

# 高次板四角形有限要素

## Higher Order Quadrilateral Plate Bending Finite Element

申	英	溟*
Shin,	Young	Shik
申	鉉	默**
Shin,	Hyun	Mook
金	明	哲***
Kim,	Myung	Chul

### Abstract

A formulation of an isoparametric quadrilateral higher-order plate bending finite element is presented. The 8-noded 28-d.o.f. plate element has been degenerated from the three-dimensional continuum by introducing the plate assumptions and considering higher-order in-plane displacement profile. The element characteristics have been derived by the Galerkin's weighted residual method and computed by using the selective reduced integration technique to avoid shear-locking phenomenon. Several numerical examples are given to demonstrate the accuracy and versatility of the proposed quadrilateral higher-order plate bending element over the other existing plate finite elements in both static and dynamic analyses.

### 요 지

본 연구에서는 8절점 28 자유도를 갖는 사각형 고차 판 유한 요소를 면내고차 변위를 고려하여 3차원 연속체로부터 유도하였다. 요소매트릭스들은 판의 운동방정식으로부터 Galerkin 가중 잔차법으로 유도하고 감차적분을 수행하여 구하였다. 고차 판 유한요소를 이용하여 판의 처짐 해석과 자유진동해석을 수행한 결과 판의 두께와 경계조건에 관계없이 매우 정확한 결과를 나타내었다.

### 1. 서 론

일반적으로 힘을 받는 판의 거동은 판의 길이

보다 두께에 따라 다르며 보통 Kirchhoff의 얇은 판이론과 Mindlin의 판이론으로 설명된다. 그런데 Kirchhoff의 얇은 판이론은 전단변형과 회전관성의 영향을 무시하고 있으므로 판의 진동해석이나 두꺼운 판의 해석에는 부적당하다고 알려져 있다. 한편 Mindlin 판이론은 판의 임의

\* 正會員 · 嶺南大學校 工科學 助教授, 土木工學科

\*\* 參與會員 · 成均館大學校 工科學 教授, 土木工學科

\*\*\* 正會員 · 成均館大學校 大學院, 土木工學科

단면에서의 전단변형률의 분포를 선형으로 가정함과 동시에 전단변형에너지의 보정을 위한 전단계수를 사용하고 있다. 기왕의 많은 연구에 따르면 Mindlin 판이론은 판이 얇아짐에 따라 전단축에 과도한 강성이 발생하는 shear-locking 현상을 유발시켜 부정확한 결과를 나타내며 진동해석의 경우에도 후기 모드에서의 결과가 정확하지 못하다.

지금까지 많은 판요소들이 개발되었으나 대부분이 얇은 판이론에 근거한 요소들이었으며 1970년 이후 Cook<sup>(7)</sup>, Hughes<sup>(8)</sup>와 Kanok-Nukulchai<sup>(9)</sup>등이 여러가지 형태의 Mindlin 판요소를 제안한 바 있으나 모두 판의 진동해석에서 정확하지 못한 결과를 보여주었다. 1982년 Kant<sup>(10)</sup>와 Owen<sup>(6)</sup>등은 각각 새로운 형태의 Mindlin 판요소와 9절점 Lagrangian C<sup>0</sup> 판요소를 제안하였으나 유도과정이 상당히 복잡하고 진동해석에의 적용여부가 제시되지 않았으며 zero energy 모드에 대한 연구가 필요한 것으로 보인다.

따라서 본 연구에서는 고차보이론<sup>(12)</sup>을 판에 응용하여 판의 임의단면에서의 면내 수평변위를 고차함수로 나타내어 판의 변형형상을 실제 변형형상과 유사하게 가정함으로써 전단계수를 사용하지 않고 판의 두께에 관계없이 판의 처짐해석 및 진동해석에 적용할 수 있는 8절점, 28자유도의 사각형 판요소를 제안하고자 한다. 고차판 사각형 요소는 3차원 연속체로부터 degeneration 방법으로 유도되며 요소매트릭스는 Galerkin 가중잔차법으로 감차적분을 수행하여 계산하였다. 여러가지 경계조건을 갖는 판의 처짐해석과 자유진동해석을 통하여 결과를 고찰하였다.

## 2. 고차 판 사각형 유한요소의 유도

### 2.1 판 연속체 운동방정식의 discretization

탄성기동을 하는 3차원 연속체의 운동방정식과 경계조건식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sigma_{ij} + \rho b_j - \rho \ddot{u}_j = 0 \quad (1)$$

$$n_i \sigma_{ij} - T_j = 0 \quad (2)$$

여기서  $\rho$ 는 질량밀도,  $b$ 는 체력벡터,  $\sigma$ 는 응력텐서,  $n$ 는 경계면에 작용하는 단위법선벡터,

그리고  $T_j$ 는 경계면에서의 기지의 전인력이다.

Galerkin 가중잔차법을 식(1)과 (2)에 적용하면 Galerkin weak form 방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$G(u, \delta u) = - \int_B (\sigma_{ij, i} + \rho b_j - \rho \ddot{u}_j) \delta u_j dV + \int_{\partial B} (n_i \sigma_{ij} - T_j) \delta u_j dA \quad (3)$$

또한  $G(u, \delta u) = \sum_{e=1}^{Nel} G_e(u, \delta u)$ 이므로 하나의 요소에 대한 Galerkin 함수는 다음과 같이 된다.

$$G_e(u, \delta u) = - \int_{B_e} (\sigma_{ij, i} + \rho b_j - \rho \ddot{u}_j) \delta u_j dV + \int_{\partial B_e} (n_i \sigma_{ij} - T_j) \delta u_j dA \quad (4)$$

식(4)를 부분적분하고 Gauss-Green 정리를 적용하여 정리하면

$$G_e(u, \delta u) = \int_{B_e} \sigma_{ij} \delta u_{j, i} dV - \int_{B_e} (\rho b_j - \rho \ddot{u}_j) \delta u_j dV - \int_{\partial B_e} T_j \delta u_j dA \quad (5)$$

요소내의 임의점에서의 변형율은 다음과 같이 절점변위의 항으로 나타낼 수 있다.

$$\underline{\varepsilon}(x) = \sum_{I=1}^{Nel} \underline{B}^I \underline{U}^I \quad (6)$$

여기서  $\underline{B}$ 는 변위와 변형율 관계를 나타내는 매트릭스이다. 또한  $u$ 와  $\delta u$ 도 각각의 절점값으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\underline{u}(x) = \sum_{I=1}^{Nel} \underline{N}^I(x) \underline{U}^I \quad (7)$$

$$\delta \underline{u}(x) = \sum_{I=1}^{Nel} \underline{N}^I(x) \delta \underline{U}^I \quad (8)$$

여기서  $\underline{N}^I$ 는 형상함수를 나타낸다. 따라서 식(5)에 식(6)~(8)을 대입하여 정리하면

$$G_e(u, \delta u) = \sum_{I=1}^{Nel} \sum_{J=1}^{Nel} \delta u^I (M_e^{IJ} \underline{U}^J + K_e^{IJ} \underline{U}^J - R_e^I) \quad (9)$$

여기서, 요소강도매트릭스  $\underline{K}_e$ 는

$$\underline{K}_e^{IJ} = \int_{B_e} (\underline{B}^I)^T \underline{C} (\underline{B}^J) dV \quad (10)$$

요소질량매트릭스  $\underline{M}_e$ 는

$$\underline{M}_e^{IJ} = \int_{B_e} \rho (\underline{N}^I)^T (\underline{N}^J) dV \quad (11)$$

그리고 외력항  $R_s$  는

$$R_s = \int_{\Omega} \rho (N^i)^T r_b dV + \int_{\partial\Omega} (N^i)^T T dA \quad (12)$$

각 요소에 대한 Galerkin 함수를 전체 판연속체에 대하여 합성하면

$$G(U, \delta U) = \delta U^T (M\ddot{U} + KU - R) = 0 \quad (13)$$

여기서  $M$ 은 질량매트릭스,  $K$ 는 강도매트릭스 그리고  $R$ 은 외력벡터를 의미한다. 그런데  $\delta U$ 는 임의의 절점에서의 가상벡터이므로

$$M\ddot{U} + KU - R = 0 \quad (14)$$

### 2.2 고차 판 유한요소의 변위함수

판의 좌표계를 그림 1과 같이 정의하여 면내 임의점에서의  $x$  축과  $y$  축방향으로의 변위를 다음과 같이 고차함수로 가정한다.

$$u_x(x, y, z) = A_0 + A_1z + A_2z^2 + A_3z^3 \quad (15-a)$$

$$u_y(x, y, z) = B_0 + B_1z + B_2z^2 + B_3z^3 \quad (15-b)$$

판 중립면에서의 면방향 변형을 무시하면  $A_0 = B_0 = 0$ 가 되므로

$$u_x = A_1z + A_2z^2 + A_3z^3 \quad (16-a)$$

$$u_y = B_1z + B_2z^2 + B_3z^3 \quad (16-b)$$

또한 중립면에서의 두께방향으로의 전단변형률의 분포는  $z=0$ 인 중립면에 대하여 대칭이므로  $A_2 = B_2 = 0$ 이 되어 식(16)은 다음과 같이 된다.

$$u_x = A_1z + A_3z^3 \quad (17-a)$$

$$u_y = B_1z + B_3z^3 \quad (17-b)$$

따라서 중립면에서의 전단변형률을 각각  $\gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ 라 하면 판 상하단에서의 전단변형률은 0이라

는 조건으로부터 미지의 계수를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \gamma_{xz} - \frac{d\omega}{dx}, & A_3 &= -\frac{4}{3h^2} \gamma_{xz} \\ B_1 &= \gamma_{yz} - \frac{d\omega}{dy}, & B_3 &= -\frac{4}{3h^2} \gamma_{yz} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

변형전 판의 중립면에 수직인 단면의 회전각  $\theta$ 는 전단변형률과 중립면의 기울기로 다음과 같이 나타낼 수 있다(그림 2).

$$\theta_x = -\gamma_{yz} + \frac{d\omega}{dy} \quad (19-a)$$

$$\theta_y = \gamma_{xz} - \frac{d\omega}{dx} \quad (19-b)$$

판의 두께방향으로의 미소변형을 무시하면 판의 변위함수는 중립면의 연직치짐  $\omega$ 와 회전각  $\theta_x, \theta_y$ 로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{cases} u_x \\ u_y \\ u_z \end{cases} = \begin{bmatrix} -\frac{4z^3}{3h^2} \frac{d(\cdot)}{dx} - \left(\frac{4z^3}{3h^2} - z\right) & 0 \\ -\frac{4z^3}{3h^2} \frac{d(\cdot)}{dy} & 0 & \frac{4z^3}{3h^2} - z \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} \omega(x, y) \\ \theta_y(x, y) \\ \theta_x(x, y) \end{cases} \quad (20)$$

그리고 중립면에서의 연직치짐  $\omega$ 와 회전각  $\theta_x, \theta_y$ 는 다음과 같이 절점변위의 향으로 나타낼

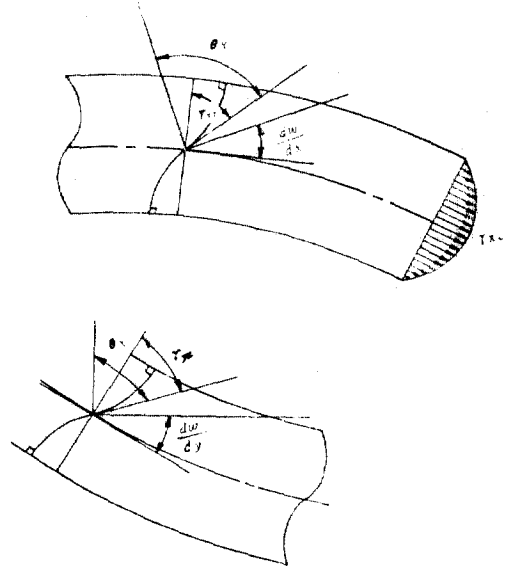


그림 1. Coordinate system of plate.

그림 2. Higher order displacement profile of a deformed normal of the present plate element.

수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \omega \\ \theta_{y^i} \\ \theta_{x^i} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{I=1}^{Ne1} N_{\omega}^I & \sum_{I=1}^{Ne1} N_{X'}^I & \sum_{I=1}^{Ne1} N_{Y'}^I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sum_{I=1}^{2Ne1} N_{\theta}^I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sum_{I=1}^{2Ne1} N_{\theta'}^I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega^I \\ \frac{d\omega^I}{dx} \\ \frac{d\omega^I}{dy} \\ \theta_{y^I} \\ \theta_{x^I} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

회전각  $\theta$  에 대한 2 차(quadratic) 형상함수를  $C^0$  연속조건을 만족하도록 그림 3 과 같은 자연 좌표(natural coordinate)로 나타내면 다음과 같다.

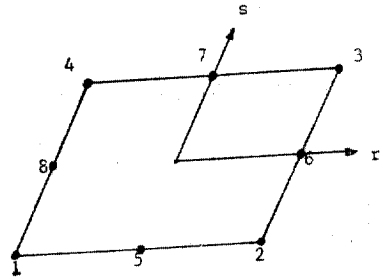
$$\begin{aligned} N_{\theta}^I &= \frac{1}{4}(1+r^I r)(r^I)^2(1+SS^I)(S^I)^2 \\ &\quad (r^I r^I + SS^I - 1) \quad (I=1, 8) \\ &\quad + \frac{1}{2}[(1-r^2)[1-(r^I)^2](1+SS^I) \\ &\quad + (1-S^2)[1-(S^I)^2](1+r^I r^I)] \quad (22) \end{aligned}$$

그리고 식(6)과 (20)에서 연직처짐  $\omega$  의 최고 차 도함수는  $\omega$  를 두번 미분한 것이므로  $\omega$  를 discretization 하기 위하여는  $C^1$  연속성이 요구되며 이러한  $C^1$  연속성은  $\omega$  와  $\frac{d\omega}{dx}$ ,  $\frac{d\omega}{dy}$  가 모서리 절점의 자유도로 선택되어야 하고  $\theta$  보다는 한 차수 높은 형상함수를 사용해야 한다. 따라서 연직처짐  $\omega$  와 중립면의 기울기  $\frac{d\omega}{dx}$ ,  $\frac{d\omega}{dy}$  에 대한 3 차(cubic) 형상함수는 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$N_{\omega}^I = \frac{1}{16}(2+3r^I r - r^I r^3)(2+3S^I S - S^I S^3) \quad (I=1, 4) \quad (23)$$

$$N_{X'}^I = \frac{L_x}{32}(-r^I - r + r^I r^2 + r^3) (2+3S^I S - S^I S^3) (I=1, 4) \quad (24-a)$$

$$N_{Y'}^I = \frac{L_y}{32}(-S^I - S + S^I S^2 + S^3) (2+3r^I r - r^I r^3) (I=1, 4) \quad (24-b)$$



D.O.F  $\begin{cases} \text{Corner Nodes : } \omega, \frac{d\omega}{dx}, \frac{d\omega}{dy}, \theta_x, \theta_y \\ \text{Mid Nodes : } \theta_x, \theta_y \end{cases}$

그림 3. Natural coordinate system of the proposed 8-node quadrilateral plate bending element.

여기서,  $L_x$  와  $L_y$  는  $x$  와  $y$  축 방향으로의 요소의 길이이다.

### 2.3 고차 판유한요소의 요소매트릭스

식(21)을 식(20)에 대입하여 정리하면

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} = \sum_{I=1}^8 \begin{bmatrix} \phi(z)N_{\omega,xx}^I & \phi(z)N_{X',xx}^I & \phi(z)N_{Y',xx}^I \\ \phi(z)N_{\omega,xy}^I & \phi(z)N_{X',xy}^I & \phi(z)N_{Y',xy}^I \\ N_{\omega}^I & N_{X'}^I & N_{Y'}^I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega^I \\ \frac{d\omega^I}{dx} \\ \frac{d\omega^I}{dy} \\ \theta_{y^I} \\ \theta_{x^I} \end{Bmatrix} - \phi(z)N_{\theta}^I \begin{Bmatrix} \omega^I \\ \frac{d\omega^I}{dx} \\ \frac{d\omega^I}{dy} \\ \theta_{y^I} \\ \theta_{x^I} \end{Bmatrix} \quad (25)$$

여기서  $\phi(z) = -\frac{4z^3}{3h^2}$ ,  $\psi(z) = \frac{4z^3}{3h^2} - z$  이다. 또한 식(6)과 식(25)로부터  $B$  매트릭스를 구하면 다음과 같다.

$$B = \begin{Bmatrix} \phi(z)N_{\omega,xx}^I & \phi(z)N_{X',xx}^I & \phi(z)N_{Y',xx}^I \\ \phi(z)N_{\omega,yy}^I & \phi(z)N_{X',yy}^I & \phi(z)N_{Y',yy}^I \\ 2\phi(z)N_{\omega,xy}^I & 2\phi(z)N_{X',xy}^I & 2\phi(z)N_{Y',xy}^I \\ \rho(z)N_{\omega,x}^I & \rho(z)N_{X',x}^I & \rho(z)N_{Y',x}^I \\ \rho(z)N_{\omega,y}^I & \rho(z)N_{X',y}^I & \rho(z)N_{Y',y}^I \\ -\phi(z)N_{\theta_x}^I & 0 \\ 0 & \phi(z)N_{\theta_y}^I \\ -\phi(z)N_{\theta_y}^I & \phi(z)N_{\theta_x}^I \\ \rho(z)N_{\theta_x}^I & 0 \\ 0 & -\rho(z)N_{\theta_y}^I \end{Bmatrix} \quad (26)$$

여기서,  $\rho(x) = 1 - \frac{4x^2}{h^2}$  이고  $N'_{,x} = \frac{\partial N'}{\partial x}$ ,  $N'_{,xx} = \frac{\partial^2 N'}{\partial x^2}$  이다. 그리고 응력과 변형률 관계는 다음과 같다.

$$C = \begin{pmatrix} \frac{E}{12(1-\nu^2)} & \frac{E\nu}{12(1-\nu^2)} & 0 \\ \frac{\nu}{12(1-\nu^2)} & \frac{E}{12(1-\nu^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{E}{2(1+\nu)} & 0 & \\ 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} & \end{pmatrix} \quad (27)$$

여기서  $E$ 는 탄성계수,  $\nu$ 는 포아손비이다. 따라서 식(10)으로부터 요소강도 매트릭스는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$K_e = D \int_{A_e} K_e^b dA + \frac{8}{15} Gh \int_{A_e} K_e^s dA \quad (28)$$

여기서  $D$ 는 판 상수,  $G$ 는 전단탄성계수,  $K_e^b$ 는 휨강성도, 그리고  $K_e^s$ 는 전단강성도이다. 또한 요소질량 매트릭스는

$$M_e = \rho \int_{A_e} m_e dA \quad (29)$$

이며  $\rho$ 는 질량밀도이다.

### 3. 예제 해석 및 고찰

본 연구에서 제안된 8 절점, 28 자유도의 고차판사각형 유한요소의 정확도와 효율성을 고찰하기 위하여 여러가지 경계조건을 갖는 판의 정적 처짐해석과 자유진동 해석을 수행하였다. 요소강도매트릭스는 shear locking 현상을 피하기 위하여 (3×3) Gauss 적분점을 이용하여 감차적분하였으며 consistent mass 를 요소질량 매트릭스로 하였다.

#### 3.1 등분포하중을 받는 단순지지 판의 처짐해석

단위등분포하중을 받는 정사각형 단순지지판 ( $E=1092000$ ,  $\nu=0.3$ ,  $a=10$ )의 정적 처짐 해석을 수행하여 그 결과를 여러가지 해와 비교하였다. 또한 판의 대칭성을 고려하여 판의 1/4 단을 4 개의 요소로 분할하여 해석하였다. 표 1~4에서 보는 바와 같이 고차 판 요소에 의한 해는 판의 두께가 두꺼운 경우에는 Mindlin 해와, 얇은 경우는 얇은 판 이론 해와 매우 잘 일치함을 알 수 있으며 전체자유도의 수가 비슷한 다른 요소들의 해보다 판의 두께에 관계없이 처짐과 단면력 모두 상당히 정확함을 보여주고 있다.

표 1. Central displacements ( $\times qa^4/D$ ) of a simply-supported square plate under a uniformly distributed load

Aspect ratio	$a/h=5$	$a/h=10$	$a/h=50$	$a/h=100$
Theory				
Mindlin(11)	0.00490	0.00427	0.00407	0.00406
Kant(10)	0.00480	0.00424	0.00407	0.00406
Owen et al.(6)	0.00481	0.00426	0.00408	0.00407
Present	0.00488	0.00427	0.00408	0.00406

(Classical thin plate solution(14)=0.00406)

표 2. Central bending moment ( $\times qa^2$ ) of a simply-supported square plate under a uniformly distributed load.

Aspect ratio	$a/h=5$	$a/h=10$	$a/h=50$	$a/h=100$
Theory				
Mindlin(11)	0.0478	0.0478	0.0478	0.0478
Kant(10)	0.0484	0.0480	0.0478	0.0478
Owen et al. (6)	0.0488	0.0484	0.0482	0.0482
Present	0.0477	0.0478	0.0478	0.0478

(Classical thin plate solution(14)=0.0479)

표 3. Corner twisting moment ( $\times qa^2$ ) of a simply-supported square plate under a uniformly distributed load.

Aspect ratio	$a/h=5$	$a/h=10$	$a/h=50$	$a/h=100$
Theory				
Mindlin(11)	-0.0324	-0.0324	-0.0324	-0.0324
Kant(10)	-0.0299	-0.0317	-0.0324	-0.0324
Owen et al.(6)	-0.0302	-0.0314	-0.0319	-0.0319
Present	-0.0322	-0.0322	-0.0322	-0.0322

(Classical thin plate solution(14)=-0.0325)

표 4. Mid-edge shear force( $\times qa$ ) of a simply-supported square plate under a uniformly distributed load.

Theory	Aspect ratio			
	$a/h=5$	$a/h=10$	$a/h=50$	$a/h=100$
Mindlin(11)	0.337	0.337	0.337	0.337
Owen et al.(6)	0.285	0.285	0.285	0.284
Present	0.320	0.324	0.326	0.326

(Classical thin plate solution(14)=0.338)

### 3.2 등분포하중을 받는 고정지지판의 처짐해석

단위등분포하중을 받는 정사각형 고정지지 판에 대한 정적처짐해석을 각기 다른  $a/h$  비에 대하여 판의 1/4 단을 4 개의 요소로 나누어 수행

하였다. 표 5에서 알 수 있는 바와 같이 단순 지지판의 경우와 마찬가지로 판의 두께에 관계 없이 매우 정확한 결과를 보여주고 있다.

### 3.3 단순지지판의 자유진동해석

고차 판 요소의 진동해석의 정확도를 고찰하기 위하여 정사각형 단순지지판( $E=10920$ ,  $L=1.0$ ,  $\rho=1.0$ )의 자유진동을 판의 대칭성을 이용하여 판의 1/4 단을 16 개 요소로 나누어 해석하였다. 두꺼운 판의 경우( $a/h=10$ ) 고차 판 요소에 의한 해가 정확해라 할 수 있는 3 차원 연속체 해에 가장 근접한 결과를 나타내고 있으며 얇은 판의 경우( $a/h=100$ )에도 얇은 판 이론에 가까움을 알 수 있다.

표 5. Result of a clamped square plate under a uniformly distributed load.

$a/h$	Theory	Central displacement( $\times qa^4/D$ )	Central bending moment ( $\times qa^2$ )	Corner twisting moment( $\times qa^2$ )	Mid-edge shear force( $\times qa$ )
2	Owen et al.(6)	0.00609	0.0338	-0.0267	0.297
	Present	0.00594	0.0236	-0.0400	0.093
5	Owen et al.(6)	0.00211	0.0256	-0.0359	0.323
	Present	0.00212	0.0234	-0.0427	0.190
10	Mindlin thick plate solution (11)	0.00150	0.0231	-0.0513	—
	Owen et al.(6)	0.00146	0.0236	-0.0387	0.344
	Present	0.00150	0.0231	-0.0498	0.382
50	Owen et al.(6)	0.00123	0.0227	-0.0399	0.356
	Present	0.00127	0.0228	-0.0467	0.391
100	Classical thin plate solution(14)	0.00126	0.0231	-0.0513	—
	Owen et al.(6)	0.00123	0.0227	-0.0399	0.356
	Present	0.00126	0.0228	-0.0494	0.377

표 6. Comparison of non-dimensional frequencies( $\lambda=\omega\sqrt{\rho h^2/G}$ ) and their error percentages to Linear 3-D Elasticity Theory solutions of a square simply supported plate ( $\nu=0.3$ ,  $a/h=10$ )

Mode Number ( $n \times m$ )	Theory					
	Linear 3-D Elasticity Theory (3)	Classical Thin Plate Theory(3)	Mindlin Plate Theory(25)	Rock & Hinton(3) (4 elements)	Tessler & Hughes(25)	Present element solution
1×1	0.0932	0.09632 (+3.40)	0.0930 (-0.16)	0.0931 (-0.02)	0.0933 (+0.11)	0.0932 (0.00)
3×1	0.4171	0.4816 (+15.45)	0.4144 (-0.66)	0.4387 (+5.16)	0.4324 (+3.67)	0.4161 (-0.24)
3×3	0.6889	0.8686 (+25.83)	0.6821 (-0.99)	0.7838 (+13.77)	0.7027 (+2.00)	0.6876 (-0.19)
5×1	—	—	0.9173	—	1.0432	0.9215
5×3	—	—	1.1267	—	1.2290	1.1392

표 7. Comparison of non-dimensional frequencies( $\lambda = \rho \omega^2 a^4 / D$ ) of a square thin plate( $a/h=100$ )

Mode number	Analytical solution(17)	Batoz et al. (17)	Present element
1×1	389.64	377.29	387.42
1×3	9740.91	9126.28	9594.81
3×3	31560.55	27264.37	29842.35
1×5	65848.55	57129.63	62784.65

#### 4. 결 론

본 연구의 결과를 요약하면 다음과 같다.

(1) 본 연구에서 제안한 사각형 고차판 유한 요소는 실제 변형형상과 유사한 변형형상을 가정하여 연속체로 부터 유도하였기 때문에 전단 변형에너지를 보정을 위한 절단수정계수의 사용이 필요없다.

(2) 정적처짐해석의 경우 판의 두께와 경계조건에 관계없이 연직처짐과 단면력 모두 정확한 결과를 나타내고 있다.

(3) 자유진동해석의 경우에도 판의 두께에 관계없이 정확해에 매우 근접한 결과를 보여주고 있으므로 판의 정적처짐해석이나 진동해석에 판이 두께에 관계없이 사용할 수 있는 효율적인 판요소라고 사료된다.

#### 감사의 말

본 연구는 한국과학재단의 1986년도 후반기 연구비 지원에 의하여 이루어진 연구의 일부이며 이에 한국과학재단에 깊은 감사를 드리는 바이다.

#### 참 고 문 헌

1. Ugural, A.C., "Stress in Plates and Shells", pp. 2~22, McGraw Hill, (1981).
2. Noboru Kikuchi, "Finite Element Methods in Mechanics", Cambridge Univ. Press, pp. 304~327. (1984)
3. Rock, T.A. and Hinton, E., "A Finite Element Method for the Free Vibration of Plates Allowing for Transverse Shear Deformation", *Computers & Structures*, Vol. 6, pp. 37~44, (1975).
4. Bhashyam, G.R. and Gallagher, R.H., "An Approach to the Inclusion of Transverse Shear

- Deformation in Finite Element Plate Bending Analysis", *Computers & Structures*, Vol. 19, No. 1~2, pp. 19~27, (1984).
5. Hinton, E. and Bicanic, N., "A Comparison of Lagrangian and Serendipity Mindlin Plate Element for Free Vibration Analysis" *Computers & Structures*, Vol. 10, pp. 484~493, (1979).
6. Kant, T., Owen, D.R.J. and Zienkiewicz, O.C., "A Refined Higher Order C Plate Bending Element", *Computers & Structures*, Vol. 15, No. 2, pp. 177~183, (1982).
7. Cook, R.D., "Some Elements for Analysis of Plate Bending", *Proc. J. Eng. Mech.*, ASCE, Vol. 98, pp. 1453~1470, (1972).
8. Hughes, T.J.R., Taylor, R.L. and Kanok-Nukulchai, W., "A Simple and Efficient Finite Element for Plate Bending", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 11, pp. 1529~1543, (1977).
9. Kanok-Nukulchai, W., Taylor, R.L. and Hughes, T.J.R., "A Large Deformation Formulation for Shell Analysis by the Finite Element Method," *Computers & Structures*, Vol. 13, pp. 19~27, (1981).
10. Kant, T., "Numerical Analysis of Thick Plate", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 31, pp. 1~18, (1982).
11. Kant, T. and Hinton, E., "Numerical Analysis of Rectangular Mindlin Plate by the Segmentation Method", Civil Engineering Department, Rept. C/R/365/80, Univ. of Wales, Swansea, (1980).
12. Kanok-Nukulchai, W. and Shin, Y.S., "Versatile and Improved Higher-Order Beam Element", *J. Str. Eng.*, ASCE, Vol. 110, No. 9, pp. 2234~2248, (1984).
13. Shames, I.H. and Dym, C.L., "Energy and Finite Element Methods in Structural Mechanics", Hemisphere Publish, pp. 259~322, pp. 510~542, pp. 574~627, (1985).
14. Timoshenko, S.P. and Woinowsky-Krieger, "Theory of Plates and Shells", McGraw-Hill, 2nd edition, pp. 180~225, (1984).
15. Zienkiewicz, O.C., "The Finite Element Method", McGraw-Hill, 3rd edition, pp. 42~134, pp.

148~303, pp.178~210, (1977).

16. Dhatt, G. and Touzot, G., "The Finite Element Method Displayed", John Wiley & Sons, pp.42~47, pp.77~128.
17. Batoz, J.L., Eathe, K.J. and Ho, L.W., "A Study of Three Node Triangular Plate Bending Elements", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 15, pp.1771~1812, (1980).
18. Batoz, J.L., "An Explicit Formulation for Efficient Triangular Plate Element", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 18, pp.1077~1089, (1982).
19. Bergan, P.G. and Wang, X., "Quadrilateral Plate Bending Elements with Shear Deformations", *Computers & Structures*, Vol. 19, No. 1, pp.25~34, (1984).
20. Cheung, Y.K. and Chan, H.C., "A Family of Rectangular Bending Elements", *Computers & Structures*, Vol. 10, pp.613~619, (1979).
21. Cook, R.D., "Concepts and Applications of

*Finite Element Analysis*", John Wiley & Sons, 2nd edition, pp. 1196~98, (1981).

22. Hughes, T.J.R. and Tezduyar, T.E., "Finite Element Based upon Mindlin Plate Theory with Particular Reference to the Four Node Bilinear Isoparametric Element", *J. Appl. Mech.*, ASME, Vol. 48, pp.587~596, (1981).
23. Hughes, T.J.R. and Martin, C., "The 'Heterosis' Finite Element for Plate Bending", *Computers & Structures*, Vol. 9, pp.445~450, (1978).
24. Penzien, J. and Clough, R.W., "Dynamics of Structures", McGraw-Hill, pp.151~172, pp.308~325, (1975).
25. Tessler, A. and Hughes, T.J.R., "An Improved Treatment of Transverse Shear in the Mindlin-Type Four-Node Quadrilateral Element", *CoSp. Mech. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 39, pp.311~335 (1983)

(接受: 1988. 1. 25)