

얇은 流體層에 있어서 自然對流의 不安定性

Instabilities of Natural Convection in a Shallow Fluid Layers

梁 承 孝* 朴 贊 國**

Yang, Soong-Hyo Park, Chan-Kuk

ABSTRACT

The characteristics of thermal instabilities of natural convection in a horizontal fluid layer bounded below by a rigid plate and above by an interface with a passive gas is presented. The critical Grashof number decreases as the surface tension gradient effect (Marangoni effect) at the interface increases and the flow remains unstable for a critical Marangoni number depending on Prandtl numbers. These results are in substantial agreement with those of Smith and Davis.

1. 緒 論

수평방향으로 온도 구배가 있는 유체층은 單一細胞 유동(unicellular flow)을 하는 Hadley 유동을 형성하며 특히 유체층이 상당히 얇은 경우에는 수평방향의 兩端과 중심부분을 제외한 대부분의 구역에서 유체는 평행유동을 하게 된다. 이와같이 형성되는 자연대류유동에서 Hurle 등¹⁾은 양단에 가해지는 온도의차가 일정한계를 넘으면 열적불안정이 발생하는것을 실험적으로 관찰하였으며 Gill²⁾은 攝動方法을 통한 불안정성 해석에서 非定常狀態의 불안정성이 발생할 수 있음을 확인하고 이 결과가 Hurle 등의 결과와 대략 일치하는 것을 보고하였다. Hart³⁾는 단열된 수평 고체경계면을 갖는 Hadley 유동에 대하여 더욱 정확한 기본유동(basic state flow)을 바탕으로 攝動

解析을 수행하고 그 결과 Prandtl 수가 대략 0.01 보다 작은 범위에서는 기본유동과 수직방향으로 나타나는 定常狀態의 橫方向 롤(transverse roll)이 형성되어 불안정성을 주도하며 Prandtl 수가 0.01 보다 큰 경우는 기본유동과 평행되는 非定常狀態의 縱方向 롤(Longitudinal roll)이 불안정성을 지배하는 것을 보였으며 또한 이를 실험적으로 확인하였다. Kuo 등⁴⁾은 더 넓은 범위의 Prandtl 수에 대하여 역시 攝動解析을 수행하였으며 이들의 결과는 Hart의 결과와 경향이 거의 일치하는 것으로 나타났다.

표면장력은 일반적으로 온도의 증가에 따라 감소하며 수평방향으로 온도구배를 갖는 유체층의 上部面이 다른 유체와 접하면 표면장력의 구배에 의하여 Marangoni 유동이 발생하며 Pearson⁵⁾, Scriven과 Sternling⁶⁾,

* 正會員: 全南大學校 工科大學

** 全南大學校 工科大學

Kenning⁷⁾ 등에 의하여 보고된 바 있다. Smith 등⁸⁾ 은 수직방향으로 선형 속도분포를 갖거나 귀환하는 유동의 자유표면에 연하여 온도구배가 있을 때 표면장력에 의하여 발생하는 열적 불안정성을 고찰하였다. 한편 Ochiai 등⁹⁾ 은 수평방향의 양단에 온도차가 주어지고 동시에 이 온도차에 의한 표면장력의 구배를 첨가한 자연대류 유동을 수치해석 내지 실험적으로 고찰하고 유체층내의 속도분포를 정확히 결정하였으며 森岡幹雄 등¹⁰⁾ 도 표면장력의 영향을 받는 수평유체층의 속도 및 온도분포와 더불어 열전달계수에 대하여 고찰한 바 있다.

본 연구에서는 유체층내에 작용하는 密度勾配에 의한 浮力과 界面에서 작용하는 표면장력의 효과를 동시에 고려한 조건에서 線型 攝動解析을 이용하여 자연대류의 열적 불안정성을 고찰하였다.

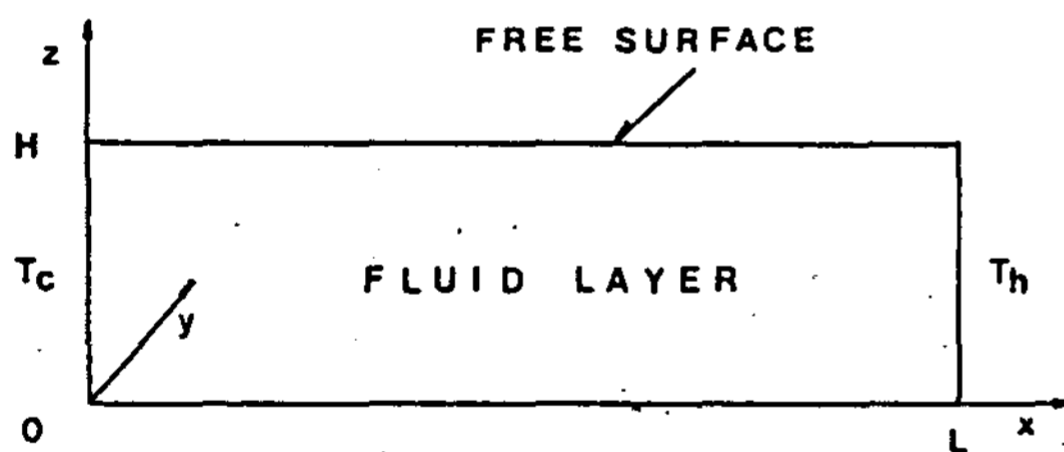


Fig.1 Sketch of Shallow Cavity

2. 不安定性 解析

언급한 바와 같이 Fig.1 과 같은 유체층에 대하여 불안정성은 2가지 형태로 나타나며 橫方向 亂의 波數를 a, 縱方向 亂의 波數를 b라 하고 攝動成分을 다음과 같이 표현하였을 때

$$f = F(z)e^{\omega t + i(ax + by)} \dots\dots\dots(1)$$

a = 0 이면 縱方向 亂이며 b = 0 이면 橫方向 亂이 된다. Boussinesq 近似를 적용한 운동

량 및 에너지방정식에서 선형화된 攝動方程式을 만들면 縱方向 亂에 대해서는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} (D^2 - b^2)^2 w - b^2 \theta &= \omega(D^2 - b^2)w \\ (D^2 - b^2)u - Gr \frac{dU_b}{dz} w &= \omega u \\ (D^2 - b^2)\theta - Ra \frac{dT_b}{dz} w - Ra u &= \omega Pr \theta \end{aligned} \dots\dots\dots(2)$$

한편 橫方向 亂에 대한 攝動方程式은

$$\begin{aligned} (D^2 - a^2)^2 w - i a Gr [U_b (D^2 - a^2) w \\ - \frac{d^2 U_b}{dz^2} w] &= (D^2 - a^2)w \\ (D^2 - a^2)\theta - i a Ra U_b \theta - Ra \frac{dT_b}{dz} w \\ - i Ra Dw/a &= \omega Pr \theta \end{aligned} \dots\dots\dots(3)$$

으로 나타나며 여기에서 D는 d/dz이다. 위의 식 (1)~(3)에서 나타나는 변수는 시간, 길이, 속도, 온도에 대하여 각각 H²/ν, H, gβΔTH³/ν, ΔTH/L 을 기준치로 삼아 무차원화시킨 것이며 u, w, θ, ω는 각각 x방향의 섭동속도, z방향의 섭동속도, 섭동온도, 섭동주파수를 나타낸다. 또한 Gr은 Grashof 수, Ra는 Rayleigh 수, Pr은 Prandtl 수이며 다음과 같이 정의되었다.

$$\begin{aligned} Gr &= g\beta\Delta TH^4 / \nu^2 L \\ Pr &= \nu / \alpha \\ Ra &= GrPr \end{aligned}$$

또한 U_b, T_b는 기본상태의 속도 및 온도분포이며 Ochiai 등에 의하여 다음과 같이 주어진다.

$$U_b = (z^3/6 - 5z^2/16 + z/8)$$

$$-\frac{M}{Ra} (3z^2/4 - z/2)$$

$$T_b = Ra(z^5/120 - 5z^4/192 + z^3/48)$$

$$-M(z^4/16 - z^3/12) + x \dots\dots\dots(4)$$

위 식에서 M은 Marangoni 수로 ds/dT가 표면장력의 구배일 때

$$M = \left| \frac{ds}{dT} \frac{\Delta T H^2}{\mu \alpha L} \right|$$

로 정의되었다. Fig.2는 기본상태의 속도와 온도분포를 M이 0일 때와 0이 아닐 때의 경우에 대하여 도시한 결과이며 자유표면에서 Marangoni 효과에 의한 영향이 나타나고 있음을 볼 수 있다.

縱方向 룰에 대한 경계조건은

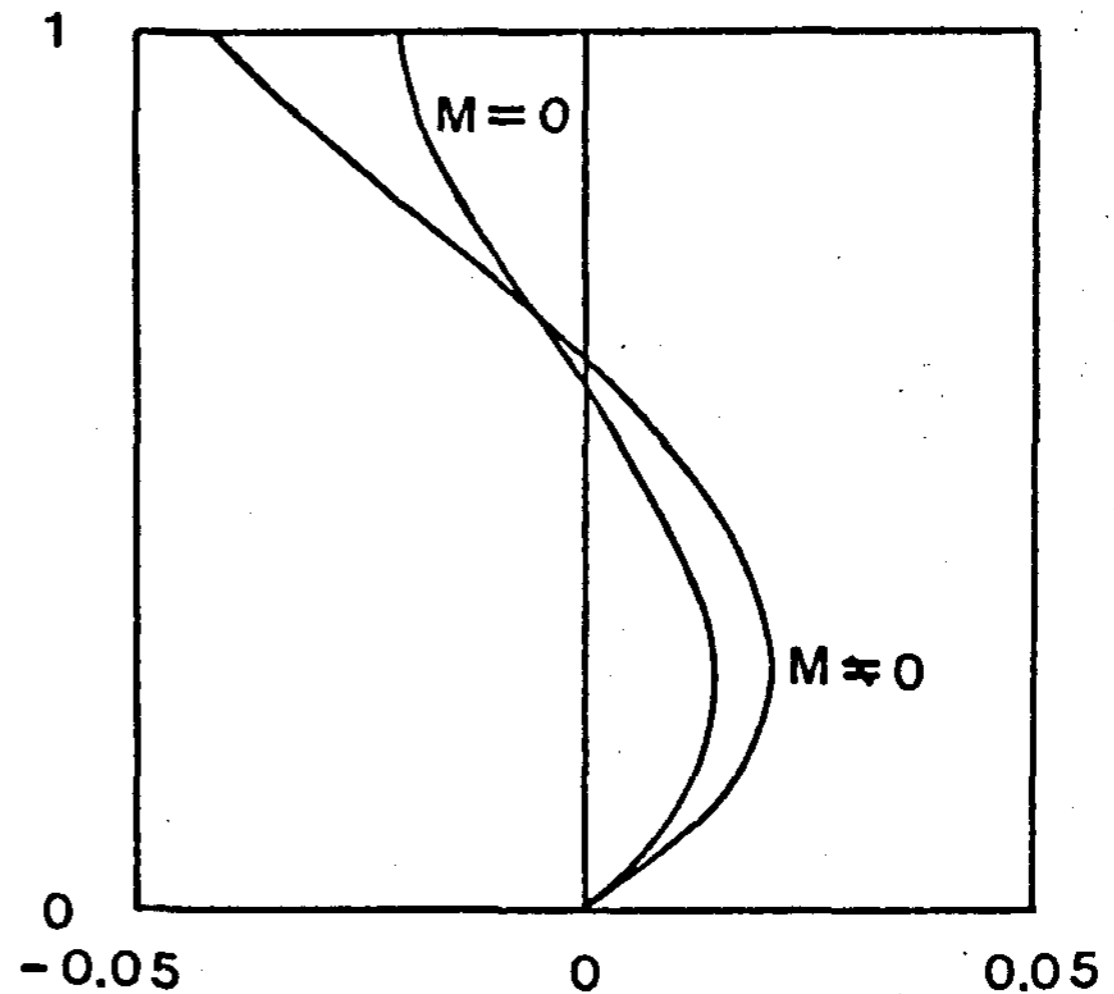
$$\begin{aligned} w = u = Dw = D\theta = 0 \quad z = 0 \\ w = 0 \\ Du = 0 \\ (D^2 + b^2)w = -M/Ra \quad a^2 \theta \quad z = 1 \\ D\theta + B\theta = 0 \quad \dots\dots\dots(5) \end{aligned}$$

이때 橫方向 룰에 대하여는

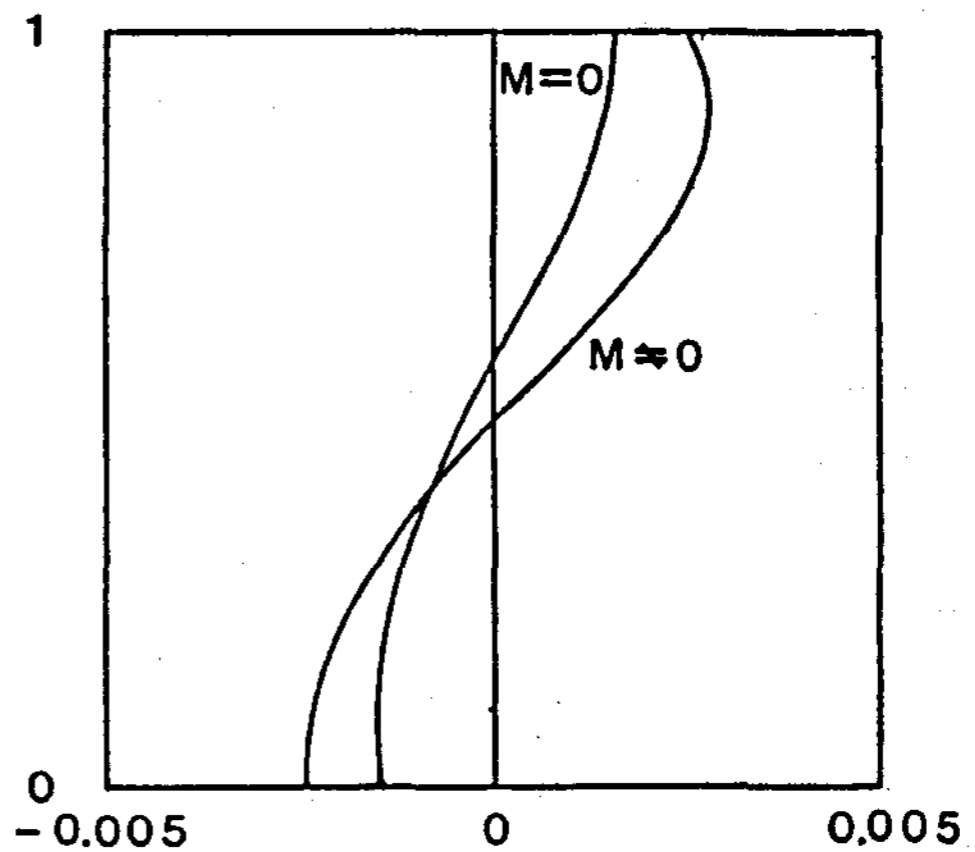
$$\begin{aligned} w = Dw = D\theta = 0 \quad z = 0 \\ w = 0 \\ (D^2 + a^2)w = -M/Ra \quad a^2 \theta \quad z = 1 \\ D\theta + B\theta = 0 \quad \dots\dots\dots(6) \end{aligned}$$

로 나타난다. 여기에서 $B = hH/k$ 로 Biot 수이며 h는 계면에서의 열전달계수이다. 섭동온도와 속도를 Chebyshev 급수로 전개하여 섭동방정식과 경계조건에 대입하면 식 2)와 5), 또 식 3)과 6)은 縱方向 및 橫方向 룰 각각에 대하여 a 혹은 b, Gr, ω 를 固有値로 하는 固有値 문제가 되며 이의 해석을 위한 수치해법은 縱方向에 대해서는 QZ 알고리즘을, 또 橫方向에 대해서는 IMSL 서브루틴 EIGZC를

이용하였다.



1) Velocity Profiles



2) Temperature Profiles

Fig. 2 Velocity and Temperature Profiles of Basic State

3. 數值計算 結果 및 考察

Fig. 3은 Marangoni 효과가 없을 때 Prandtl 수에 따른 臨界 Grashof 수의 변화를 도시한 결과이다. 그림에서 Prandtl 수가 0.01 보다 작은 범위에서는 非定常狀態의 橫方

向 롤이 유동의 불안정성을 주도하며 0.01보다 큰 범위에서는 縱方向의 롤이 불안정성을 지배하고 있음을 알 수 있다. 그러나 Prandtl 수가 약 0.4보다 큰 범위에서는 非定常 縱方向 롤은 거의 나타나지 않으며 오히려 定常狀態의 縱方向 롤이 불안정성을 지배하고 있다. 도시한 Grashof 수의 범위에서 Prandtl 수가 0.4보다 큰 범위에서는 非定常狀態의 縱方向 롤의 발생을 발견할 수가 없었다. 또한 非定常狀態의 縱振動은 주파수가 $0 \pm i\omega$ 의 형태로 나타났으나 橫振動의 경우 하나의 虛量 周波數가 나타났으며 이 경우 물리적현상으로써 가능한지 여부는 미지수이다. 또한 Marangoni 效果가 중첩이 되는 경우 橫振動에 대한 臨界 Grashof 수는 급격히 증가하였으며 이는 Fig.9-4)의 섭동온도와 속도분포도에서 보는 바와같이 수직 방향의 속도성분이 -일 때에 섭동온도가 +로 나타나며 섭동온도가 오히려 표면장력의 효과를 감소시키는 역할을 하고 있다.

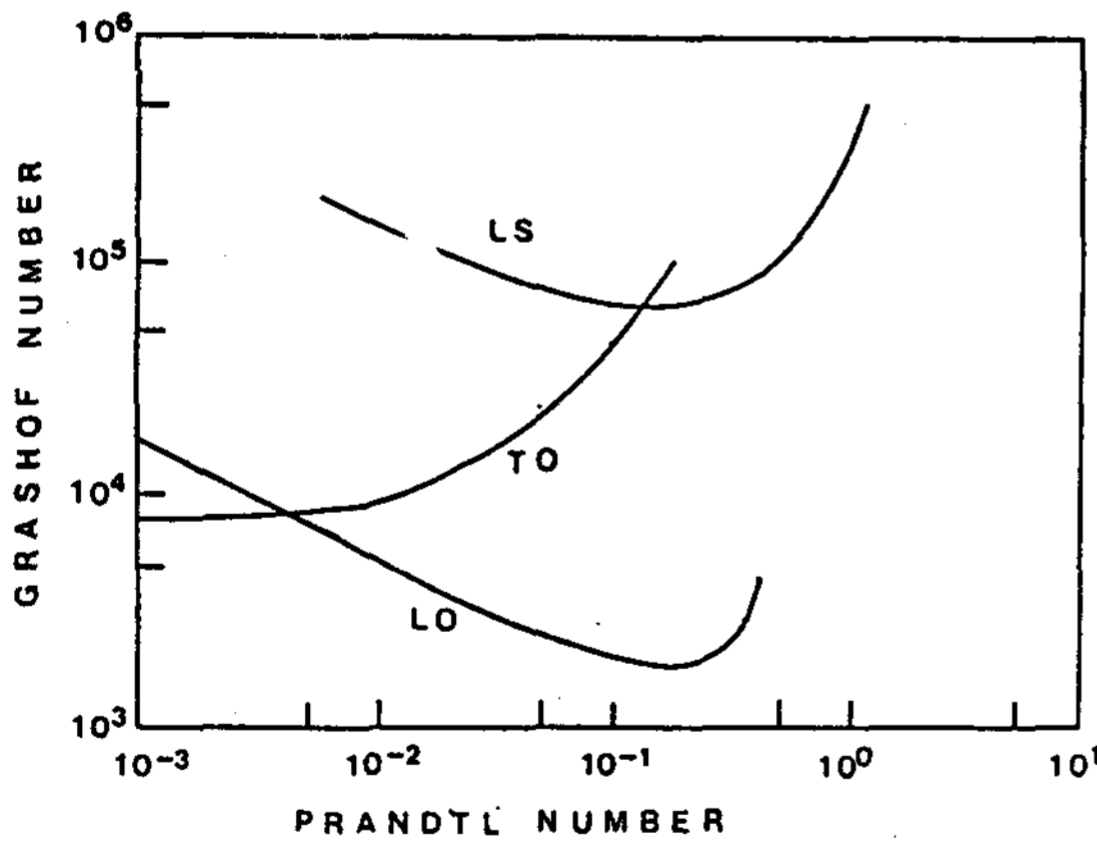


Fig. 3 Critical Grashof Numbers as a Function of Prandtl numbers, $M = 0$.
 LO = Longitudinal oscillatory modes, LS = Longitudinal stationary modes, TO = Transverse oscillatory modes

Fig.4와 5는 $M=0, B=0$ 일 때 종방향 롤의 臨界周波數와 波數를 나타낸 것으로 상하가 고체경계면인 경우와 비슷한 경향을 나타내고 있다. 유체의 자유표면에서 열전달이 있는 경우 임계 Grashof 수와 波數는 증가하는 경향을 보이는데 Fig.6에 $Pr=0.02, B=0, M=0$ 인 경우에 대한 결과를 도시하였다. 열전달이 증가함에 따라 불안정성의 형성이 어려워지는 것은 롤의 형성을 위하여 계면에서의 熱點과 冷點의 形成이 어려워졌기 때문으로 판단되며 이러한 경향은 Smith 등의 결과와 같은 경향을 보이고 있다.

Fig.9-1은 $M=0$ 일 때 형성되는 비정상종방향 롤의 섭동속도와 섭동온도를 나타낸 것으로 수직방향의 섭동속도가 -일 때 섭동속도도 -인 것을 볼 수 있다. 따라서 Marangoni 效果가 작용하면 롤의 형성은 더욱 용이할 것으로 판단되며 Fig.7에서 보는 바와같이 Marangoni 수가 증가함에 따라 臨界Grashof 수는 급격히 감소하며 一定 한계를 넘는 Marangoni 수에 대해서는 유동은 항상 불안정

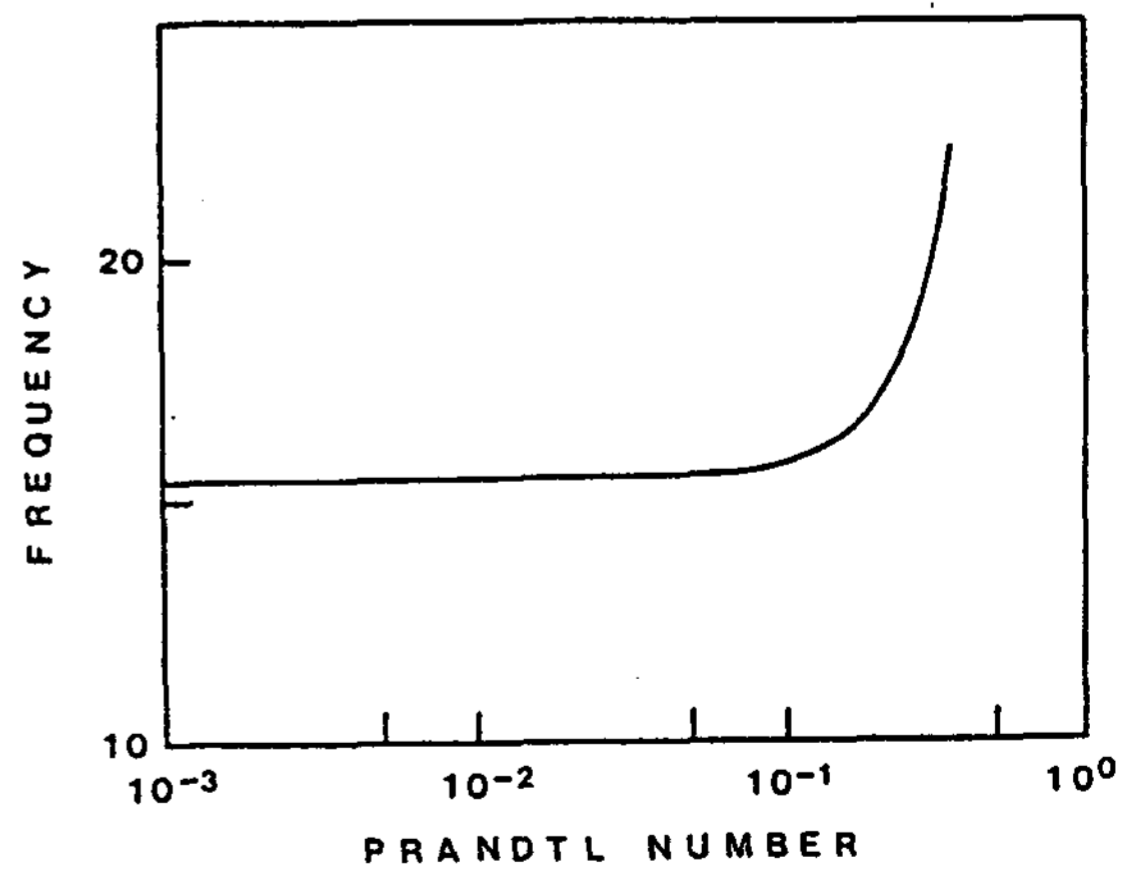


Fig. 4 Critical Frequency for the Longitudinal Oscillatory Modes, $M = 0$

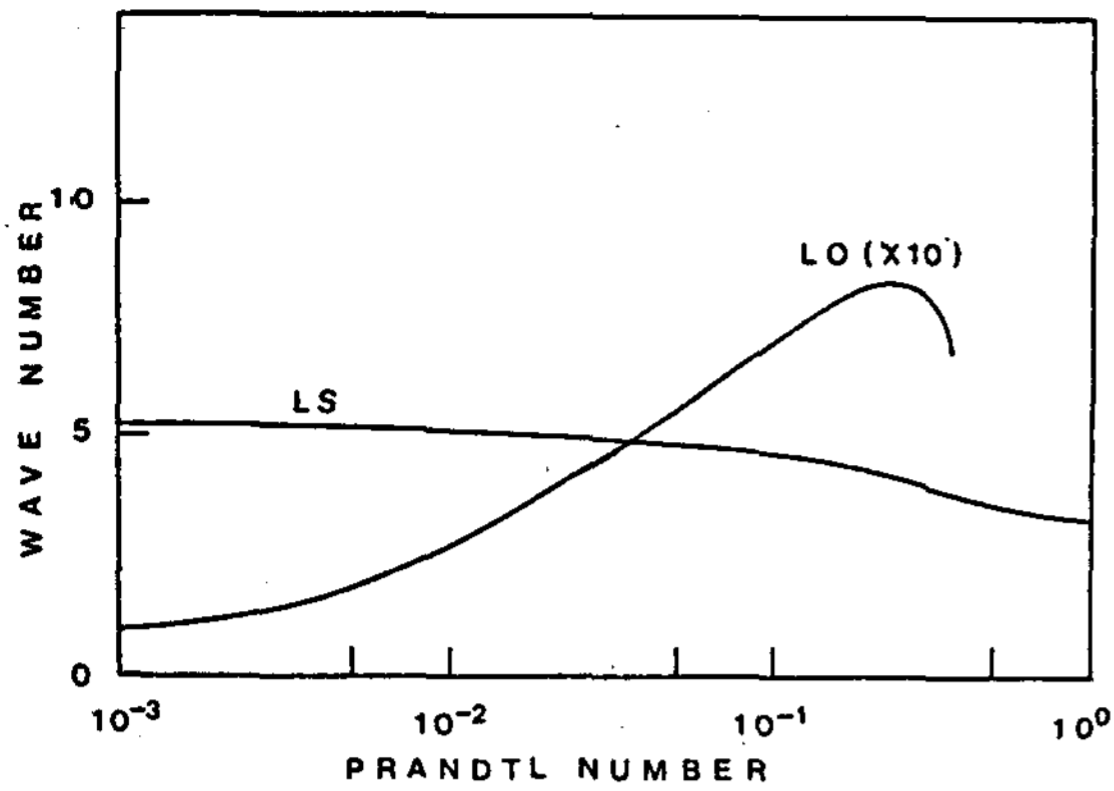


Fig. 5 Critical Wave Numbers for the Longitudinal Oscillatory Modes, $M = 0$

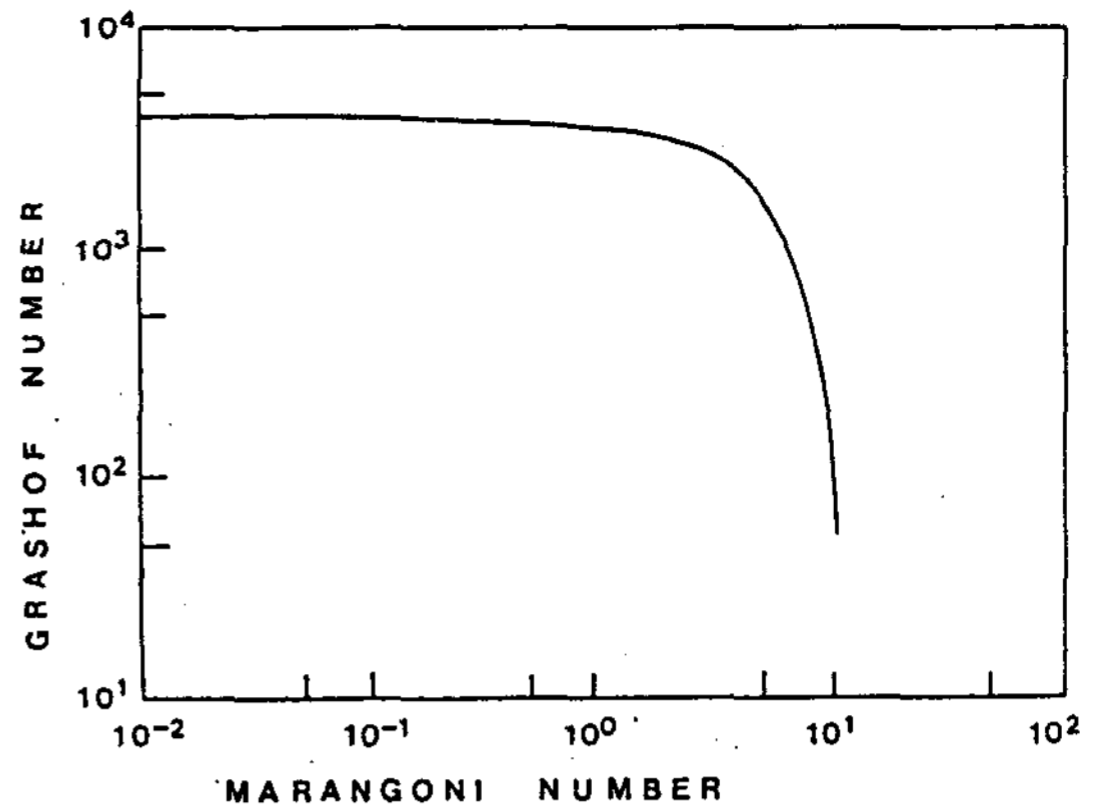


Fig. 7 Critical Grashof Numbers as a Function of Marangoni Number, $Pr = 0.02$

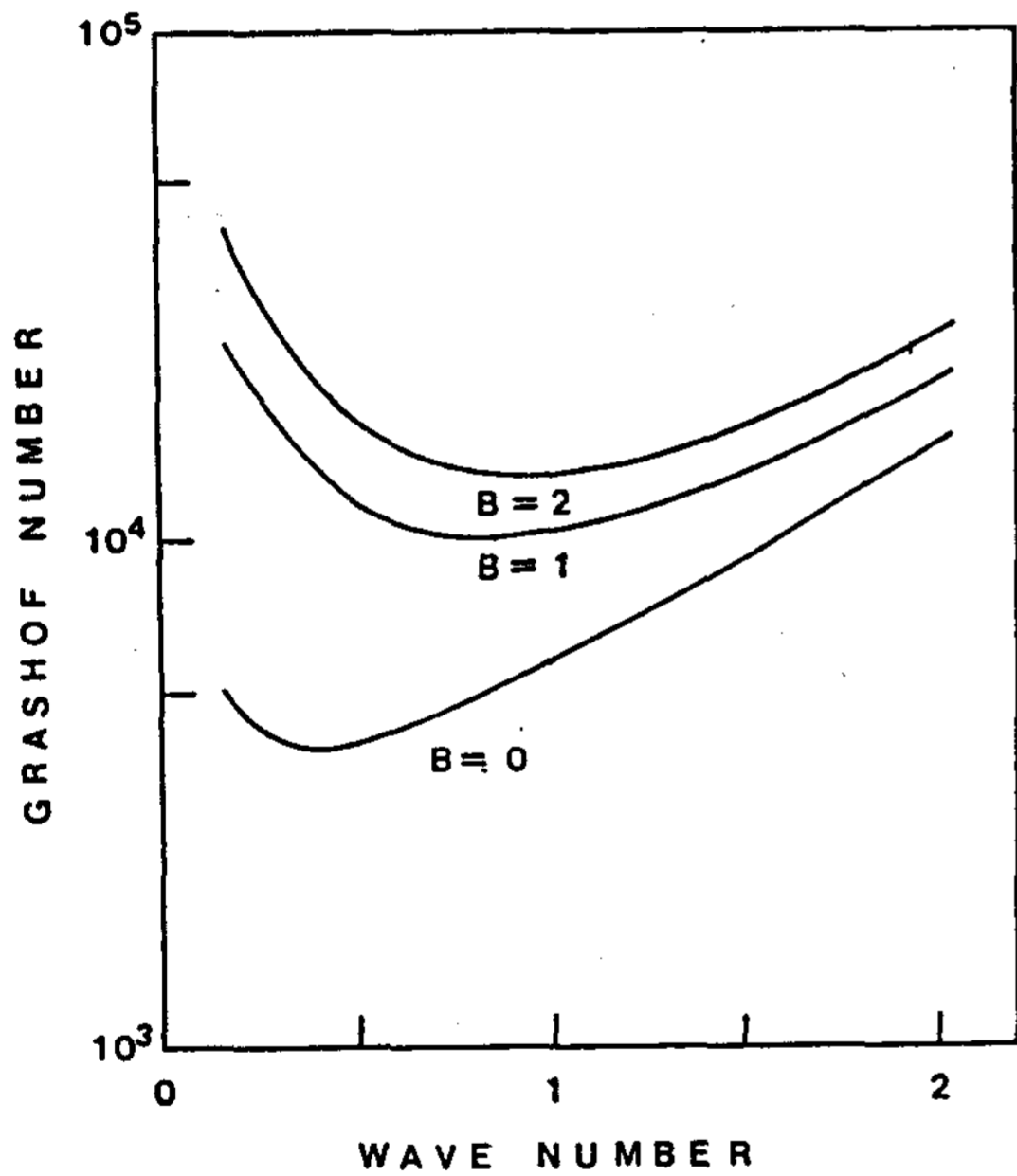


Fig. 6 Neutral Stability Curves in terms of Biot Numbers, $M = 0$, $Pr = 0.02$

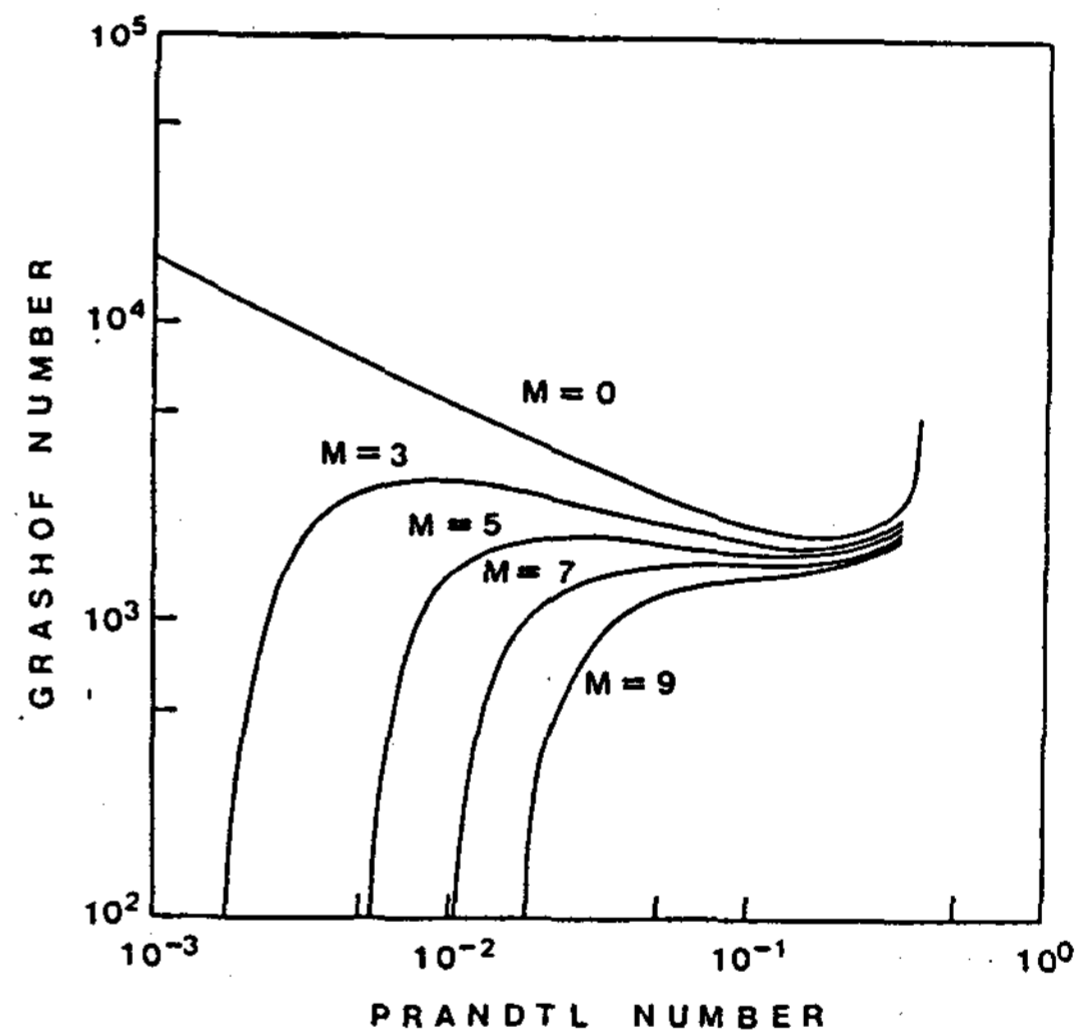
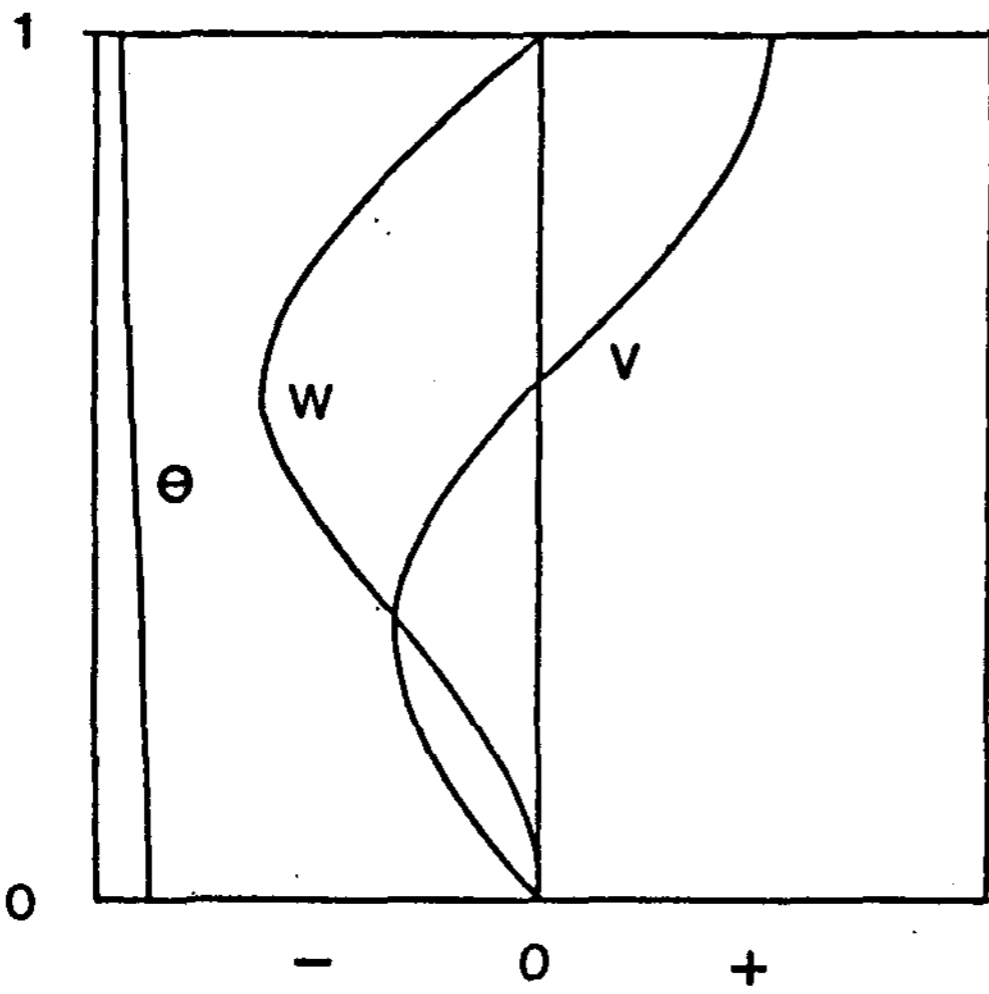


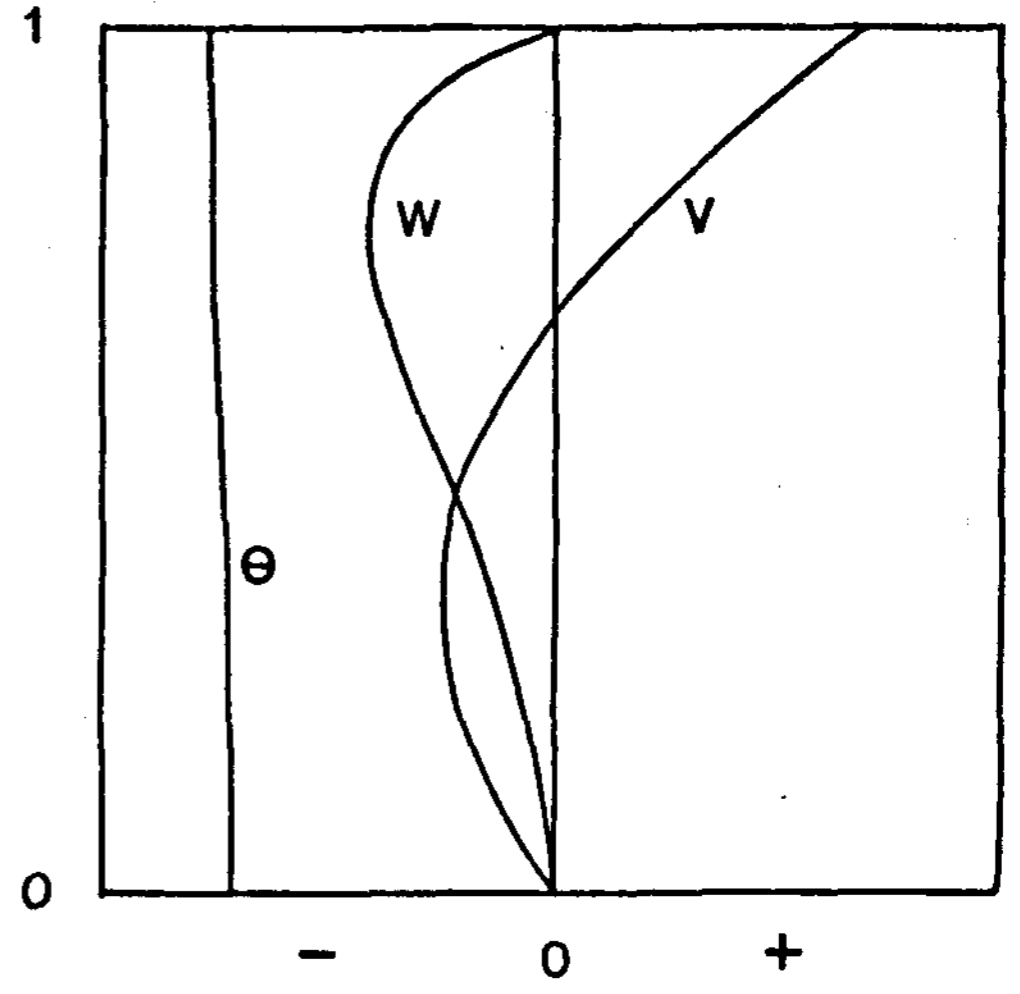
Fig. 8 Critical Grashof Numbers as a Function of Prandtl Numbers in terms of Marangoni Numbers

할 수 있음을 보여준다. 이러한 경향은 Prandtl 수가 작을수록 심하게 나타나는 것을 Fig. 8에서 볼 수 있다. Fig. 8에서 임계 Grashof 수가 0이 되는 臨界 Marangoni 수는 Prandtl 수에 따라 증가하며 이 경향은 역시 Smith 등의 경향과 일치하고 있으나 Prandtl 수가 작

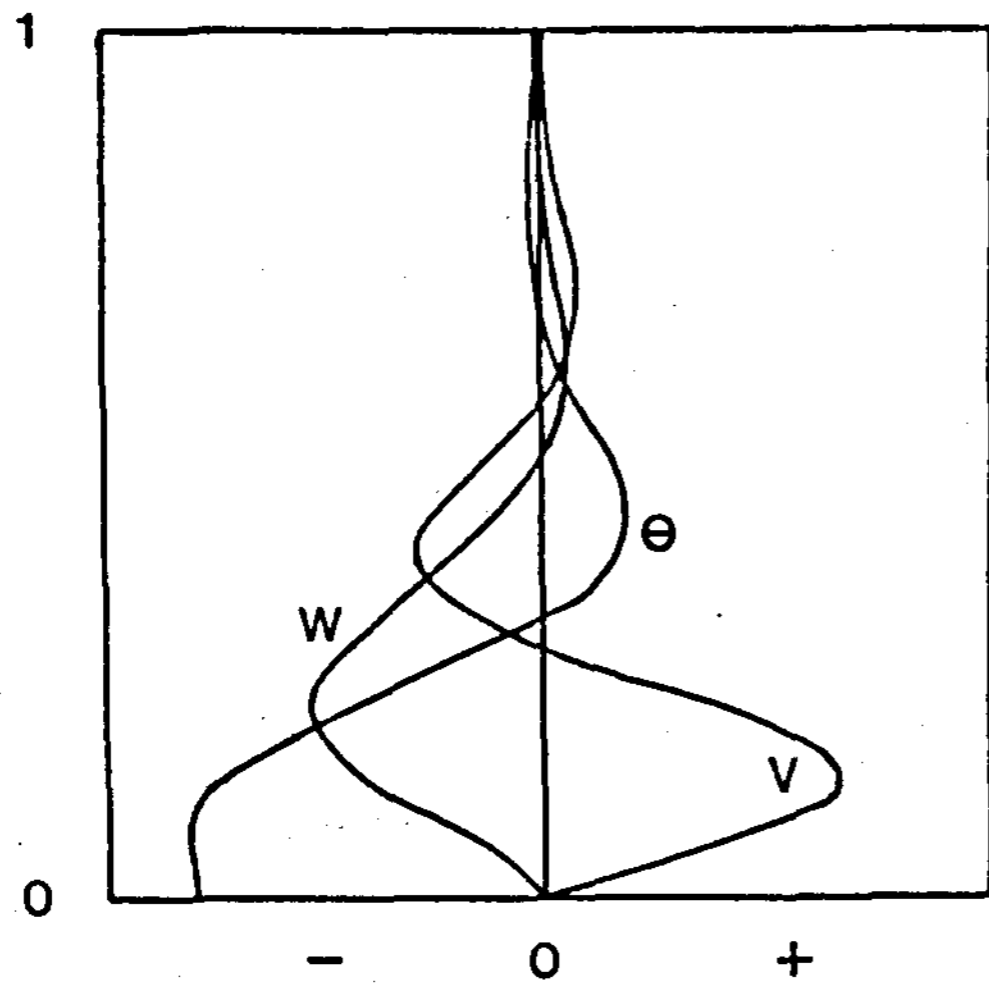
을수록 표면장력의 영향이 더욱 심하게 나타나는가 하는 문제는 아직 판단하지 못하고 있다. Fig. 7과 Fig. 8은 $M=0$ 일 때, 波數와 周波數를 나타낸 결과이며 Marangoni 효과가 작용할 때의 波數와 周波數는 거의 변화를 보이지 않았다.



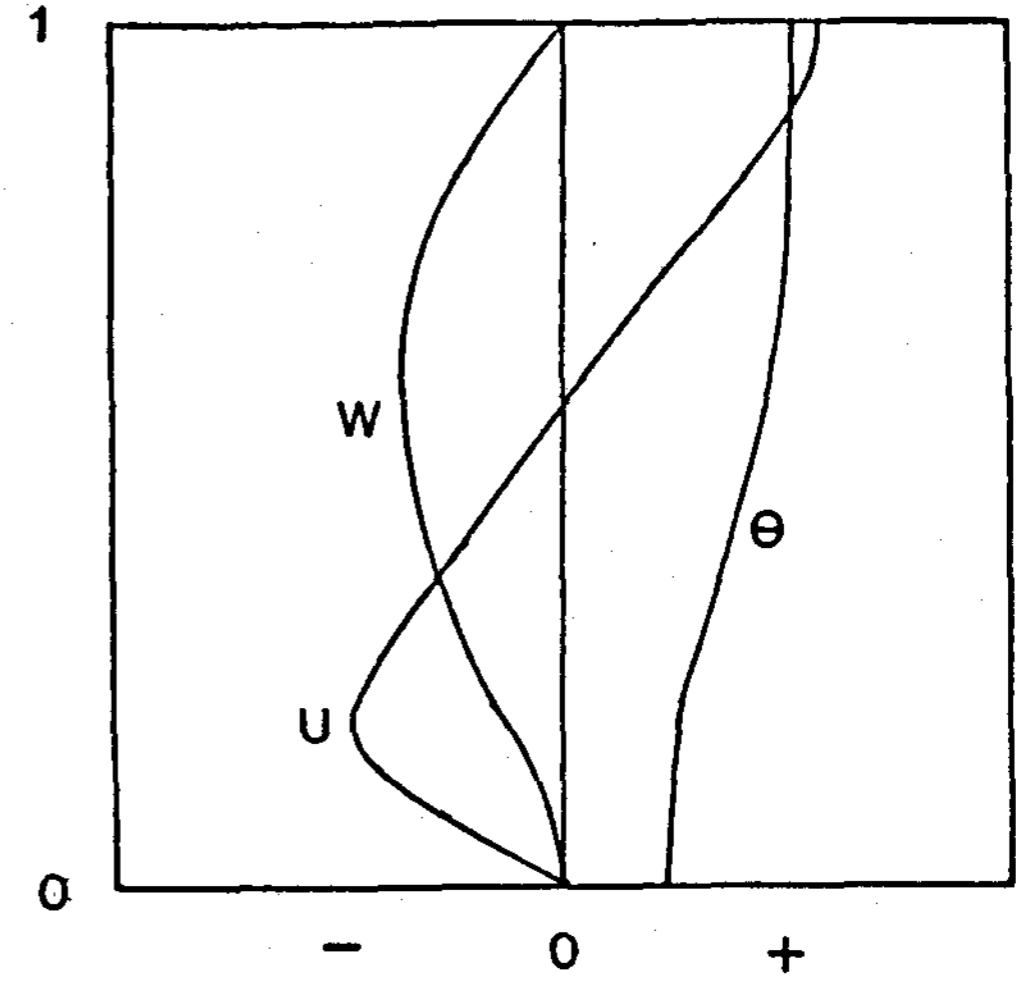
1) Longitudinal Oscillatory Modes, $M = 0$



2) Longitudinal Oscillatory Modes, $M = 0$



3) Longitudinal Stationary Modes, $M = 0$



4) Transverse Oscillatory Modes, $M = 0$

Fig. 9 Profiles of Perturbation Velocity and Temperature, $Pr = 0.02$

4. 結 論

양단에 온도차가 있는 수평 유체층 내에서 密度勾配에 의한 浮力과 界面에서 작용하는 표면

장력의 구배에 의한 단일세포유동의 熱的 不安定性을 攝動解析을 통하여 고찰하고 Prandtl 수가 0.4 보다 작은 범위에서 유동의 불안정성은 거의 非定常 縱方向 渦에 의하여 주도되고

있으며 표면장력의 효과가 증가할수록 臨界 Grashof 수는 감소하는 것을 확인할 수 있었다. 臨界 Grashof 수가 거의 0이 되는 臨界 Marangoni 수는 Prandtl 수가 증가할수록 증가하였으며 이는 Smith 등의 결과와 경향이 일치하고 있다. 또한 계면에서 傳熱이 증가할수록 臨界 Grashof 수가 거의 0이 되는 臨界 Marangoni 수는 Prandtl 수가 증가할수록 증가하였으며 이는 Smith 등의 결과와 경향이 일치하고 있다. 또한 계면에서 傳熱이 증가할수록 臨界 Grashof 수는 증가하였다. 攝動溫도와 攝動速度로부터 일부 유동구조는 고찰할 수 있었으나 전반적인 유동구조에 대한 구멍이 더욱 요구될 것으로 판단하였다.

附 記

본 논문은 1987년 文敎部 學術研究造成費에 의하여 연구되었으며 文敎部の 지원에 심심한 謝意를 표합니다.

記 - 號 說 明

- a : 橫方向 틀의 波數
- b : 縱方向 틀의 波數
- B : Biot 數
- D : 미분연산자, d/dz
- g : 중력가속도
- Gr : Grashof 數
- H : 유체층의 높이
- i : 虛數
- L : 유체층의 길이
- M : Marangoni 數
- Pr : Prandtl 數
- Ra : Rayleigh 數
- S : 표면장력
- T : 온도

- u, v, w : x, y, z 방향의 섭동속도
- x, y, z : 좌표계
- 회랍문자
- α : 熱擴散係數
- β : 熱膨脹係數
- ν : 動粘性係數
- θ : 攝動溫度
- ω : 攝動周波數

參 考 文 獻

1. Hurle, D.T.J., Jakeman, E. and Johnson, C.P. "Convective Temperature Oscillations in Molten Gallium." J. Fluid Mech., vol. 64, p.565, 1974.
2. Gill, A.E. "A Theory of Thermal Oscillations in Liquid Metals." J. Fluid Mech., vol. 64, pp. 577-588, 1974.
3. Hart, J. "A Note on the Stability of Low-Prandtl number Hadley Circulations." J. Fluid Mech., vol. 132, pp. 271-281, 1983.
4. Kuo, H.P., Korpela, S.A., Chait, A. and Marcus, P.S. "Stability of Natural Convection in a Shallow Cavity." IHTC vol. 4, pp. 1539-1544, San Francisco, 1986.
5. Pearson, J.R.A. "On Convective Cells Induced by Surface Tension." J. Fluid Mech., vol. 4, p. 489, 1958.
6. Scriven, L.E., Sternling, C.V. "The Marangoni Convection." Nature, vol. 187, p. 187, 1960.
7. Kenning, D.B.R. Appl. Mech. Rev., vol. 21, p. 1101, 1968.
8. Smith, M.K. and Davis, S.H. "Instabilities of Dynamic Thermocapillary Liquid Layers." J. Fluid Mech., vol. 132, pp. 119-144, 1983.

9. Ochiai, J., Kuwahara, K., Morioka, M., Enya, S. and Sezaki, K. "Experimental Study on Marangoni Convection." proc. of 5th European Symposium on Material Sciences under Microgravity, pp. 291-295, Schloss Elman, 1984.
10. 森岡幹雄, 落合淳一, 桑原啓一, 鹽治震太郎 "宇宙での材料製造時に発生する融液中の対流" 第23回日本傳熱 symposium 講演論文集 Vol.5, pp.397~399, 1986.
11. Garbow, B.S., Boyle, J.M., Dongarra, J.J. and Moler, C.B. Matrix Eigensystem Routines - EISPACK Guide Extensions - Springer Verlag, Heidelberg, 1977.
12. Orszag, S.A. "Accurate Solution of Orr-Sommerfeld Stability Equation." J. Fluid Mech., vol. 50, pp.689-703, 1971.