

動的 최소제곱법에 의한 精密水準網의 調整

A Study on the Adjustment of Precise Leveling Nets
by the Method of Dynamic Least Squares.

李	啓	鶴*
Lee,	Kye	Hak
張	智	元**
Jang,	Ji	Won
姜	熙	福***
Kang,	Hee	Bog
成	水	鍊****
Sung,	Soo	Lyeon

Abstract

The method of least squares has been applied to the static data, but it was not applications for the processing of observed values accompanying real-time variation.

In this paper, having been considered all observations to be the function of time, leveling nets were analyzed dynamically by introducing the concept of time to conventional method of least squares.

As a results, the method of dynamic least squares was well applicable to the adjustment of leveling nets.

要 旨

지금까지 觀測값의 處理에 適用해 왔던 最小제곱법은 靜的인 data의 處理에는 適合하나, 時間의 變化가 隨伴된 觀測值의 處理에는 不適當하다.

本 研究는 모든 觀測값이 時間의 函數인 것을 考慮해서 從來의 最小제곱법의 一般式에 時間의 概念을 導入하여 動的으로 水準網을 解析하였다.

이 境遇 觀測 data를 動的의 最小제곱법으로 處理한 結果 精密한 調整값을 얻었다.

1. 序 論

最小제곱법은 觀測값으로부터 最確값을 求하

* 正會員·全南大學校 工科大学教授, 土木工學科

** 正會員·木浦大學 助教授, 造景學科

*** 正會員·全南大學校 大學院, 土木工學科

**** 正會員·全南大學校 大學院, 土木工學科

기 위한 唯一한 方法이며 現在 自然科學뿐만 아니라 社會科學 分野에도 많이 適用되고 있다.

그러나 觀測에서 얻어지는 모든 觀測값은 時間變化를 無視할 수 있는 것과 時間變化를 無視할 수 없는 것이 있다. 例를 들면 實驗室內에서 얻어지는 觀測값은 時間變化를 無視할 수 있지

이 된다. (12)식에 輕重率을 考慮하여 各 觀測 값의 輕重率을 P_1, P_2, \dots, P_m 이라고 하면

$$P_{mm} = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & P_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & P_m \end{pmatrix}$$

이 된다. (12)식의 兩邊에 輕重率 P 를 곱하면

$$P \cdot B \cdot Y = PL + PV \quad \dots\dots(13)$$

(13)식에 B 의 轉置行列 B^T 을 곱하면

$$(B^T P B) Y = (B^T P L) + (B^T P V) \quad \dots\dots(14)$$

여기서 $V^T P V = \text{minimum}$ 으로 하면

$$(B^T P B) Y = (B^T P L) \quad \dots\dots(15)$$

가 된다. 여기서 $(B^T P B) = S$, $(B^T P L) = K$ 라 놓으면

$$S \cdot Y = K$$

$$\therefore Y = S^{-1} K \quad \dots\dots(16)$$

이 된다. (16)식을 Y 에 關하여 解析하면 Y 의 期待 값이 求해진다^(1, 2-4).

3. 動的 最小 제곱法用 Program

여기서 前節의 基本理論을 土臺로 하여 Program을 作成하였으며, 本 理論의 計算式에 使用된 記號는 다음 표 1과 같고 이들의 main flow chart는 그림 1과 같다^(5, 6).

따라서 本 研究에서는 위의 program을 利用

표 1. Parameters of the program for method of dynamic least squares

M	: Route number
N	: Number of bench mark except the fixed point
L	: Time index
P	: Matrix of weight of observational equation
A	: Matrix of coefficient of observational equation
AL	: Observational values
T	: Vector of time interval according to the observation
V	: Residuals
SD	: Standard deviation of one observation
XM	: Standard deviation of expected values
LH	: Number of fixed time
TH	: Line of fixed time
XT	: Excepted values of fixed time

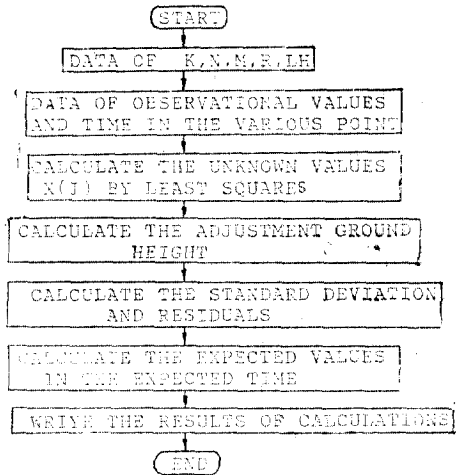


그림 1. General main flow chart

하여 簡單한 曲線決定과 水準網의 例를 들어 從來의 最小 제곱法에 時間概念을 導入하여 計算하고 標準偏差를 算出하여 從來의 最小 제곱法과의 結果를 比較檢討하였다.

4. 動的 最小 제곱法의 應用

4-1. 三次元 曲線決定에 應用

曲線의 形이 時間과 함께 變化한다고 하는 境遇의 曲線을 決定할 때 動的 最小 제곱法을 適用해 보았다.

時間變化를 考慮한 曲線決定을 할 境遇 例를 들면 x, y 座標軸에 z 軸을 加한 三次元 座標上에서 曲線群(또는 曲面)을 決定할 수 있다.⁽¹⁾

曲線決定에 使用한 data는 표 2와 같고 data는 여러 時刻에 있어서 x, y 의 값이고 時刻는 基準時刻로부터의 差를 取했다.

표 2의 data를 動的 最小 제곱法으로 處理하였던바 그림 2와 같은 曲線(曲面)이 決定되었으며 이때의 標準偏差(σ)는 0.5이고, 時刻는 $t=0$, $t=5$ 및 $t=10$ 일때의 曲線이다. 또 同一한 data를 從來의 方法에 따라 時間變化를 無視하고 處理한 曲線은 그림 3과 같고 이때의 標準偏差(σ)는 4.7이다. 以上の 結果에서 나타난 바와 같이 時間變化를 考慮하여 動的 最小 제곱法으로 處理한 方法이 良好하다는 것을 알 수 있다.

4-2. 水準網調整計算에 應用

一般的으로 長期에 걸쳐서 얻을 수 있는 水準測地網調整이나 水準網調整計算에 使用하는

표 2. Data for curve with time variation

No.	$x(T)$	$y(1)$	t	P
1	2	2.5	1	1
2	2	3.2	0	1
3	3	6.0	3	1
4	4	14.4	9	1
5	4	11.7	8	1
6	5	4.0	1	1
7	5	17.5	12	1
8	6	7.0	4	1
9	6	7.5	2	1
10	8	13.0	10	1
11	8	5.5	2	1
12	9	7.0	3	1
13	10	10.2	6	1
14	10	15.3	12	1
15	12	6.6	1	1
16	13	12.2	7	1
17	13	9.8	4	1
18	14	16.2	9	1
19	15	14.3	6	1
20	15	7.5	0	1
21	16	11.9	3	1
22	16	20.5	10	1
23	17	17.9	8	1
24	18	26.6	11	1
25	19	25.5	8	1
26	20	14.7	1	1
27	20	20.8	5	1
28	21	31.2	9	1

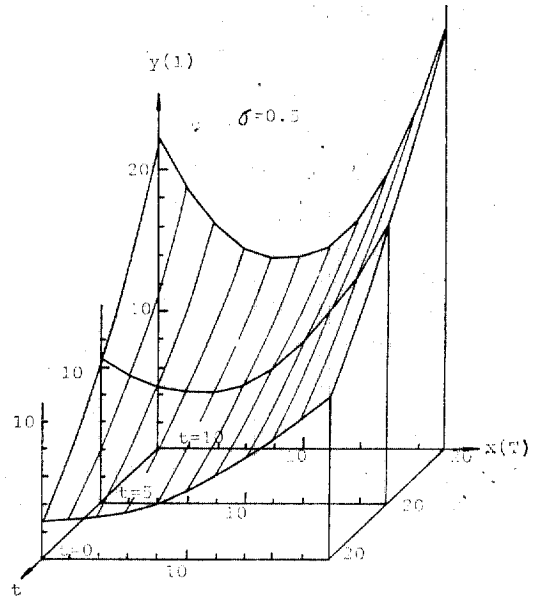


그림 2. Curve by method of dynamic least squares

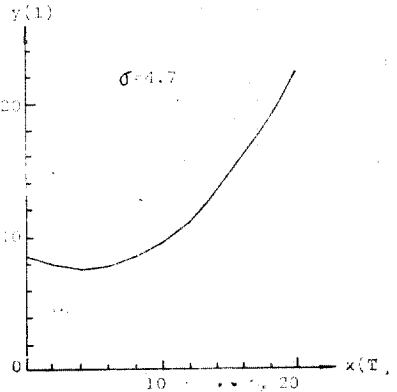


그림 3. Curve by method of least squares

data를 動的의最小제곱法에 의해 處理하면 比較的 嚴密한 解를 얻을 수 있다.

本 研究를 위한 試驗觀測場所는 全南大學校附近에 그림 4 와 같은 水準網을 設置하여 觀測하였으며 水準網의 B.M.點은 1972年 9月에 國立地理院에서 設置한 點으로써 標高 $H=42.100m$, 緯度 $35^{\circ}09'59.322''$, 經度 $126^{\circ}55'16.129''$ 이다.

觀測方法으로는 그림 4 의 水準網의 各測點을 前後視觀測에 의하여 各各 2點間의 比高를 求하고 2週間隔으로 3回觀測했다. 1回의 觀測은 B.M.點부터 No. 9 測點까지, No. 9 測點부터 B.M. 까지 2日間에 걸쳐서 觀測하였으며 그 結果는 표 3과 같고 time 欄에서 基準日은 觀測始作하는 날을 0 (Zero)으로 하여 計算된 數值

이다.

표 3의 data를 動的의最小제곱法으로 處理한 경우와 時間을 考慮하지 않을 때의 結果는 표 4와 같고 이때 標準偏差는 各各 2.7mm, 3.5mm이다. 또한 $t=0$, $t=50$, $t=100$ 에 대한 觀測水準網의 推定값은 표 5에 나타난 바와 같다.

그리고 표 5의 結果에 따라 時間 $t=50(days)$ 에 대해서 水準網 各測點의 leveling errors 變動量을 그림 5에 圖示해 보았다.

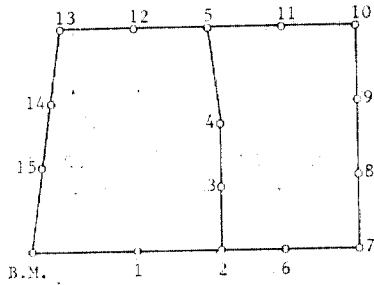


그림 4. Leveling nets

표 3. Data for the nets adjustment of leveling of Fig. 4

Route No.	B.M.		Dist. (km)	Obs. Diff. (m)	T.	Remark
	From	To				
1	B.M.	1	0.40	0.106	0	1987.3.21
2	B.M.	1	0.40	0.108	14	9:00~5:00
3	B.M.	1	0.40	0.108	28	(first)
4	1	2	0.30	8.430	0	1987.4.4
5	1	2	0.30	8.431	14	9:00~5:00
6	1	2	0.30	8.433	28	(second)
7	2	3	0.30	-4.060	0	1987.4.18
8	2	3	0.30	-4.056	14	9:00~5:00
9	2	3	0.30	-4.057	28	(third)
10	3	4	0.30	3.777	0	
11	3	4	0.30	3.779	14	
12	3	4	0.30	3.779	28	
13	4	5	0.40	12.062	0	
14	4	5	0.40	12.058	14	
15	4	5	0.40	12.061	28	
16	2	6	0.30	2.114	0	
17	2	6	0.30	2.113	14	
18	2	6	0.30	2.115	28	
19	6	7	0.30	3.518	0	
20	6	7	0.30	3.516	14	
21	6	7	0.30	3.518	28	
22	7	8	0.30	-3.561	0	
23	7	8	0.30	-3.559	14	
24	7	8	0.30	-3.558	28	
25	8	9	0.40	5.294	0	
26	8	9	0.40	5.297	14	
27	8	9	0.40	5.293	28	
28	9	10	0.30	0.114	1	1987.3.22
29	9	10	0.30	0.113	15	9:00~5:00

30	9	10	0.30	0.115	29	(first)
31	10	11	0.30	10.281	1	1987.4.5
32	10	11	0.30	10.281	15	9:00~5:00
33	10	11	0.30	10.279	29	(second)
34	11	5	0.30	-5.984	1	1987.4.19
35	11	5	0.30	-5.982	15	9:00~5:00
36	11	5	0.30	-5.982	29	(third)
37	5	12	0.30	-2.738	1	
38	5	12	0.30	-2.737	15	
39	5	12	0.30	-2.739	29	
40	12	13	0.30	-11.272	1	
41	12	13	0.30	-11.275	15	
42	12	13	0.30	-11.272	29	
43	13	14	0.30	-2.792	1	
44	13	14	0.30	-2.790	15	
45	13	14	0.30	-2.790	29	
46	14	15	0.30	-3.983	1	
47	14	15	0.30	-3.983	15	
48	14	15	0.30	-3.982	29	
49	15	B.M.	0.40	0.472	1	
50	15	B.M.	0.40	0.471	15	
51	15	B.M.	0.40	0.472	29	

표 4. Comparison of results of leveling nets by D.L.S. and L.S.M.

B. M.	Elevation(m)		Diff. (A-B) (mm)	Coefficient		Re-mark
	D.L.S.	L.S.M.		D.L.S.	L.S.M.	
1	42.20614	42.20655	-0.41	2.66433E-05	0	
2	50.63584	50.63729	-1.45	9.98974E-05	0	
3	46.57636	46.57897	-2.61	1.81198E-04	0	
4	50.35349	50.35685	-3.36	2.35558E-04	0	
5	62.41392	62.41631	-2.39	1.66893E-04	0	
6	52.74954	52.75138	-1.84	1.28150E-04	0	
7	56.26700	56.26877	-1.77	1.21355E-04	0	
8	52.70645	52.70955	-3.10	2.17199E-04	0	
9	58.00198	58.00435	-2.37	1.65820E-04	0	
10	58.11569	58.11845	-2.76	1.88351E-04	0	
11	68.39743	68.39890	-1.47	1.05023E-04	0	
12	59.67634	59.67795	-1.61	1.09196E-04	0	
13	48.40403	48.40359	-0.44	2.38419E-05	0	
14	45.61228	45.61257	-0.29	2.16961E-05	0	
15	41.62914	41.62937	-0.23	1.81198E-05	0	

4-3. 考察

本試驗을 통하여 考察해 보면

1) 三次元 曲線決定에 있어서 任意로 抽出된

표 5. Results of nets adjustment by D.L.S.

B. M.	Adj. Elev.(T1)	Adj. Elev.(T2)	Adj. Elev.(T3)
1	42.2061	42.2076	42.2089
2	50.6358	50.6408	50.6458
3	46.5764	46.5855	46.5945
4	50.3535	50.3653	50.3771
5	62.4139	62.4222	62.4306
6	52.7495	52.7559	52.7623
7	56.2670	56.2731	56.2791
8	52.7065	52.7175	52.7284
9	58.0020	58.0103	58.0186
10	58.1157	58.1251	58.1345
11	68.3974	68.4027	68.4079
12	59.6763	59.6818	59.6872
13	48.4040	48.4028	48.4016
14	45.6123	45.6134	48.6146
15	41.6291	41.6300	41.6309

$t=0$ $t=50$ $t=100$

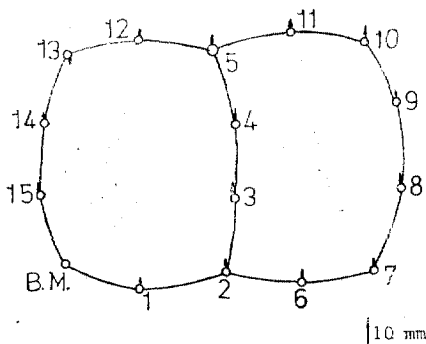


그림 5. Adjustment of leveling nets by D.L.S. (50 days)

data를 이용하여 최소제곱법 또는 動的 최소제곱법 등을 차례로 본 program에 의해서 處理한 結果를 比較해 볼 때 그 結果값은 若干의 差異를 나타냈으며 특히 標準偏差는 前者는 4.7, 後者는 0.5이며, 全南大學校附近에서 觀測한 data로 處理한 標準偏差는 3.5, 2.7mm로써 動的 최소제곱법을 適用한 方法이 良好하다는 것을 알 수 있다.

2) 표 6에서와 같이 實際水準網觀測 結果의 data를 利用하여 水準網을 調整한 結果는 實際觀測값의 3회 平均값과는 근소한 差로서 調整이 되었으며 長期間 많이 觀測한 data값을 利用할수록 精密한 調整을 期할 수 있을 것이다.

특히 日本의 境遇 火山에 의한 地殼變動이 甚하기 때문에 時間을 考慮한 長期 leveling 觀測 data를 動的 최소제곱법에 適用하므로써 精密水準網調整을 期할 수 있으나 우리 나라에서는 地殼變動의 影響 即 地盤沈下에 대한 影響은 거의 없다고 보기 때문에 長期間 leveling 觀測으로 refraction error, sighting error, setting and instrumental error, focusing parallax 등의 諸般 複合誤差를 除去시키는 精密 leveling 調整法으로 唯一한 方法이라 看做된다.

앞으로 본 方法은 더욱 많은 試驗觀測을 通하여 여러 測地測量調整網에 適用하므로써 보다 높은 正確度를 얻을 수 있을 것으로 思料된다.

5. 結 論

本 研究 結果 다음과 같은 結論을 얻을 수 있다.

1. 時間變化가 隨伴된 data를 從來의 最小제곱法으로 處理하게 되면 時間變化에 따른 data變化分은 補正이 充分히 이루어지지 않으며 이런 境遇 動的 최소제곱법을 適用하면 比較的 嚴密한 解를 얻을 수 있다.

2. 動的 최소제곱法이 有利한 點은 一定時間帶內에서 random한 時刻에서 얻어진 data를 圓滑하게 處理할 수 있다.

3. 觀測 時間帶內에서 觀測값이 不規則한 變化를 하는 境遇에는 본 方法을 適用하기가 困難하다.

4. 長期 leveling 觀測 data를 본 方法에 適用하면 leveling refraction error, setting and instrumental error, focusing parallax 등의 諸般 複合誤差를 除去시켜 精密한 水準網調整을 期할 수 있다.

感謝의 말

本 研究는 1986~1987年 韓國科學財團의 研究費支援에 의해 遂行하였던 研究의 一部이며 同財團에 深甚한 謝意를 表한다.

Ⅱ 6. Comparison of mean values of observational elevation differences with adjustment elevation differences in the two station.

Adj. height		Diff. (m)	Obs. Diff.				Comp. (B-A)
From	To		first	second	third	aver.	
B. M. 42.100	No. 1 42.2061	0.1061	0.106	0.108	0.108	0.1073	0.0012
No. 1 42.2061	No. 2 50.6358	8.4297	8.430	8.431	8.433	8.4313	0.0016
No. 2 50.6358	No. 3 46.5764	-4.0594	-4.060	-4.056	-4.057	-4.0576	-0.0018
No. 3 46.5764	No. 4 50.3535	3.7771	3.777	3.779	3.779	3.7783	0.0012
No. 4 50.3535	No. 5 62.4139	12.0604	12.062	12.058	12.061	12.0603	-0.0001
No. 2 50.6358	No. 6 52.7495	2.1137	2.114	2.113	2.115	2.1140	0.0003
No. 6 52.7495	No. 7 56.2670	3.5175	3.518	3.516	3.518	3.5173	-0.0002
No. 7 56.2670	No. 8 52.7065	-3.5605	-3.561	-3.559	-3.558	-3.5593	-0.0012
No. 8 52.7065	No. 9 58.0020	5.2955	5.294	5.297	5.293	5.2946	-0.0009
No. 9 58.0020	No. 10 58.1157	0.1137	0.114	0.113	0.115	0.1140	0.0003
No. 10 58.1157	No. 11 68.3974	10.2817	10.281	10.281	10.279	10.2803	-0.0014
No. 11 68.3974	No. 5 62.4139	-5.9835	-5.984	-5.982	-5.982	-5.9826	-0.0009
No. 5 62.4139	No. 12 59.6763	-2.7376	-2.738	-2.737	-2.739	-2.7380	0.0004
No. 12 59.6763	No. 13 48.4040	-11.2723	-11.272	-11.275	-11.275	-11.2740	0.0017
No. 13 48.4040	No. 14 45.6123	-2.7917	-2.792	-2.790	-2.790	-2.7906	-0.001
No. 14 45.6123	No. 15 41.6291	-3.9862	-3.983	-3.983	-3.982	-3.9826	-0.0006
No. 15 41.6291	B. M. 42.100	0.4709	0.471	0.471	0.472	0.4713	0.0004

pp.28~36.

参 考 文 献

1. Kasio Isikawa, "A Method of the Dynamic Least Squares and its Applications to Adjustment of Geodetic Survey", J.G.S of Japan, 1983,

2. 日本測地學會, "測地學の概観", 1974, pp.443~448.
 3. 文藤錫夫, "測量誤差の處理法", 日本測量協會, 1978, pp.125~148.
 4. Edward M. Mikhail, "Observation and Least

- Squares*", Harper & Row, New York, 1976, pp. 431~474.
5. 石川甲子男外 3人, "測量計算プログラム", 山海堂, 1985, pp.38~44.
 6. 國立地理院, "精密水準網의 調整에 關한 研究", 1987, pp.23~33.

(接受: 1988. 4. 12)