Comm. Korean Math. Soc. 3 (1988), No. 1, pp. 45~50

BOCHNER 적분에 대한 비대칭 FUBINI정리*

장건수 • 안재문 • 류근식

1941년 R.H. Cameron과 W.T. Martin은 Lebesgue-Stieltjes적분에 대한 비대칭 Fubini정리를 증명하였고[1], 1984년 G.W. Johnson은 Borel 측도공간에서의 적분에 대한 비 대칭 Fubini정리를 증명하였다[7]. 이 결과들은 Feynman적분 연구에 크게 기여하여왔다[2]. 이 논문에서는 지금까지 알려진 것보다 더욱 일반적이고, 또 앞의 정리들을 포함하는 비대칭 Fubini정리를 증명하려고 한다.

편의상, 참고문헌 [6]의 내용을 잘 알고 있다고 하고, 모든 용어를 이 책의 용어로 사용하겠다. 또 이 논문 전체를 통하여 다음과 같은 표기를 사용하겠다. B는 모든 복소수를 포함하고 있는 Banach공간이며, $(Y,\mathscr{Y})$와 $(Z,\mathscr{Z})$는 가측공간이고, m은 $(Y,\mathscr{Y})$ 위에서 정의된 부호를 갖는 유한측도(finite signed measure)이며, $\alpha_1=1$, $\alpha_2=-1$, $\alpha_3=i$ 그리고 $\alpha_4=-i$이다.

참고문헌 [7]의 Proposition의 증명과정과 비슷한 방법으로 다음과 같은 예비정리를 얻는다.

예비정리 1. $|m|$-a.e. $y(\in Y)$에 대하여, σ_y를 $(Z,\mathscr{Z})$ 위에서의 복소측도라 하자. 이때 임의의 $\mathscr{Z}$의 원소 E에 대하여 $\sigma_y(E)$가 $\mathscr{Y}$-가측함수이기 위한 필요충분조건은 임의의 $\mathscr{Y}\times\mathscr{Z}$의 원소 F에 대하여 $\sigma_y(F^{(y)})$가 $\mathscr{Y}$-가측함수인 것이다.

참고문헌 [3, Theorem 2]으로부터, 다음 예비 정리를 알 수 있다.

예비정리 2. 예비정리 1의 가정을 만족하고, 또한 $\|\sigma_y\|\leqq h(y)$를 만족하는 함수 h가 $L_1(Y,\mathscr{Y},|m|)$안에 있다고 하자. 이때 μ를 $\mathscr{Y}\times\mathscr{Z}$ 위에서 다음과 같이 정의된 집합함수라 하자.

$$\mu(F)=\int_Y \sigma_y(F^{(y)})\,dm(y) \quad F\in\mathscr{Y}\times\mathscr{Z}$$

Received January 12, 1988.

* 이 논문은 1987년도 문교부 자유공모과제 학술연구조성비에 의하여 연구되었음.

그러면 μ는 $\mathscr{Y}\times\mathscr{X}$ 위에서의 복소 측도이고, $\|\mu\|\leqq\|h\|_1$을 만족한다.

m의 Jordan분해를 $m^{(1)}-m^{(2)}$, Y의 원소 y에 대해서 σ_y가 존재할때 σ_y의 Jordan분해를 $\sigma_y^{(1)}-\sigma_y^{(2)}+i\sigma_y^{(3)}-i\sigma_y^{(4)}$라 하자. 이제 $\mathscr{Y}\times\mathscr{X}$의 원소 F에 대하여,

$$\lambda^{(1)}(F)=\int_Y\sigma_y^{(1)}(F^{(y)})dm^{(1)}(y)+\int_Y\sigma_y^{(2)}(F^{(y)})dm^{(2)}(y),$$

$$\lambda^{(2)}(F)=\int_Y\sigma_y^{(2)}(F^{(y)})dm^{(1)}(y)+\int_Y\sigma_y^{(1)}(F^{(y)})dm^{(2)}(y),$$

$$\lambda^{(3)}(F)=\int_Y\sigma_y^{(3)}(F^{(y)})dm^{(1)}(y)+\int_Y\sigma_y^{(4)}(F^{(y)})dm^{(2)}(y)\ \text{ and}$$

$$\lambda^{(4)}(F)=\int_Y\sigma_y^{(4)}(F^{(y)})dm^{(1)}(y)+\int_Y\sigma_y^{(3)}(F^{(y)})dm^{(2)}(y).$$

이라 하자. 그러면 참고문헌 [7]의 정리로부터, $\lambda^{(j)}(j=1,2,3,4)$는 모두 $\mathscr{Y}\times\mathscr{X}$상의 측도이고, $\mu=\lambda^{(1)}-\lambda^{(2)}+i\lambda^{(3)}-i\lambda^{(4)}$를 만족한다. 이제 (P_y,Q_y)와 (P_y',Q_y')를 $\sigma_y^{(1)}-\sigma_y^{(2)}$와 $\sigma_y^{(3)}-\sigma_y^{(4)}$ 각각의 Hahn분해라고 하고, $P=\bigcup_{y\in Y}\{y\}\times P_y$, $Q=\bigcup_{y\in Y}\{y\}\times Q_y$, $P'=\bigcup_{y\in Y}\{y\}\times P_y'$ 그리고 $Q'=\bigcup_{y\in Y}\{y\}\times Q_y'$라 하자. 또 $\mu^{(1)}-\mu^{(2)}+i\mu^{(3)}-i\mu^{(4)}$를 μ의 Jordan분해라 하면, 다음과 같은 성질을 얻는다.

성질 1. P와 P'이 $\mathscr{Y}\times\mathscr{X}$상의 가측이면 $|\mu|$-공집합을 제외하면 $\lambda^{(j)}=\mu^{(j)}(j=1,2,3,4)$가 성립한다.

증명 : m의 Hahn 분해를 (M,N)이라고 하고, $T=[P\cap(M\times\mathscr{X})]\cup[Q\cap(N\times\mathscr{X})]$, $S=[P\cap(N\times\mathscr{X})]\cup[Q\cap(M\times\mathscr{X})]$라 하면 (T,S)가 $\mu^{(1)}-\mu^{(2)}$와 $\lambda^{(1)}-\lambda^{(2)}$의 Hahn 분해임을 쉽게 얻는다. 따라서 [4, p. 125]로 부터, $\mu^{(1)}=\lambda^{(1)}$이고 $\mu^{(2)}=\lambda^{(2)}$가 $|\mu|$-공집합을 제외하면 성립한다. 동일한 방법을 사용하여, $|\mu|$-공집합을 제외하면, $\mu^{(3)}=\lambda^{(3)}$이고 $\mu^{(4)}=\lambda^{(4)}$임을 얻을 수 있다. 따라서 본 성질은 증명이 되었다.

참고 : 만약 m을 복소 측도라 하고, 위와 같은 추론을 통해서 $\mathscr{Y}\times\mathscr{X}$의 원소 F에 대하여,

$$\lambda^{(1)}(F)=\int_Y\sigma_y^{(1)}(F^{(y)})dm^{(1)}(y)+\int_Y\sigma_y^{(2)}(F^{(y)})dm^{(2)}(y)$$
$$+\int_Y\sigma_y^{(4)}(F^{(y)})dm^{(3)}(y)+\int_Y\sigma_y^{(3)}(F^{(y)})dm^{(4)}(y)$$

를 얻는데, 이 $\lambda^{(1)}(F)$는 일반적으로 $\mu^{(1)}(F)$와 같지 않다. 따라서, 이 논문의 방법으로는 m을 복소 측도로 확장하는 것이 불가능할 것으로 생

각된다.

이제 ν를 $(\mathscr{X}, \mathscr{A})$상의 복소 측도, $\nu^{(1)}-\nu^{(2)}+i\nu^{(3)}-i\nu^{(4)}$를 ν의 Jordan 분해라 하고, f를 B값을 갖는 X상의 함수라 하자. 그러면, $\nu^{(j)} \leqq |\nu| \leqq \nu^{(1)}+\nu^{(2)}+\nu^{(3)}+\nu^{(4)}$이므로, f가 $|\mu|$-강한 가측(strongly measurable)이라는 것과 f가 $\nu^{(j)}$-강한가측 $(j=1, 2, 3, 4)$라는 것은 동치이다. 또 f가 $|\nu|$-Bochner 적분 가능이라는 것과 f가 $\nu^{(j)}$-Bochner적분 가능$(j=1, 2, 3, 4)$이라는 것은 동치이다. 따라서, 다음과 같은 정의를 할 수 있다.

정의 : 위의 표기를 그대로 사용할 때, $|\mu|$-Bochner적분 가능한 X 위에서의 함수 f에 대하여,

$$\int_X f d\nu = \sum_{j=1}^{4} \alpha_j \int_X f d\nu^{(j)}$$

로 정의한다.

다음 성질 2는 이 논문의 중요한 결과중의 하나이다.

성질 2. 예비 정리 2와 성질 1의 가정을 모두 만족한다고 하자. 그러면, $\mathscr{Y} \times \mathscr{Z}$ 위에 B값을 갖는 유계인 $|\mu|$-강한 가측 함수 $\psi(y, z)$에 대하여, $\int_Z \psi(y, z) d\sigma_y(z)$는 $|m|$-강한 가측 함수이다.

증명 : F가 $\mathscr{Y} \times \mathscr{Z}$ 위에 가측 집합이고, $\psi(y, z) = \chi_F(y, z)$이면,

$$\int_Z \psi(y, z) d\sigma_y(z) = \int_Z \chi_{F^{(y)}}(z) d\sigma_y(z) = \sigma_y(F^{(y)})$$

이다. 따라서 예비 정리 1로 부터, $\int_Z \psi(y, z) d\sigma_y(z)$는 m-강한 가측 함수이다. 또, Bochner 적분의 선형성으로 부터, ψ가 단순 함수일때도 이 성질은 성립한다. 이제, 일반적인 경우를 증명하기 위하여 ψ를 $\mathscr{Y} \times \mathscr{Z}$ 위에 $|\mu|$-강한 가측 함수라 하자. 그러면 $\mathscr{Y} \times \mathscr{Z}$의 $|\mu|$-a.e. (y, z)에 대하여 $\psi_n \to \psi$인 단순 함수열 $\langle \psi_n \rangle$이 존재한다. 이제

$$\phi_n(y, z) = \begin{cases} \psi_n(y, z), & |\psi_n(y, z)| \leqq |\psi(y, z)|(1+1/2) \text{인 경우} \\ 0, & \text{그 이외의 경우} \end{cases}$$

라 하자.

잘 알려진 Pettis 정리의 증명 방법을 ([8, 131]) 사용하면, $|\phi_n - \psi|$가 $\mathscr{Y} \times \mathscr{Z}$ 위에서 가측임을 알 수 있다. 또 단순 함수열 $\langle \phi_n \rangle$이

$$|\phi_n(y, z)| \leqq |\psi(y, z)|(1+1/2) \text{이고}$$
$$n \to \infty \text{일때 } |\psi(y, z) - \phi_n(y, z)| \to 0 \ |\mu|\text{-a.e.}$$

를 만족함을 알 수 있다.

따라서, 다음과 같은 부등식을 얻을 수 있다.

$$\sum_{j=1}^{2}\int_{Y}\{\lim_{n\to\infty}\int_{Z}|\phi_n(y,z)-\psi(y,z)|d|\sigma_y|(z)\}dm^{(j)}(y)$$

$$\overset{(1)}{\leqq}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{4}\int_{Y}\{\lim_{n\to\infty}\int_{Z}|\phi_n(y,z)-\psi(y,z)|d\sigma_y^{(k)}(z)\}dm^{(j)}(y)$$

$$\overset{(2)}{=}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{4}\lim_{n\to\infty}\int_{Y}\int_{Z}|\phi_n(y,z)-\psi(y,z)|d\sigma_y^{(k)}(z)dm^{(j)}(y)$$

$$\overset{(3)}{=}\sum_{k=1}^{4}\lim_{n\to\infty}\int_{Y\times Z}|\phi_n(y,z)-\psi(y,z)|d\lambda^{(k)}(y,z)$$

$$\overset{(4)}{\leqq}4\lim_{n\to\infty}\int_{Y\times Z}|\phi_n(y,z)-\psi(y,z)|d|\mu|(y,z)$$

$$\overset{(5)}{=}0.$$

적분의 기초적인 성질로 부터 단계(1)과 (4)를 얻을 수 있다. 또 $|\phi_n(y,z)-\psi(y,z)|\leqq|\psi(y,z)|(2+1/2)$이므로, M을 $\sup\{|\psi(y,z)|\,|(y,z)$은 $\mathscr{Y}\times\mathscr{Z}$의 원소$\}$라 할 때, $\int_{Z}|\phi_n(y,z)-\psi(y,z)|d\sigma_y^{(k)}(z)\leqq(2+1/2)Mh(y)$가 성립한다. 따라서, 비교수렴정리(dominated convergence theorem)에 의해서 단계(2)를 얻는다. 단계(3)은 참고문헌 [7]의 정리로 부터 얻을 수 있고, 비교수렴 정리로 부터 단계(5)를 얻을 수 있다.

이와 같이 하여, $|m|$-a.e.y에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\int_{Z}|\phi_n(y,z)-\psi(y,z)|d|\sigma_y|(z)=0$를 얻는다. 즉, 함수열 $\langle\int_{Z}\phi_n(y,z)d\sigma_y(z)\rangle$은 $|m|$-a.e.y에 대하여 $\int_{Z}\psi(y,z)d\sigma_y(z)$로 수렴한다. 참고문헌 [6]의 정리 3.5.4로부터, 이 정리의 결과를 얻을 수 있다.

이제, 이 논문의 주요 정리인 Bochner 적분에 대한 비 대칭 Fubini정리를 증명하겠다.

정리. 예비 정리 1, 예비 정리 2와 성질 2의 가정하에 $\int_{Z}\psi(y,z)d\sigma_y(z)$는 Bochner 적분가능한 함수이고,

$$\int_{Y}\{\int_{Z}\psi(y,z)d\sigma_y(z)\}dm(y)=\int_{Y\times Z}\psi(y,z)d\mu(y,z)$$

가 성립한다.

증명 : 참고문헌 [6, p. 80]에 의해 이 정리의 첫번째 부분은 명백하다. 만약 F가 $\mathscr{Y}\times\mathscr{Z}$의 원소이고, $\psi(y,z)=\chi_F(y,z)$이면

$$\int_Y\{\int_Z\psi(y,z)\,d\sigma_y(z)\}\,dm(y)=\int_Y\sigma_y(F^{(y)})\,dm(y)=\mu(F)$$
$$=\int_{Y\times Z}\psi(y,z)\,d\mu(y,z)$$

가 성립한다. 또 Bochner 적분의 선형성에 의해, ψ가 단순 함수일때도 이 정리가 성립한다. 이제 $\langle\psi_n\rangle$을 $|\mu|$-a.e. (y,z)에 대하여 $\psi_n\to\psi$인 단순 함수열이라 하자. 그러면 성질 2에서와 같은 방법으로 ϕ_n을 정의할 수 있다. 그러면 다음 등식을 얻는다.

$$\begin{aligned}
&\int_{Y\times Z}\psi(y,z)\,d\mu(y,z)\\
&\overset{(1)}{=}\lim_{n\to\infty}\int_{Y\times Z}\phi_n(y,z)\,d\mu(y,z)\\
&\overset{(2)}{=}\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{4}\alpha_j\int_{Y\times Z}\phi_n(y,z)\,d\lambda^{(j)}(y,z)\\
&\overset{(3)}{=}\lim_{n\to\infty}\int_Y\int_Z\phi_n(y,z)\,d\sigma_y(z)\,dm(y)\\
&\overset{(4)}{=}\int_Y(\lim_{n\to\infty}\int_Z\phi_n(y,z)\,d\sigma_y(z))\,dm(y)\\
&\overset{(5)}{=}\int_Y\{\int_Z\psi(y,z)\,d\sigma_y(z)\}\,dm(y)
\end{aligned}$$

비교수렴 정리로 부터 단계 (1)과 단계 (4)를 얻을 수 있고, 정의로 부터 단계 (2)와 (3)을 얻는다. 단계 (5)는 성질 2의 증명과정에서 보였다.

참 고 문 헌

1. R.H. Cameron and W.T. Martin, *An unsymmetric Fubini theorem*, Bull. Amer. Math. Soc., **47** (1941) 121-125.
2. R.H. Cameron and D.A. Storvick, *Some Banach algebras of analytic Feynman*

integrable functionals, in Analytic Functions, Kozubnik, 1979, Springer Lecture Notes in Math., Berlin, **798** (1980).
3. K.S. Chang, G.W. Johnson and D.L. Skoug, *Functions in the Fresnel Class,* Proc. Amer. Math. Soc., (1987) 309-318.
4. D.L. Cohn, *Measure Theory*, Boston, Birkhäuser (1980).
5. J. Diestel and J.J. Uhr, *Vector measures,* Mathematical serveys number **15,** Amer. Math. Soc., (1977).
6. E. Hille and R.S. Phillips, *Functional Analysis and Semi-group*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **31** (1957).
7. G.W. Johnson, *An unsymmetric Fubini Theorem*, Amer. Math. Monthly, **91** (1984) 131-133.
8. K. Yosida, *Functional analysis,* Springer-Verlarg, (1980).

Yonsei University
Seoul 120-749, Korea,
Konkuk University
Seoul 133-701, Korea
and
Han Nam University
Daejeon 300-310, Korea