기로 한다.

3. 效率 比較

1) 線型計劃法과 分割技法

記憶容量. 선형계획법과 분할기법에서 필요한 컴퓨터의 기억용량을 결정하는 配列의 크기는 표 1 과 같다. 분할기법에서 배열의 크기가 줄어드는 것은 당연하며 사례에서 대략 1/2로 줄어듬을 알 수 있다.

計算時間. 선형계획법과 분할기법의 컴퓨터 계산시간을 비교하기 위하여 컴퓨터 시간을 다음과 같이 분류한다.

- 飜譯시간－FORTRAN 언어로 짜여진 프로그램을 기계어로 번역하는데 소요되는 시간,
- 1 段階시간－인위변수를 기저변수에서 비기저변수화하는 1 단계에서 소요되는 시간,
- 2 段階시간－1 단계이후 최적해를 얻을 때까지 소요되는 시간.

여기에서 번역시간은 문제의 크기에 따른 영향이 미미하고 일회만 필요하므로 固定時間으로 간주할 수 있고, 그 밖의 시간은 문제의 크기에 직접적인 영향을 받고 매 문제마다 필요하므로 變動時間으로 간주할 수 있다.

기존 해법에 의한 선형계획법과 분할기법 사례모델의 컴퓨터(고려대학교 전자계산소의IBM 4341/M11) 計算時間을 비교한 것이 표 2 이다. 이 결과를 살펴 보면 분할기법의 경우 선형계획법에 비하여 固定時間이 2.5배로 증가되어 8.88초를 더 소요하게 된다. 그러나 이것은 한번만 필요한 시간이다. 變動時間은 분할기법의 경우 선형계획법보다 약 46%가 감소되어 매 문제마

표1. 필요한 配列의 크기*

변수명		A·	B		b	IDB	NAVA	NARO	ICT	GJ	ETA	XR	합계
선형계획법		8,436	5,476	74	74	148	74	74	74	74	74	0	14,578
분할기법	서브1	651	441	52	21	21	21	21	21	21	21	330	
	서브2	504	324	46	18	18	18	16	18	18	18	300	
	서브3	280	196	34	14	14	14	14	14	14	14	220	
	서브4	819	565	72	29	29	29	29	29	29	29	470	
	마스터	1,050	225	15	15	15	15	15	15	30	15	0	
	합계	3,304	1,751	219	97	127	97	87	97	112	97	1,330	7,318

*주요 배열의 記號 설명

Maximize cx

subject to [c, B] x = b

A = [c, D, B], D : 인위변수

표2. 線型計劃法과 分割技法의 컴퓨터 計算時間

(단위 : 초)

	고정시간	변동시간		
	번역시간	1단계시간	2단계시간	합계
선형계획법	5.92	5.55	3.74	9.29
분할기법	14.80	2.73	2.29	5.02

표3. 分割技法에서 既存 解法과 修正된 解法의 컴퓨터 計算時間

	고정시간	변동시간		
	번역시간	1단계시간	2단계시간	합계
기존 해법	14.80	2.45	2.61	5.06
수정된 해법	16.43	2.73	2.29	5.02

표4. 既存 解法, 修正된 解法의 反復回數

반복횟수	마스터문제	서브문제	합계
기존 해법	18	197	215
수정된 해법	16	169	185

다 평균 4.27초를 줄이게 된다. 문제의 규모가 커질수록 이러한 효과는 증대될 것이다.

2) 分割技法에서의 修正된 解法

컴퓨터 計算時間. 분할기법에서 유입, 유출 변수를 선정하는 기존 해법과 수정된 해법의 컴퓨터 계산시간이 표3에 나타나 있다. 이 결과를 보면 어느 해법이 사례에서 더 나은 결과를 낳고 있는지 단정하기가 어렵다.

反復回數. 분할기법에서는 매 회마다 서브 문제의 目的函數 係數가 변화하므로 n회에서 유입 가능한 변수가 여러 개 있을 경우, 이들 중에서 목적함수값을 보다 개선시키는 변수를 유입변수로 선정하였다 하더라도 n+1회에서 변환된 목적함수 계수로 보면 n회에서 유입된 변수가 누락된 유입가능한 변수보다 n+1회의 서브 문제를 풀 때 반복횟수를 줄인다고 단정할 수 없다. 그러나 修正된 해법에 의하여 유입변수를 선정할 경우, 현 단계에서는 반복횟수를 줄일 가능성이 크기 때문에 여러 개의 유입가능한 변수가 있는 경우, 현 단계의 목적함수값을 더 개선시키는 변수를 유입변수로 선정하는 수정된 해법이 기존 해법보다 반복횟수를 줄일 것으로 기대된다. 표4는 이러한 기대에 부합되는 결과를 보여 주고 있다.

4. 結 論

규모가 큰 문제에 있어서 컴퓨터 기억용량을

고려하여 보다 작은 몇개의 문제로 나누어서 해를 구하는 방법인 分割技法을 실제 事例에 적용하여 보았다. 공정을 주의깊게 관찰하여 分割可能性을 검토하는 것이 필요하다. 또한 유입 유출이 가능한 변수가 여러개 있을 경우에 보다 효과적으로 선정하기 위하여 Dickson의 角을 이용하는 방법을 적용하여 보았다.

線型計劃法과 分割技法의 효율비교에서 분할기법의 경우가 선형계획법에 비하여 컴퓨터 기억용량에서 우수하고, 계산시간 면에서 고정시간은 길었지만 변동시간이 짧은 결과를 얻은 것은 기대했던 것이다. 분할기법에서 修正된 解法은 반복횟수의 면에서 기존 해법을 많이 개선시켰다. 사례모델을 PC (Personal Computer) 에서도 운영을 할 수 있는가를 고려하고 있기 때문에 이러한 효율증가는 그 가능성에 상당한 영향을 미친다.

한편 블럭의 수를 5개로 하는 分割技法 모델을 수립할 수도 있다. 비슷한 결과가 얻어지리라고 예상된다.

參考文獻

1. 高麗大學校 生產技術硏究所, 제철화학 공정에 있어서의 제품별 최적 생산량 결정에 관한 연구, 1986.
2. Bazara, M. S. and J. J. Jarvis, *Linear Programming and Network Flows*, John Wiely & Sons, Inc., New York, 1977.
3. Danzig, G. R., *Maximization of a Linear Function of Variable Subject to Linear Inequalities*, John Wiely & Sons, Inc., New York, 1951.
4. Danzig, G. R. and P. Wolf, "Decomposition Principle for Linear Programs," *Operations Research*, Vol. 8, No. 1, 1960.
5. Danzig, G. R. and P. Wolf, "The Decomposition Algorithm for Linear Program," *Econometrica*, Vol. 29, No. 4, 1961.
6. Dickson, J. C. and F. P. Frederick and Moore, "A Decision Rule for Improved Efficiency in Solving Linear Programming Problems with the Simplex Algorithm," *Communications of the ACM*, Vol. 3, 1969.
7. Gass, S. L., *Linear Programming*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1958.