산 업 공 학
제 1 권 제 2 호
1988. 10

통신망에서의 수리센터 배치에 관한 연구†

(A Center Location Problem on a Telecommunication Network)

정 호 연*
박 순 달*
조 영 현**

Abstract

Telecommunication networks include repeaters that serve to monitor the condition of each line within the network, and a center that dispatches repairmen to fix broken repeaters. In such a set-up, however, a problem arises: where is the most effective location for the center?

First of all, we consider the network problem in which the nodes are the telephone offices and the arcs are the transmission lines. Here we deal with the center location problem in which the center must be located at a node and calls for service are assumed to occur on the arcs. This thesis proposes to prove that this problem can be transformed into a 1-median problem. Furthermore, the transformed problem will be proven to be equivalent to the center location problem that minimizes the sum of the distances weighted by the degrees of each node.

1. 서 론

전화국을 연결하고 있는 통신망에는 각 노선상의 기능을 감시하는 중계기들이 있고 또한 이들 중계기들의 기능을 감시하는 중계망유지보수센터가 있다. 이 센터에는 수리요원이 상주하고 있어서 중계기에서 고장이 발생하면 현장에 출동하여 고장을 수리하게 된다. 그런데 이러한 통신망은 여러회선을 한데 묶은 트렁크(trunk) 단위로 설치되어 있기 때문에 어떤 하나의 회선에 대한 고장이 발생되더라도 남아있는 여분의 회선을 이용할 수 있도록 되어 있다. 따라서 발생된 고장은 국간전송 효율을 저하시키지만 치명적인 손실을 끼치지는 않는다. 그래서 수리팀이 직접 현장

* 서울대학교 산업공학과

** 한국전기통신공사 사업지원단

† 한국전기통신공사 사업지원단에서 지원한 "운용보전센터 배치에 관한 연구" 프로젝트에서 문제를 택한 것임

에 출동해야 되는 센터의 위치 결정에는 신속성 보다 경제적 수리를 위한 이동거리의 최소화 측면이 보다 중요하게 고려되어야 한다.[2] 그러므로 본 연구의 목적은 수리요원이 고장이 발생한 선로로 출동해 고장난 중계기를 수리 하고 센터로 돌아오는데 걸리는 총이동거리를 최소화 시키는 최적의 센터위치를 찾는 것이다. 우선 문제를 수식화하기 위해 통신망상의 전화국을 네트워크의 마디로, 전화국들을 연결하는 통신회선을 네트워크의 호로 간주하자. 그럴때 중계망유지보수 센터문제는 고장이 네트워크의 호에서 발생되고 센터는 마디에 설치되는 형태의 문제가 된다.

지금 마디집합 $V = \{v_1, v_2, \cdots\cdots, v_n\}$와 호의 집합 A 로 구성된 무방향 네트워크 G(V, A)가 있다고 하자. 그때 관할 중계시설에 대하여 수리요원이 최소의 이동거리로써 모든 호를 관할할 수 있는 위치에 센터를 배치하려고 한다.

이 때 문제 상황에 맞는 센터 배치를 위해 다음과 같은 가정을 둔다.

(1) 임의의 지점에서 고장이 발생될 확률은 호(선로)상 어디에서나 균등(uniform)하다.

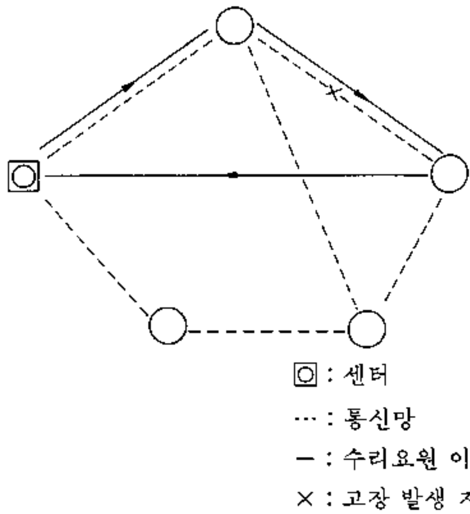
(2) 고장을 수리하는데 소요되는데 시간은 0 시간이다.

(3) 고장수리후 센터로 돌아가는 방법으로 왔던 길로 되돌아갈 수 있는 경우와 되돌아갈 수 없는 두가지 경우가 있다.

2. 왔던 길로 되돌아갈 수 없는 경우의 센터 배치문제

먼저 가정 (1), (2)가 성립하면서 고장수리후 센터로 돌아갈 때 왔던 길로 되돌아갈 수 없는 경우를 살펴보자. 일단 임의의 호상에서 고장이 발생되면 이러한 고장은 센터에 설치되어 있는 시스템에 의해 탐지되고 고장을 수리하기 위해 센터에 상주하고 있던 수리요원이 고장이 발생된 호로 출동하여 처음부터 끝까지 호를 탐색하여 고장을 수리한 후 최단거리로 센터에 복귀하게 된다.

지금 마디 v_i와 v_j 사이의 호상에서 고장이 발생될 때 고장을 수리하고 센터로 돌아오는데까지 걸리는 총거리는 다음과 같다.



[그림 1] 수리요원의 이동경로

즉, 마디 v_k 에서 호$(i, j) \in A$ 의 수리를 담당할 때 총거리는

$TD(k) = d_{ki} + \tilde{d}_{ij} + d_{jk}$ 이다.

단, d_{ki} = 마디 v_k 에서 v_i 까지의 최단거리

$\tilde{d}_{ij}$ = 호$(i, j) \in A$ 의 거리, $i \neq j$

여기서 최적의 센터위치를 찾기 위해서는 센터의 위치를 바꿔가면서 또한 고장은 임의의 어떤 호상에서도 발생될 수 있다는 모든 경우를 다 고려해야 한다.

따라서 문제 상황에 맞는 모형식을 만들어 보면 다음과 같다.

$$\text{Min} \sum_{k \in V} \sum_{\substack{(i,j) \in A \\ i \neq j}} (d_{ki} + \tilde{d}_{ij} + d_{jk}) X_{ijk} \quad (1)$$

$$\text{s.t.} \sum_{\substack{k \in V \\ i \neq j}} X_{ijk} = 1 \quad \forall (i, j) \in A \ (i \neq j) \quad (2)$$

(P1)

$$X_{kkk} \geq X_{ijk} \quad (3)$$

$$\sum_k X_{kkk} = 1 \quad (4)$$

$$X_{ijk},\ X_{kkk} \in \{0, 1\} \tag{5}$$

여기서

$$X_{ijk} = \begin{cases} 1 : \text{센터 } k \text{ 에서 호}(i, j) \in A \text{ 를 서비스 하면}(i \neq j) \\ 0 : \text{그렇지 않으면} \end{cases}$$

$$X_{kkk} = \begin{cases} 1 : \text{센터가 마디 } v_k \text{ 에 설치되면} \\ 0 : \text{그렇지 않으면} \end{cases}$$

(P1)문제에서 목적식(1)은 센터에서 모든 호 $(i, j) \in A$ 를 수리하고 다시 센터로 복귀하는데까지 걸리는 이동거리의 총합을 최소화시키는 식이다. 식 (2)는 하나의 호$(i, j) \in A$ 는 반드시 한센터로 부터만 서비스를 받아야 한다는 제약식이고, 식 (3)은 임의의 마디 v_k 에 센터가 개설되어야 각 호$(i, j) \in A$를 서비스 할 수 있다는 것을 나타낸다. 식 (4)는 배치하고자 하는 센터의 수가 하나임을 나타내며 식(5)는 사용된 변수가 정수조건을 만족해야 됨을 나타내주는 제약식이다. 여기서 모든 호를 한번씩 방문해야 되는 센터배치문제는 모든 마디를 방문하는 문제로 변환될 수 있다.

[정리 1] 임의의 센터 k 에서 각각의 호$(i, j) \in A$ 를 한번씩 방문하고 센터로 돌아오는데 걸리는 총거리를 최소화하는 문제는 센터 k 에서 모든 마디를 한번씩 방문하는 최단거리에다 해당 마디에 연결되어 있는 호의 수를 곱한 값의 합을 최소화하는 것과 같다.

(증명) 먼저 마디 v_i 에 연결되어 있는 호의 수를 w_i 라 하고, 변수 X_{ijk} 를 다음과 같이 정의하자.

$$X_{ijk} = \begin{cases} 1 : \text{센터 } k \text{ 에서 호}(i, j) \in A \text{ 를 서비스 하면}(i \neq j) \\ 0 : \text{그렇지 않으면} \end{cases}$$

이 때 위 정리의 증명은 주어진 식이 다음식으로 변환되는 것을 보이면 된다.

즉, $\sum_{k \in V} \sum_{\substack{(i, j) \in A \\ i \neq j}} (d_{ki} + d_{ij} + d_{jk})\ X_{ijk}$ 식이

$\sum_{k \in V} \sum_{i \in V} w_i d_{ki} X_{ki}$ 식으로 변환됨을 보이면 된다.

따라서

$$\sum_{k \in V} \sum_{\substack{(i, j) \in A \\ i \neq j}} (d_{ki} + \tilde{d}_{ij} + d_{jk})\ X_{ijk}$$

$$= \sum_{k \in V} \sum_{(i, j) \in A} (d_{ki} + d_{jk}) X_{ijk} + \sum_{k \in V} \sum_{(i, j) \in A} \tilde{d}_{ij} X_{ijk}$$

$$= \sum_{k} \sum_{i} \sum_{j \in Link(i)} d_{ki} X_{ijk} + \sum_{k} \sum_{j} \sum_{i \in Link(j)} d_{jk} X_{ijk}$$

$$+ \sum_{(i, j) \in A} \tilde{d}_{ij} \sum_{k} X_{ijk} \tag{6}$$

단, Link(i)는 마디 v_i 와 실제 호로 연결되어 있는 마디들의 집합을 의미한다. 물론 (i, Link(i)) $\in A$ 이다.

여기서 변수 X_{ki} 를 다음과 같이 정의하자.

즉,

$$X_{ki} = \begin{cases} 1 : \text{마디 } v_i \text{ 가 센터 } k \text{ 의 서비스를 받으면} \\ 0 : \text{그렇지 않으면} \end{cases}$$

그 때 다음식이 성립한다.

$$\sum_{j \in Link(i)} X_{ijk} = w_i X_{ki}$$

또한 $\sum_{k} X_{ijk} = 1$ 이므로 식 (6)은 다음 식 (7)과 같게 된다.

$$\sum_{k} \sum_{i} w_i d_{ki} X_{ki} + \sum_{k} \sum_{j} w_j d_{jk} X_{jk} + \sum_{(i, j) \in A} \tilde{d}_{ij} \tag{7}$$

$$= 2 \sum_{k} \sum_{i} w_i d_{ki} X_{ki} + \text{상수} \tag{8}$$

따라서 식 (1)을 최소화하는 것은 식 (8)에서 상수항을 소거한 앞의 항만을 최소화하는 것과 같다. 결국 식 (1)을 최소화하는 것은 다음과 같은 Median 형태의 식 (8')을 최소화하는 것과 같다.

즉

$\sum_{k \in V} \sum_{\substack{(i, j) \in A \\ i \neq j}} (d_{ki} + \tilde{d}_{ij} + d_{jk})\ X_{ijk}$ 식이

$$\sum_{k \in V} \sum_{i \in V} w_i d_{ki} X_{ki} \tag{8'}$$

으로 대체된다. Q.E.D.

이상의 정리를 이용하면 임의의 센터 k 에서 모든 호 $(i, j) \in A$ 를 한번씩 방문하고 센터로 복귀하는 총거리식 $TD(X_k)$,

$$TD(X_k) = \sum_{(i, j) \in A} (d_{ki} + \tilde{d}_{ij} + d_{jk})$$

는 다음의 $TD(X_k')$식으로 대체된다.

$TD(X_k') = \sum_i w_i d_{ki}$

결국 우리의 목적은 다음과 같은 $X^* \in V$를 찾는 것이다.

$TD(X^*) \leq TD(X_k')$

따라서 위의 결과를 이용하면 호를 관할하는 문제 (P1)은 마디를 관할하는 문제 (P2)로 다음과 같이 변환될 수 있다.

$$\text{Min } \sum_i \sum_j w_i d_{ij} X_{ij}$$

$$\text{s.t. } \sum_j X_{ij} = 1 \ \forall\ i$$

(P2)

$$\sum_j X_{jj} = 1$$

$$X_{jj} \geq X_{ij} \quad \forall\ i, j (i \neq j)$$

$$X_{ij} \in \{0, 1\}$$

$X_{ij} = \begin{cases} 1: \text{마디 } v_i \text{가 센터 } j\text{의 서비스를 받으면} \\ 0: \text{그렇지 않으면} \end{cases}$

$X_{jj} = \begin{cases} 1: \text{마디 } v_j \text{에 센터가 설치되면} \\ 0: \text{그렇지 않으면} \end{cases}$

여기서 w_i는 마디 v_i에 연결되어 있는 호의 수인데, [정리 1]에 의해 대체된 목적함수식에서는 센터에서 마디 v_i까지의 왕래횟수를 의미한다.

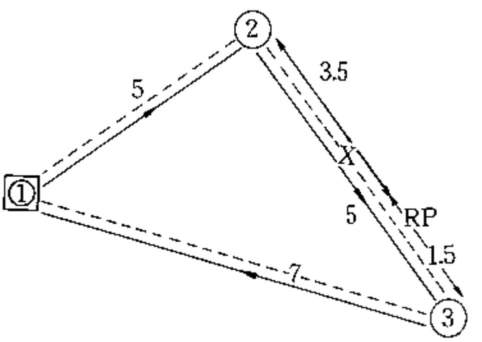
위의 문제는 네트워크상에서 발생가능한 모든 고장의 수리를 고려하면서 최적의 센터 위치를 찾는 Minisum 문제와 같다. Minisum 문제는 센터 배치문제에서 자주 사용되는 최적성기준(optimality criteria)의 하나로써 배치하고자 하는 센터에서 각 지점들까지 가는 가중거리(weighted distance)의 평균이나 총합을 목적함수로 한다.

Minisum 기준을 최적화시키는 센터배치 문제를 흔히 Median 문제라고 한다. Median 문제는 다시 배치하고자 하는 센터의 위치가 마디로만 국한되는 일반 Median 문제와 마디를 포함해서 호까지를 대상으로 하는 Absolute Median 문제로 나뉜다. [9] Hakimi[8]는 통신 네트워크에서 단일 스위칭 센터를 배치하는 문제를 처음으로 연구했다. 여기서 Hakimi는 무방향 확정적 네트워크에서 최적센터가 반드시 마디에 배치된다는 걸 증명했다. Michandani[12]는 유방향 네트워크에서도 네트워크의 마디상에 최적 센터가 배치되는 걸 보였다. 일반 Median은 가중거리 행렬에서 각 열을 합해 그중에서 열의 합이 최소인 마디를 Median으로 결정한다. 이러한 방법은 거리행렬을 계산하는데 $O(n^3)$이 걸리고 Median을 찾는데 $O(n^2)$이 소요된다.

3. 왔던 길로 되돌아갈 수 있는 경우의 센터 배치문제

여기에서는 앞의 가정 (1), (2)가 성립하고 고장수리후 센터로 돌아갈 때 왔던 길로 되돌아갈 수 있는 경우를 고려해 본다.

먼저 센터 k에서 호$(i, j) \in A$ 상의 고장을 수리하러 갈때 수리요원이 고장발생 지점까지 마디 v_i를 경유해서 갈때나 마디 v_j를 경유해서 갈때나 이동거리가 똑같은 호(i, j) 상에서의 위치를 RP라 하자.



[그림 2] RP 점의 위치

만일 고장이 마디 v_i와 RP점 사이에서 발견되어 고장 수리가 끝났다면 그 지점에서 마디 v_i

를 경유해 센터로 돌아가는 것보다 바로 왔던 길로 되돌아서 마디 v_i로 간후 센터로 복귀하는 것이 더 경제적이다. 만일 고장이 RP 점과 마디 v_j 사이에서 발견되었다면 고장을 수리한 후 왔던 길로 되돌아가는 것 보다 바로 마디 v_j를 경유해 센터로 복귀하는 것이 더 경제적일 것이다. 결국, 호상에서 발생된 고장을 수리한 후 되돌아가는게 경제적인지 직진하는게 경제적인지의 여부는 고장이 발생된 호의 어느 지점에 RP 점이 놓이느냐에 종속된다.

지금 센터 k 에서 어떤 임의의 호$(i, j) \in A$ 상의 고장을 수리할 때 마디 v_i와 RP 점 사이에서 고장이 발생될 확률을 $P_k(i, RP)$, 마디 v_j와 RP 점 사이에서 고장이 발생될 확률을 $P_k(j, RP)$라고 하자.

그 때 $P_k(i, RP)$와 $P_k(j, RP)$의 계산은 다음과 같다.

$$P_k(i, RP) = \frac{(d_{ki}+\widetilde{d_{ij}}+d_{jk})/2-d_{ki}}{\widetilde{d_{ij}}} = \frac{S/2-d_{ki}}{\widetilde{d_{ij}}}$$

$$P_k(j, RP) = \frac{(d_{ki}+\widetilde{d_{ij}}+d_{jk})/2-d_{kj}}{\widetilde{d_{ij}}} = \frac{S/2-d_{kj}}{\widetilde{d_{ij}}}$$

(단, $S = d_{ki}+\widetilde{d_{ij}}+d_{jk}$)

여기서 $P_k(i, RP)+P_k(j, RP) = 1$ 이 된다.

그런데 호(i, j)상의 고장을 수리하기 위해서는 고장이 발생된 정확한 지점을 모르기 때문에 센터 k 에서 마디 v_i로 먼저 갈수도 있고 마디 v_j로 먼저 갈 수도 있다.

[정리 2] 센터 k 에서 호(i, j)상의 고장을 관할할 때 만일 $d_{ki} < d_{kj}$이면 $P_k(i, RP) > P_k(j, RP)$이다.

(증명) $P_k(i, RP)$, $P_k(j, RP)$는 다음과 같이 주어져 있다.

$$\text{즉, } P_k(i, RP) = \frac{\frac{1}{2}S-d_{ki}}{\widetilde{d_{ij}}} = \frac{\widetilde{d_{i,RP}}}{\widetilde{d_{ij}}}$$

$$P_k(j, RP) = \frac{\frac{1}{2}S-d_{kj}}{\widetilde{d_{ij}}} = \frac{\widetilde{d_{j,RP}}}{\widetilde{d_{ij}}}$$

단, $S = d_{ki}+\widetilde{d_{ij}}+d_{jk}$

$$\widetilde{d_{i,RP}} = \frac{1}{2}S-d_{ki}$$

$$\widetilde{d_{j,RP}} = \frac{1}{2}S-d_{kj}$$

여기서 $d_{ki} < d_{kj}$이므로 $\widetilde{d_{i,RP}} > \widetilde{d_{j,RP}}$가 되어 $P_k(i, RP) > P_k(j, RP)$가 성립한다. Q.E.D

위의 정리에 따르면 센터 k 에서 호(i, j)상의 고장을 관할할 때 고장발생 확률이 높은 영역으로 곧바로 가기 위해서는 d_{ki}와 d_{kj} 중 더 작은 거리값을 갖는 마디로 먼저 가면 된다.

따라서 고장이 v_i와 RP 점 사이에서 발견되면 고장수리후 왔던 길로 되돌아서 센터로 돌아가고, RP 점과 v_j 사이에서 발견되면 고장수리후 왔던 길로 되돌아가지 않고 v_j를 경유해 센터로 돌아가게 된다.

여기서 수리요원이 센터 k 에서 마디 v_i로 먼저 간후 호(i, j)상의 고장수리를 하고 돌아올 때 소요되는 실제예상이동거리를 $D_k(i, j)$, 센터 k 에서 마디 v_j로 먼저 간후 호(i, j)상의 고장수리를 할 때 소요되는 실제예상이동거리를 $D_k(j, i)$라 하자.

이때의 실제예상이동거리는 다음과 같다.

$$D_k(i, j) = 2\left(d_{ki}+\frac{1}{2}\widetilde{d_{i,RP}}\right) \times P_k(i, RP) + (d_{ki}+\widetilde{d_{ij}}+d_{jk}) \times P_k(j, RP)$$

$$D_k(j, i) = 2\left(d_{kj}+\frac{1}{2}\widetilde{d_{j,RP}}\right) \times P_k(j, RP) + (d_{ki}+\widetilde{d_{ji}}+d_{kj}) \times P_k(i, RP)$$

[정리 3] 센터 k 에서 호(i, j)상의 고장을 관할할 때 만일 $d_{ki} < d_{kj}$이면 $D_k(i, j) < D_k(j, i)$이다.

(증명) $P_k(i, RP) = P$라 하자. 그러면 $P_k(j, RP) = 1-P$이다.

왜냐하면 $P_k(i, RP)+P_k(j, RP) = 1$ 이기 때문이다.

또한 $\widetilde{d_{j,RP}} = \widetilde{d_{ij}}-\widetilde{d_{i,RP}}$, $\widetilde{d_{ji}} = \widetilde{d_{ij}}$이다.

그러므로

$D_k(i, j)-D_k(j, i)$

$= 2(d_{kI} + \frac{1}{2}\widetilde{d_{I,RP}}) \times P + (d_{kI} + \widetilde{d_{IJ}} + d_{kJ}) \times (1-P) - 2(d_{kJ} + \frac{1}{2}\widetilde{d_{IJ}} - \frac{1}{2}\widetilde{d_{I,RP}}) \times (1-P) - (d_{kI} + \widetilde{d_{IJ}} + d_{kJ}) \times P$

$= d_{kI} - d_{kJ} + \widetilde{d_{I,RP}} - \widetilde{d_{IJ}}P$

$= \frac{1}{2}(d_{kI} - d_{kJ}) + \widetilde{d_{IJ}}(\frac{1}{2} - P)$

가정과 [정리 2]에 의해 $d_{kI} - d_{kJ} < 0$ 이고 $\frac{1}{2} - P < 0$ 이다.

따라서 $D_k(i, j) < D_k(j, i)$ 이다. Q.E.D.

그러므로 센터 k 에서 호(i, j)상의 고장을 관할할 때 d_{kI} 와 d_{kJ} 중 더 작은 거리값을 갖는 마디로 먼저 가는 것이 실제예상이동거리를 단축시켜 준다. 그런데 실제예상이동거리 $D_k(i, j)$는 $2(d_{kI} + \frac{1}{2}\widetilde{d_{I,RP}}) \times P_k(i, RP) + (d_{kI} + \widetilde{d_{IJ}} + d_{kJ}) \times P_k(j, RP)$에서 $\frac{1}{2}\widetilde{d_{I,RP}}$ 와 $\widetilde{d_{IJ}}$ 값은 센터의 위치에 상관없이 항상 똑같이 고려되는 값이므로 상수로 처리될 수 있다. 따라서 상수를 제외한 식을 예상이동거리 $D_k'(i, j)$라 나타내면

$D_k'(i, j)$는 다음과 같다.

$D_k'(i, j) = 2d_{kI} \times P_k(i, RP) + (d_{kI} + d_{kJ}) \times P_k(j, RP)$

이때 예상이동거리 $D_k'(i, j)$는 해당 마디에 주어지는 가중치에 의해 산출된 Median 형태의 거리식으로 바꾸어질 수 있다.

[**정리 4**] 예상이동거리 $D_k'(i, j)$는 해당 마디에 주어지는 가중치에 의해 산출된 거리와 같다.

(**증명**) $D_k'(i, j)$

$= 2d_{kI} \times P_k(i, RP) + (d_{kI} + d_{kJ}) \times P_k(j, RP)$

$= 2d_{kI} \times \frac{(\frac{1}{2}S - d_{kI})}{\widetilde{d_{IJ}}} + (d_{kI} + d_{kJ}) \times \frac{(\frac{1}{2}S - d_{kJ})}{\widetilde{d_{IJ}}}$

$= 2d_{kI} \times \{\frac{(\frac{1}{2}S - d_{kI})}{\widetilde{d_{IJ}}} + \frac{(\frac{1}{2}S + d_{kJ})}{2\widetilde{d_{IJ}}}\} + 2d_{kJ} \times \frac{(\frac{1}{2}S - d_{kJ})}{2\widetilde{d_{IJ}}}$

$= 2d_{kI} \times \{P_k(i, RP) + \frac{1}{2}P_k(j, RP)\} + 2d_{kJ} \times \{\frac{1}{2}P_k(j, RP)\}$

여기서 $r_k(i, j) = \{P_k(i, RP) + \frac{1}{2}P_k(j, RP)\}$

$r_k(j, i) = \frac{1}{2}P_k(j, RP)$

라 하자. 그러면

준식 $= 2d_{kI} \times \{r_k(i, j)\} + 2d_{kJ} \times \{r_k(j, i)\}$

따라서 마디 v_I 와 v_J 에 주어지는 가중치를 $r_k(i, j)$, $r_k(j, i)$라 하면 예상 이동 거리 $D_k'(i, j)$는 해당 마디에 주어지는 가중치에 의해 산출된 거리와 같게 된다. Q.E.D.

따라서 Median 의 형태로 바꿨을 때 마디 v_I 와 v_J 에 주어지는 가중치 $r_k(i, j)$와 $r_k(j, i)$는 다음과 같다.

$r_k(i, j) = P_k(i, RP) + \frac{1}{2}P_k(j, RP)$

$r_k(j, i) = \frac{1}{2}P_k(j, RP)$

고장은 그런데 모든 호에서 발생될 수 있기 때문에 그러한 모든 경우를 고려하면 각각의 마디 v_I 에 주어지는 가중치의 합이 계산된다. 이 가중치의 합을 $R(i, k)$라 하자.

그 때 임의의 센터 k 에서 각각의 모든 호$(i, j) \in A$ 를 관할할 때 마디 v_I에 주어지는 가중치의 합 $R(i, k)$는 다음과 같이 계산된다.

$R(i, k) = \sum_{j \in Link(i)} r_k(i, j)$

여기서 센터후보지로 모든 마디가 고려될 수 있기 때문에 실제 $R(i, j)$는 n×n 행렬로 나타나게 된다.

따라서 이러한 가중치를 고려할 때의 단일중계망유지보수센터의 배치문제는 다음과 같은 1-Median 문제가 된다.

$\text{Min} \sum_i \sum_j R(i, j) \times d_{IJ} \times X_{IJ}$

$\text{s. t.} \sum_j X_{IJ} = 1 \ \forall \ i$

$\sum_i X_{JJ} = 1$

$X_{jj} \geq X_{ij} \ \forall\, i, j (i \neq j)$

$X_{ij} \in \{0, 1\}$

여기서

$R(i, j)$: 마디 v_i 의 가중치

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 : \text{마디 } v_i \text{가 센터 } j\text{의 서비스를 받으면} \\ 0 : \text{그렇지 않으면} \end{cases}$$

$$X_{jj} = \begin{cases} 1 : \text{마디 } v_j \text{에 센터가 설치되면} \\ 0 : \text{그렇지 않으면} \end{cases}$$

지금까지 센터 k 에서 각각의 모든 호$(i, j) \in A$ 를 한번씩 방문하고 센터로 복귀하는 문제가 일반 Median 식과 같은 형태로 변환될 수 있음을 보았다. 따라서 해를 구하기 위해서는 일반 1-Median 구하는 계산 방법만 살펴보면 된다. 1-Median 구하는 문제는 NP-hard 로 알려진 p-Median 문제를 푸는 것 보다 좀 더 쉽게 열거법이나 다른 여러 방법을 이용해 해를 구할 수 있다. 열거법은 Hakimi[8]가 무방향 네트워크에서 Absolute Median 을 구하기 위해 사용한 방법으로써 모든 가능한 해를 나열하여 그 중에서 최적해를 구하는 방법이다.

일반적으로 모든 마디간의 최단거리행렬을 구하는데 $O(n^3)$이 소요된다. 임의의 센터 k 에서 모든 호$(i, j) \in A$ 의 고장을 한번씩 수리하고 센터로 복귀하는 문제는 호의 수를 m, 마디의 수를 n 이라 할때(대개 $m \geq n$) $O(nm)$이 소요되고, 변환된 Median 문제는 $O(n^2)$이 걸린다.

단일 중계망유지보수센터 배치문제를 풀기 위해선 먼저 주어진 거리행렬에서 각 마디에 연결되어 있는 호의 수를 구한다. 다음 모든 두 지점간의 최단 거리 행렬을 구한다. 모든 두 지점간의 최단 거리행렬의 계산은 두 지점간의 최단거리를 구하는 Dijkstra 방법을 반복 적용하여 구할 수 있다.[1]

열거법을 사용한 단일 중계망 유지 보수센터 배치문제의 알고리즘은 다음과 같다.

단계 1 : $k = 1$ 로 놓는다.

$cent = k$

단계 2 : $g(k)$ 계산

$g(k) = \sum_i w_i d_{ki}$

단계 3 : $k = k+1$

단계 4 : 만일 $k > n$ 이면 정지. 최적 센터 = cent

그렇지 않으면 단계 5 로 간다.

단계 5 : $g(k)$ 계산

$g(k) = \sum_i w_i d_{ki}$

단계 6 : 만일 $g(k) > g(cent)$이면 단계 3 으로 간다.

그렇지 않으면 $cent = k$, 단계 3 으로 간다.

4. 결 론

중계망 유지보수센터는 통신망을 효율적으로 관리하기 위한 운용보전 체제의 하나로서 중계시설과 국간중계선의 유지보수에 관한 업무를 수행한다. 이 논문에서는 고장이 각 마디에서 발생되는 것이 아니라 마디와 마디를 연결하는 호상에서 발생되는 상황하에서 센터를 마디에 배치하는 문제를 연구하였다.

또한 임의의 지점에서 고장이 발생될 확률이 호상 어디에서나 균등하다는 가정하에, 센터로 돌아가는 방법으로 왔던 길로 되돌아갈 수 있는 경우와 되돌아갈 수 없는 경우의 두 상황을 고려하였다.

결론적으로 단일 중계망 유지보수센터 배치문제에서는 센터에서 각각의 모든 호$(i, j) \in A$ 를 관할하는 문제가 모든 마디를 관할하는 문제인 일반 Median 형태의 문제로 변환될 수 있었다.

Reference

1. 박순달, OR(경영과학), 대영사, 1984.
2. 서울대학교 부속 생산기술연구소, 운용보전센터배치에 관한 연구, 1987. 12.
3. Barbaros C. Tansel, Richard L. Francis and Timothy J. Lowe, "Location on Networks : A Survey Part I : The P-Center and P-Median Problems", Management Sci., Vol.29, No.4 (1983), pp 482-511.
4. Berman, O and Simch Levi, D., "Minisum Location of a Traveling Salesman", Networks, Vol.16(1986), pp 239-254.
5. Fisher, M. L., "The Lagrangean Relaxation Method for Solving Integer Programming Problems", Management Sci., Vol.27, No.1(1981), pp 1-18.
6. Frank, H., "Optimum Locations on a Graph with Probabilitic Demands", Operations Res., Vol.14(1966), pp 409-421.
7. Galvao, R. D., "A Dual-Bounded Algorithm for the P-Median Problem", Operations Res., Vol.28(1980), pp 1112-1121.
8. Hakimi, S. L., "Optimal Locations of Switching Centers and the Absolute Centers and Medians of a Graph", Operations Res., Vol.12(1964), pp 450-459.
9. Handler, G. Y. and Mirchandani, P. B., Location on Networks, M.I.T. Press, Cambridge, MA. 1979.
10. Halpern, J., "Finding Minimal Center-Median Convex Combination(Cent-Dian) of a Graph", Management Sci., Vol.24, No.5(1978), pp 535-544.
11. Kariv, O. and Hakimi, S. L., "An Algorithm Approach to Network Location Problems. Part 2 : The P-Medians", SIAM J. Appl. Math., Vol.37(1979), pp 530-560.
12. Mirchandani, P. B., and Odoni, A. R., "Locations of Medians on Stochastic Networks." Transportation Sci., Vol.13(1979), pp 85-97.
13. Moon, I. D. and Chaudhry, S. s., "An Analysis of Network Location Problems with Distance Constraints", Management Sci., Vol.30, No.3(1984), pp 290-307.
14. Narula, S. C., Ogbu, V. I. and Samulesson, H. M., "An Algorithm for the P-Median Problem", Operations Res., Vol.25(1977), pp 709-712.
15. Pertti Jarvinen, Rajala, and Heikki Sinervo, "A Branch-and-Bound Algorithm for Seeking the P-Median", Operations Res., Vol.20(1972), pp 173-178.
16. Weaver J. R. and Church R. L., "Computational Procedures for Location Problems on Stochastic Networks", Transportation Sci., Vol.17, No.2(1983), pp 168-180.