

# Circulatory Force 를 받는 平面 뼈대 構造物의 動的 後挫屈 舉動에 관한 研究

A Study on the Dynamic Post-Buckling Behavior of the Plane  
Frame Structures Subjected to Circulatory Forces

金 文 榮\*  
Kim, Moon Young  
張 丞 弼\*\*  
Chang, Sung Pil

---

## Abstract

A geometrically nonlinear analysis procedure for plane frame structures in order to study the static and dynamic post-buckling behavior of these structures subjected to circulatory forces is presented.

The elastic and geometric stiffness matrices, the mass matrix and load correction stiffness matrix are derived from the extended virtual work principle, where the tangent stiffness matrix becomes non-symmetric due to the effects of non-conservative circulatory forces.

The dynamic analysis of plane frame structures subjected to circulatory forces in pre- and post-buckling ranges is carried out by integrating the equations of motion directly by the numerically stable Newmark method. Numerical results are presented in order to demonstrate the validity and accuracy of the proposed procedure.

---

## 要 旨

本 論文은 平面 뼈대 構造物의 動的 後挫屈 舉動을 把握하기 위하여 幾何的인 非線形 有限要素法을 提示한다. 이를 위하여 3次元 連續體에 대한 假想일의 原理에 베루누이—오일러 가정을 도입하므로써, 平面 뼈대에 대한 彈性剛도매트릭스, 幾何的인 剛도매트릭스 그리고 質量매트릭스들을 유도한다. circulatory force를 받는 경우에는 circulatory discrete joint load와 circulatory distributed load에 대한 load correction stiffness matrix를 유도하므로써 이러한 하중을 받는 構造物의 接線剛도매트릭스는 비대칭 행렬임을 보인다. 유도된 非線形 運動方程式의 解는 Newton-Raphson 方法 및 Newmark 方法을 使用하여 구한다.

---

\* 正會員 · 成均館大學校 工科大學 講師

\*\* 正會員 · 서울大學校 工科大學 教授, 土木工學科

## 1. 序 論

彈性論과 彈性安定論 등의 應用力學分野에서 取扱되는 荷重들은 대부분 保存力들(conservative forces)로서 일함수(work function)를 갖는다. 이에 반하여 非保存力들(nonconservative forces)은 일함수를 가질 수 없는 힘을 말하며 그 예로는 物體들이 서로 接觸하여서 일어나는 摩擦力과 작용점의 變位에 따라 作用方向이 바뀌는 follower force와 follower moment와 같은 circulatory force<sup>(1)</sup>들을 들 수 있다.

이러한 circulatory force들을 받는 시스템의 安定性 問題(stability)는 構造力學 뿐만 아니라 航空宇宙工學, 流體動力學 그리고 電氣工學 등과 같은 현대의 應用力學과 工學의 여러 분야에서 重要的 技術的인 問題로 대두되고 있다.

非保存力系(nonconservative system)의 安定性에 관한 線形理論들은 彈性基礎, 減衰荷重, 質量分布, 그리고 境界條件 등 시스템에 영향을 주는 여러가지 파라미터들에 따라서 從來의 오일러 방법으로 다룰 수 있는 靜的 不安定狀態(divergence)와 動的인 方法으로만 해석이 가능한 flutter 현상을 설명할 수 있음을 보인다<sup>(2,3,4)</sup>.

最近에 이르러 有限要素法은 circulatory force를 받는 시스템의 安定性 問題에 成功的으로 적용되었다. Barsoum<sup>(4)</sup>은 Hamilton의 原理를 利用한 有限要素法을 提示하였으며 Kikuchi<sup>(5)</sup>는 Mikhlin의 研究에 토대를 둔 Galerkin-F.E.M을 개발하였다. 위의 研究들은 대부분 線形理論을 이용하여 臨界荷重(critical divergence load, critical flutter load)을 算定하는데 焦點을 맞추었다. 그러나 線形理論으로는 시스템이 어떠한 條件下에서 不安定狀態에 到達하는가를 알려 주기는 하지만 不安定狀態 以後에 일어나는 舉動에 대해서는 充分한 情報을 얻을 수 없다. 따라서 그러한 舉動을 알기 위해서는 非線形 解析이 요구된다.

本 論文에서는 3次元連續體의 増分運動方程式에 剪斷變形을 무시하는 베루누이-오일러 가정을 적용하여 平面 뼈대의 増分運動方程式을 얻는다. 이때 彈性剛도 매트릭스, 幾何的인 剛도 매트릭스, 質量 매트릭스, 그리고 circulatory force

의 영향을 고려하는 Load Correction Stiffness Matrix (L.C.S.M)가 유도된다. 이렇게 유도된 운동방정식을 시간에 대하여 直接積分을 하므로서 circulatory force를 받은 平面 뼈대 構造物의 動的 後挫屈 舉動을 把握한다.

本 研究에 필요한 가정은 다음과 같다.

- 1) 斷面은 2軸對稱으로 일정하다.
- 2) 剪斷力에 의한 變形은 무시한다.
- 3) 全 荷重段階에 걸쳐서 部材斷面의 剛體移動變位는 有限하지만 變形度는 작다.
- 4) 動的 解析을 수행할때 減衰荷重의 영향은 무시한다.

## 2. 保存力를 받는 平面 뼈대 構造物의 運動方程式

幾何的인 非線形解析(geometric nonlinear analysis)에 있어서 運動方程式은 變위를 일으킨 물체의 현재상태에서 유도되어야 하지만 일반적으로 문제가 풀리기 전에는 그러한 현재상태를 알 수 없으므로 増分形態의 運動方程式을 세워 매 시간단계마다 解를 구해나가야 한다.

動的 解析에서는 실제시간을 나타내고 靜的 解析에서는 quastatic 하중단계를 의미하는 시간  $t$ 의 개념을 도입하여 시간  $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, t$ 까지 解가 구해졌다고 가정한다. 시간  $0, t, t + \Delta t$ 에서 물체의 운동과 임의점  $P$ 의 직각좌표 성분들이 시간단계마다 새로 형성되는 것을 보여주는 그림 2.1을 참조하여 시간  $t + \Delta t$ 에서 물체의 動的인 平衡을 나타내는 假想變位の 原理는 updated lagrangian 方法에 의하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\int_{0V} {}^0\rho^{t+\Delta t} \dot{U}_i \delta(\Delta U_i) {}^0dV + \int_{tV} {}^{t+\Delta t} S_{ij} \delta^{t+\Delta t} \epsilon_{ij} {}^{t+\Delta t} dV = {}^{t+\Delta t} \delta W^c \quad (2.1)$$

여기서,  ${}^0\rho$ 는 시간 0에서의 밀도,  ${}^0V, {}^tV$ 는 시간 0와 시간  $t$ 에서의 부피를 나타내고  ${}^{t+\Delta t} \dot{U}_i$ 는 시간  $t + \Delta t$ 에서의 가속도 성분,  $\Delta U_i$ 는 시간  $t$ 와 시간  $t + \Delta t$  사이의 변위증분성분을 표시한다.  ${}^{t+\Delta t} S_{ij}$ 는 시간  $t$ 에서의 좌표계를 기준으로 시간  $t + \Delta t$ 에서 2nd piola kirchhoff stress tensor를 나타낸 것이며  ${}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij}$ 는 green-lagrange strain tensor를 나타내며  ${}^{t+\Delta t} \delta W^c$ 는 保存力의 外

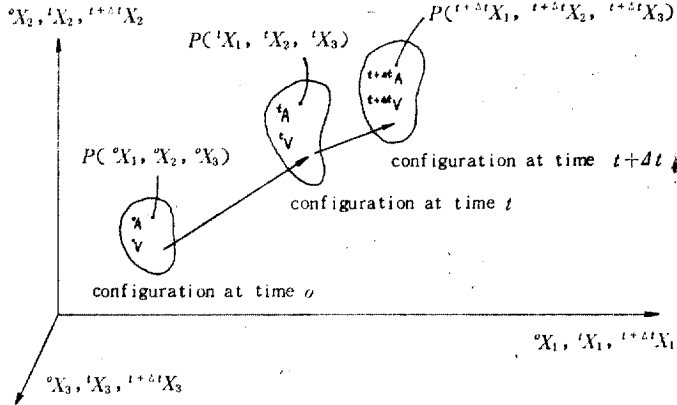


그림 2.1 The motion of body at the stationary cartesian coordinates

의 假想일을 표시한 것이다.

식(2.1)을 増分形態로 바꾸기 위하여 시간  $t + \Delta t$ 에서의 應力과 變形度를 시간  $t$ 와 시간  $t + \Delta t$  사이의 증분량과 시간  $t$ 에서의 크기로 나누면 아래와 같은 増分運動方程式을 얻는다. 식(2.1)과 식(2.2)의 자세한 유도과정은 문헌<sup>(6)</sup>을 참조할 수 있다.

$$\int_{^0V} {}^0\rho^{t+\Delta t} \ddot{U}_i \delta(\Delta U_i) {}^0dV + \int_{^tV} C_{ijrs} \Delta e_{rs} \delta(\Delta e_{ij}) {}^tdV + \int_{^tV} {}^t\tau_{ij} \delta(\Delta \eta_{ij}) {}^tdV = {}^{t+\Delta t}\delta W^e - \int_{^tV} {}^t\tau_{ij} \delta(\Delta e_{ij}) {}^tdV \quad (2.2)$$

여기서,  $C_{ijrs}$ 는 4th elasticity tensor,  $\Delta e_{ij}$ 와  $\Delta \eta_{ij}$ 는 green-lagrange strain tensor( ${}^{t+\Delta t}e_{ij}$ )의 線形項과 非線形項,  ${}^t\tau_{ij}$ 는 시간  $t$ 에서의 cauchy stress tensor를 나타낸다.

식(2.2)에서 왼쪽의 세항들은 질량매트릭스, 탄성강도매트릭스 그리고 기하적인 강도매트릭스를, 오른쪽의 두항은 不平衡荷重(unbalanced load)을 산정하는데 사용된다.

시간  $t$ 에서의 局部座標系(그림 2.1 참조)를 나타내는  $x-y$ 平面 내에서  $x$ 축이 부재단면의 도심을 지나는 平面배대의 임의 단면에 대한 増分變位場 성분들은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \Delta U_1(x, y) &= U_x(x) - y \cdot U_y'(x) \\ \Delta U_2(x, y) &= U_y(x) \end{aligned} \quad (2.3)$$

여기서,  $U_x, U_y$ 는  $x, y$ 축 방향의 斷面剛體移動

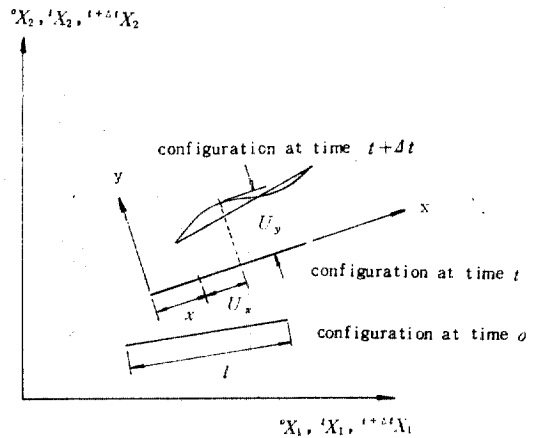


그림 2.2 Motion of the two-dimensional beam element and its local coordinate axes ( $x-y$ ) at time  $t$  shown in global coordinate systems

變位増分을,  $U_y'$ 는  $U_y$ 를  $x$ 로 미분한 것으로 斷面剛體回轉變位増分을 나타내며  $\Delta U_1, \Delta U_2$ 는 각각 증분변위의  $x$ 축,  $y$ 축 방향의 성분들을 나타낸다.

平面배대의 非線形 變位-變形度 관계식은 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\Delta \bar{e}_{ij} = \Delta \bar{e}_{ij} + \Delta \bar{\eta}_{ij} \quad (2.4)$$

여기서,  $\Delta \bar{e}_{11} = \Delta U_{1,1}$ ,

$$\Delta \bar{\eta}_{11} = \frac{1}{2} (\Delta U_{1,1})^2 + \frac{1}{2} (\Delta U_{2,1})^2$$

$\Delta\bar{e}_{12}=0, \Delta\bar{\eta}_{12}=\frac{1}{2}(\Delta\bar{U}_{1,1}\cdot\Delta\bar{U}_{1,2}+\Delta\bar{U}_{2,1}\cdot\Delta\bar{U}_{2,2})$ 이고 나머지  $\Delta\bar{\epsilon}_{ij}$ 의 성분들은 0이다.

윗식들에서 ( )<sub>1</sub>, ( )<sub>2</sub>는 각각 ( )를  $x, y$ 로 편미분한 것이며 ( )는 국부좌표계( $x, y$ )에서 측정된 값을 나타낸다.

시간  $t$ 에서 部材의 内部에 발생하는 斷面力들을  $F_1=\iint^t\tau_{11}dA, F_2=\iint^t\tau_{12}dA, M_3=-\iint^ty\cdot\tau_{11}dA$ 로 정의하고 식(2.2)의 오른쪽 세항들에 식(2.3), (2.4)를 대입하여 단면에 대하여 적분을 행하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$\delta\pi_1=\int(EAU_x'\delta U_x'+EI_3U_y'\delta U_y')d^tx \quad (2.5a)$$

$$\delta\pi_2=\int(F_1U_x'\delta U_x'+F_1U_y'\delta U_y'+\frac{I_3}{A}F_1\cdot U_y''\delta U_y''+M_3\delta(U_x'U_y'')-F_2\delta(U_x'U_y''))d^tx \quad (2.5b)$$

$$\delta\pi_3=\int^0\rho\cdot(A\ddot{U}_x\delta U_x+A\ddot{U}_y\delta U_y+I_3\ddot{U}_y'\delta U_y')d^0x \quad (2.5c)$$

여기서,  $\delta\pi_1, \delta\pi_2$  및  $\delta\pi_3$ 는 각각 식(2.2)의 좌변의 첫세항, 둘째항 및 세째항을 계산한 결과이다.

變形度는 작고, 斷面의 回轉角은 작지만 有限(finite)할때(7)  $\Delta\bar{\eta}_{11}=\frac{1}{2}(\Delta\bar{U}_{2,1})^2, \Delta\bar{\eta}_{12}=0$ 로 계산해도 충분하므로 식(2.5b)는 식(2.6)와 같이 나타내기도 한다.

$$\delta\pi_2^*=\int F_1\cdot U_y'\delta U_y'd^tx_1 \quad (2.6)$$

식(2.5), (2.6)에서 ( )'는 ( )를  $x$ 로 1차 편미분한 것이고 ( )는 ( )를  $t$ 로 2차 편미분한 것이며  $A$ 는 단면적,  $I_3$ 는  $z$ 축에 대한 단면 2차 모멘트이다.

구조물의 質量이 保存된다고 가정하면 각 시간단계에서 質量매트릭스는 처음에 계산한 質量매트릭스를 그대로 사용할 수 있다.

### 3. 接線剛度매트릭스 및 質量매트릭스의 誘導

2장에서 誘導된 식(2.4), (2.5)를 이용하여 平面剛체의 剛度매트릭스 및 質量매트릭스를 얻

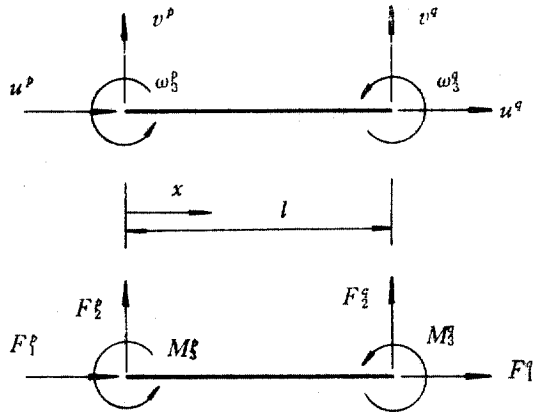


그림 3.1 Element displacement vectors and member end force vectors

기 위해서는 먼저 부재단면의 변위들( $U_x, U_y, U_y'$ )을 要素의 節點變位들로 나타내야 한다. 이를 위하여 本 研究에서는 1차와 3차 Hermitian 다항식을  $U_x, U_y$ 의 形狀函數로 사용한다.

그림 3.1을 참조하여  $U_x, U_y$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} U_x &= U^p(1-\beta) + U^q\cdot\beta \\ U_y &= (1+2\beta^3-3\beta^2)\cdot V^p + \beta\cdot(1-\beta)^2\cdot L\cdot\omega_3^p + \\ &\quad (3\beta^2-2\beta^3)\cdot V^q + \beta(\beta^2-\beta)\cdot L\cdot\omega_3^q \end{aligned} \quad (3.1)$$

여기서,  $\beta=x/L$ 이다.

이제 식(3.1)을 식(2.5a), (2.5c)에 대입하여 적분을 행하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned} \delta\pi_1 &= \langle \delta U_e \rangle [K_e] \{ U_e \}, \\ \delta\pi_3 &= \langle \delta U_e \rangle [M_e] \{ \dot{U}_e \} \end{aligned} \quad (3.2)$$

여기서,  $\langle U_e \rangle = \langle u^p, v^p, \omega_3^p, u^q, v^q, \omega_3^q \rangle$ 이고  $\langle \dot{U}_e \rangle$ 는  $\langle U_e \rangle$ 의 각 성분들을  $t$ 로 2차 미분한 것이다.  $\{ U_e \} = \langle U_e \rangle^T$ 이고  $[K_e]$ 는 平面剛체要素의 彈性剛度매트릭스,  $[M_e]$ 는 回轉慣性까지 省略하게 고려된 質量매트릭스이다.

幾何的인 剛度매트릭스는 荷重이 節點에만 작용하여 軸力( $F_1$ )과 剪斷力( $F_2$ )은 要素內에서 일정하고 휨모멘트( $M_3$ )는 線形變化를 나타내는 경우와 外部에서 작용하는 軸力이 部材의 길이를 따라서 線形分布를 나타내는 두가지 경우에 대하여 유도한다.

첫번째 경우에  $F_1=-F_1^p=F_1^q, F_2=-M_3^p+M_3^q/L, M_3=-M_3^p+\beta\cdot(M_3^p+M_3^q)$ 를 식(2.4b)에 대입하여 적분을 행하면 다음과 같다.

$$\delta\pi_2 = \langle \delta U_e \rangle [K_E] \{U_e\} \quad (3.3)$$

여기서,  $[K_E]$ 는 첫번째 경우에 대한 幾何的인 剛度매트릭스를 나타낸다.

두번째 경우에는  $F_1 = -F_1^c + P_1^c \cdot x + (P_1^c - P_1^c) \cdot \frac{x^2}{2L}$ 을 식(2.5)에 대입하여 계산하면 식(3.4)와 같은 결과를 얻는다.

$$\delta\pi_2^* = \langle \delta U_e \rangle [K_E^*] \{U_e\} \quad (3.4)$$

여기서,  $P_1^c$ 와  $P_1^c$ 는 직선변화를 나타내는 軸方向 外部荷重의  $x=0, L$ 에서의 크기이다(그림 4.1 참조).

식(3.2), (3.3), (3.4)에 표시한  $[M_e]$ ,  $[K_E]$ ,  $[K_E^*]$  매트릭스들의 최종결과들은 부록에 제시하였다.

#### 4. Circulatory Force를 받로 平面剛架 構造物의 運動方程式

本 論文에서 생각하는 nonconservativeness는 外部에서 작용하는 circulatory force들로부터 생겨나므로 이들의 영향을 고려한 운동방정식은 2장에서 誘導된 假想일의 原理를 확장시켜서 非保存력이 행하는 假想일을 保存력이 하는 假想일에 추가하므로써 얻을 수 있다.

##### 4.1 Circulatory force들의 영향을 고려한 増分運動方程式

要素의 變位場  $U$ 는 形狀函數  $H(x)$ 와 節點變位벡터  $\hat{U}$ 에 의해서

$$U = H(x) \cdot \hat{U} \text{로 나타낼 수 있다.} \quad (4.1)$$

Circulatory load vector  $P_d^c$ ,  $F_i^c$ 는 다음과 같이 변위장의 非線形 函數로 생각한다.

$$P_d^c = \lambda_d \cdot f_d(x, U(x))$$

$$F_i^c = \lambda_i \cdot f_i(U(x_i)), \quad i=1, 2, \dots, k \quad (4.2)$$

여기서,  $P_d^c$ 는 circulatory distributed load 이고  $F_i^c$ 는 circulatory concentrated force들이며  $\lambda_d, \lambda_i$ 는 하중의 크기를 나타내는 파라미터들이다.

假想變位에 대하여 circulatory force들이 행하는 假想일  $\delta W^{nc}$ 는 다음과 같다.

$$\delta W^{nc} = \int P_d^c \cdot \delta U dx + \sum_{i=1}^k F_i^c \cdot \delta U(x_i) \quad (4.3)$$

식(4.1)과 식(4.2)를 식(4.3)에 대입하면 식

(4.4)를 얻는다.

$$\delta W^{nc} = [\lambda_d \int H \cdot f_d dx + \sum_{i=1}^k \lambda_i H_i f_i] \delta \hat{U} = P_d^{nc}(\hat{U}) \delta \hat{U} \quad (4.4)$$

여기서,  $H_i = H(x_i)$ 이며  $P_d^{nc}$ 는 外部에서 작용하는 circulatory force들과 역학적으로 동등한 節點荷重벡터를 나타낸다.

이제, 평면剛架의 増分運動方程式을 얻기 위하여 식(4.4)를 증분형태로 나타내면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$d(\delta W^{nc}) = (dP_d^{nc} + dP_d^{nc}) \cdot \delta \hat{U} = (dP_d^{nc} + \frac{\partial P_d^{nc}}{\partial \hat{U}} d\hat{U}) \delta \hat{U} \quad (4.5)$$

여기서,  $dP_d^{nc}$ 과  $dP_d^{nc}$ 는 각각 circulatory force의 크기변화와 방향변화로 인한 節點荷重増分을 표시한 것이다.

$K^{nc} = \frac{\partial P_d^{nc}}{\partial \hat{U}}$ 를 load correction stiffness matrix로 정의하면 일반적인 증분운동방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$[M]^{t+\Delta t} U + ({}^t[K_E] + {}^t[K_G] - {}^t[K^{NC}]) d\hat{U} = dP^c + dP_{EM}^{NC} \quad (4.6)$$

여기서,  $[M]$ 은 전체좌표계에 대한 질량매트릭스,  $({}^t[K_E] + {}^t[K_G] - {}^t[K^{NC}])$ 는 시간  $t$ 에서 接線剛度매트릭스를 나타내며  $dP^c$ 와  $dP_{EM}^{NC}$ 은 保存력과 非保存력의 크기의 増分 또는 반복계산시 불평형하중을 의미한다.

본 연구에서는 運動方程式(4.6)의 解를 구하기 위하여 Newton-Raphson方法 및 Newmark方法을 사용한다. 이때  $\alpha=0.25$ ,  $\delta=0.5$ 를 선택하며 매시간단계마다 불평형하중이 허용한계 내에 들어올때 까지 반복계산한다.

##### 4.2 節點에 작용하는 Circulatory Force에 대한 Load Correction Stiffness Matrix( $K^{nc}$ )

절점에 작용하는 circulatory force vector  $F^{nc}$ 는 그 절점의 회전각  $\theta$ 의 비선형 함수로 나타낼 수 있다.

$$F^{nc} = [T(\theta)] \cdot F_0^{nc} \quad (4.7)$$

$$\text{여기서, } [T] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad F_0^{nc} = \begin{Bmatrix} F_x^{nc} \\ F_y^{nc} \end{Bmatrix}$$

그리고  $F_0^{nc} = \begin{Bmatrix} F_x^c \\ F_y^c \end{Bmatrix}$ 이다.

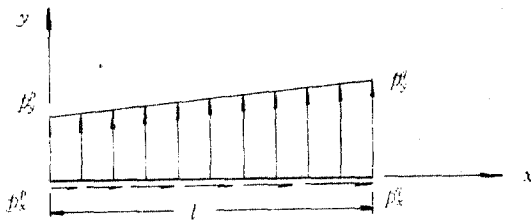


그림 4.1 Beam element under linearly varying circulatory distributed loadings

$[K^{nc}]$ 의 정의와 식(4.7)을 고려하면 절점에 작용하는 circulatory force에 대한  $[K^{nc}]$ 는 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$[K^{nc}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin \theta \cdot F_x^{nc} - \cos \theta \cdot F_y^{nc} \\ 0 & 0 & \cos \theta \cdot F_x^{nc} - \sin \theta \cdot F_y^{nc} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Circulatory force vector  $F^{nc}$ 와 회전각  $\theta$ 는 전체좌표계에 대하여 정의된 것이므로 식(4.8)에 제시한  $[K^{nc}]$ 는 좌표변환할 필요없이 바로 전체좌표계에 대한  $[K^{nc}]$ 에 더할 수 있다.

#### 4.3 Circulatory distributed load에 대한 load correction stiffness matrix

Circulatory distributed load가 작용점의 회전각에 대한 線形函數라고 가정하고, 이러한 分布荷重을 받는 평면배대요소에 대한  $[K^{nc}]$ 를 유도한다.

Fig. 4.1은 초기상태의  $x$ 축을 따라서 직선분포를 이루는 circulatory distributed load를 받는 평면배대요소를 국부좌표계로 나타낸 것이다. 축방향 하중은  $x$ 축을 따라서  $P_x^c$ 에서  $P_l^c$ , 횡하중은  $y$ 축방향으로  $P_y^c$ 에서  $P_d^c$ 의 직선분포를 이루고 있다.

초기상태에서 circulatory distributed load의 분포는

$$P_{x0} = P_x^c + \beta \cdot (P_x^c - P_l^c), \quad \beta = x/L \quad (4.9)$$

$P_{y0} = P_y^c + \beta \cdot (P_y^c - P_d^c)$ 로 쓸 수 있고 시간  $t$ 에서 要素가 받는 circulatory distributed load  $P_d^{nc}$ 의 분포는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$P_d^{nc} = [T] \cdot P_d^c \quad (4.10)$$

여기서,  $[T] = \begin{pmatrix} 1 & -U_y' \\ U_y' & 1 \end{pmatrix}$ ,  $P_d^{nc} = \begin{pmatrix} P_{xd} \\ P_{yd} \end{pmatrix}$

그리고  $P_d^{nc} = \begin{pmatrix} P_{x0} \\ P_{y0} \end{pmatrix}$  이다.

시간  $t$ 에서 circulatory distributed load가 행하는 假想일은

$$\delta W^{nc} = \int P_d^{nc} \cdot \delta U dx \quad (4.11)$$

가 된다.

$U_y' = 6\beta(\beta-1) \cdot \frac{v^p}{l} + (1-4\beta+3\beta^2) \cdot \omega_3^q + 6\beta(1-\beta) \cdot \frac{v^q}{l} + \beta(3\beta-2) \cdot \omega_3^q$ 를 이용하여  $[T]$ 를 절점변위로 나타내고 식(4.9), (4.10)을 식(4.11)에 대입하여 적분을 행하면 식(4.12)를 얻을 수 있다.

$$\delta W^{nc} = \int P_d^{nc} \cdot \delta U dx + \langle \delta U_i \rangle [K^{nc}] \{U_i\} \quad (4.12)$$

여기서,  $[K^{nc}]$ 는 국부좌표계에 대한 load correction stiffness matrix이다.

전체좌표계에 대한  $[K^{nc}]$ 는 직접강도법(direct stiffness method)에 의해서 식(4.12)의  $[K^{nc}]$ 를 전체좌표계로 변환시키므로 얻을 수 있다.  $[K^{nc}]$ 에 대한 최종 계산결과와는 부록에 나타내었다.

## 5. 解析例

본 논문에서 제시한 이론의 타당성을 검증하기 위하여 平面배대 構造物의 動的 非線形解析을 수행할 수 있는 프로그램을 개발하였다. 保存力만을 취급하는 기존의 프로그램과는 달리 circulatory force의 영향들(接線剛度 매트릭스의 비대칭성과 不平衡荷重을 산정할 때 circulatory forces의 방향변화)을 고려할 수 있도록 하였으며 데이터를 입력시킬 때 부재의 단위중량을 零으로 놓으므로 非線形 靜的 解析도 가능하도록 하였다. 여러가지 예제들을 준비하여 개발된 프로그램을 시험해본 결과 만족할만한 결과들을 얻었으며 여기서는 動的 後挫屈 舉動에 대한 예제만을 취급하도록 한다.

### 5.1 Follower force 및 保存力을 받는 외팔기둥의 critical load

방향이 일정한 축력(保存力)을 받는 외팔기둥은 divergence에 의해 靜的 不安定狀態로 轉移

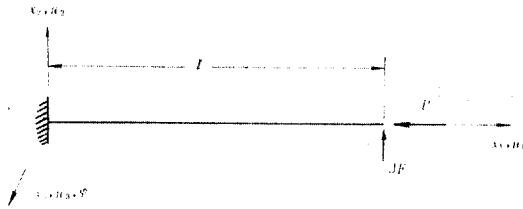


그림 5.1 Cantilever Under follower force

하는 반면에 follower force를 받는 외팔기둥은 動的인 安定狀態에서 動的인 不安定狀態로 轉移하므로 이러한 시스템의 post-flutter 거동을 파악하기 위해서는 動的인 非線形解析이 필요하다는 것은 잘 알려진 사실이다.

그림 5.1은 축력을 받는 외팔기둥을 나타낸 것으로 그 제원은 다음과 같다.

- 길이  $L=100$  cm,
- 단면 2차 모멘트  $I_3=1.666667$  cm<sup>4</sup>,
- 단면적  $A=20$  cm<sup>2</sup>,
- 탄성계수  $E=2.1 \times 10^7$  N/cm<sup>2</sup>

위의 시스템에 대한 critical load들을 산정하기 위하여 식(4.6)을 다시 쓰면 아래와 같다.

$$[M]^{t+t}U + ({}^t[K_E] + {}^t[K_G] - {}^t[K^{NC}])d\hat{U} = dP^c + dP_{EE}^{NC}$$

부재의 운동을 Harmonic motion으로 가정하고  $[K_G - K^{NC}]$ 의 항속에 포함되어 있는 force parameter( $P$ )를 고려하면 윗식은 시간 0에서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$[K_E]\hat{U} - P \cdot [K]\hat{U} = \bar{\omega}^2 \cdot [M]\hat{U} \quad (5.1)$$

여기서,  $\bar{\omega}$ 는 축력을 받는 외팔기둥의 固有振動數이고  $\hat{U}$ 는 初期節點變位벡터를 나타낸다.

식(5.1)은  $P$ 와  $\bar{\omega}^2$ 에 대한 2重固有值問題에 해당한다. 외팔기둥의 動的 特性을 파악하기 위해서는 윗식에서  $P - \bar{\omega}^2$  관계곡선(固有值曲線)을 얻어야 한다.

Critical flutter load는 가장 작은 두개의 고유진동수가 일치하게 되는 점에 대응하는 follower force의 크기로서 얻을 수 있으며 이에 대한 해석적인<sup>(9)</sup> 해는  $P_{FL} = \frac{2.008\pi^2 EI_3}{L^3}$ 이다. critical divergence load는  $\bar{\omega}=0$ 에 대응하는 가장 작은 保存力의 크기로서 얻을 수 있으며 그 값은  $P_d = \frac{\pi^2 EI_3}{4L^2}$ 이다.

## 5.2 축력을 받는 외팔기둥의 後挫屈 舉動

그림 5.1에서 보는 바와 같이 축력을 받는 외팔기둥의 動的 後挫屈 舉動을 얻기 위하여 다음과 같은 4가지 하중조건을 생각한다. 모든 경우에 하중단계는 0.001초 간격으로 계산하였으며 크기와 방향이 일정한 미소한 횡하중( $\Delta F=10$ N)을 자유단에 0.001초 동안 재하시켰다가 0.002초 이후에는 이 힘을 제거하므로써 외팔기둥이 순수한 축력만을 받도록 고려하였다.

(1) 전시간 단계에 걸쳐서 0.001초당 2000N씩 증가하는 follower force를 재하시킨다. (그림 5.2 참조)

(2) Follower force를 0.001초당 2000N씩 증가시키다가 0.036초가 경과한 후에는 하중을 critical flutter load(69.364kN)보다 약간 큰 72.0 kN으로 일정하게 크기를 유지시킨다(그림 5.3 참조).

(3) 保存力을 0.001초당 1000N씩 증가시키다가 0.009초가 경과한 후에는 critical divergence load(8.636kN)보다 약간 큰 9.0kN으로 일정하게 크기를 유지시킨다(그림 5.4 참조).

(4) Follower force를 0.001초당 2000N씩 증가시키다가 0.034초가 경과한 후에는 critical divergence load보다 약간 작지만 critical divergence load보다는 약 7.87배 큰 68.0kN으로 일정하게 크기를 유지시킨다(그림 5.5 참조).

그림 5.2, 5.3, 5.4, 5.5는 네가지 하중조건에 대하여 0.001초의 시간간격으로 非線形 動的 解析을 수행한 결과를 圖示한 것으로 그림 5.2, 5.3, 5.5는 자유단의 수평변위  $U_1$ , 수직변위  $U_2$  및 회전각  $\omega$ 의 크기를, 그림 5.4는 수직변위  $U_2$ 의 크기만을 시간에 따라 나타낸 것이다.

재하된 하중의 크기가 임계하중값보다 작은 구간과 큰 구간을 구분하기 위하여 follower force, 保存力이 각각 critical flutter load, critical divergence load보다 작은 구간에서는 pre-flutter range, pre-divergence range, 큰 구간에서는 post-flutter range, post-divergence range라는 용어를 사용하도록 한다.

그림 5.2는 follower force가 0.001초에 2000 N씩 증가하는 경우(1)에 대한 것으로 critical flutter load는 하중재하후 약 0.035초가 경과

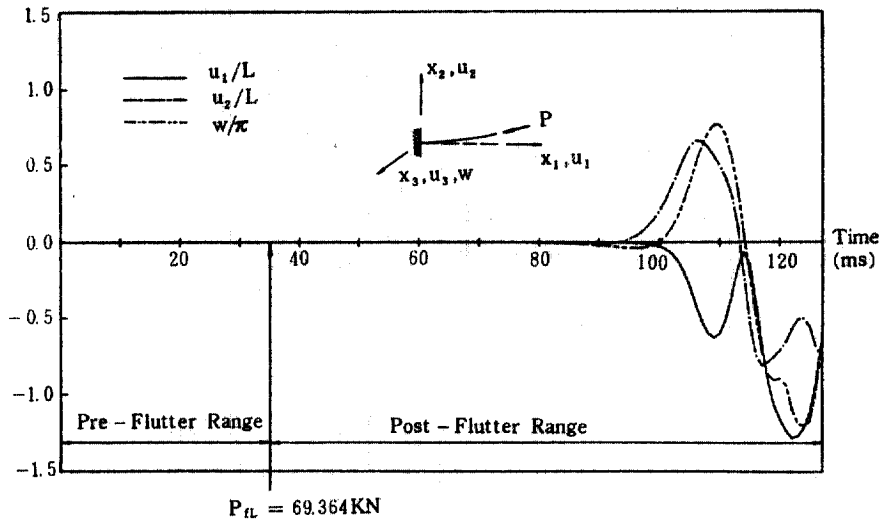


그림 5.2 Pre-and post-flutter response under follower end force

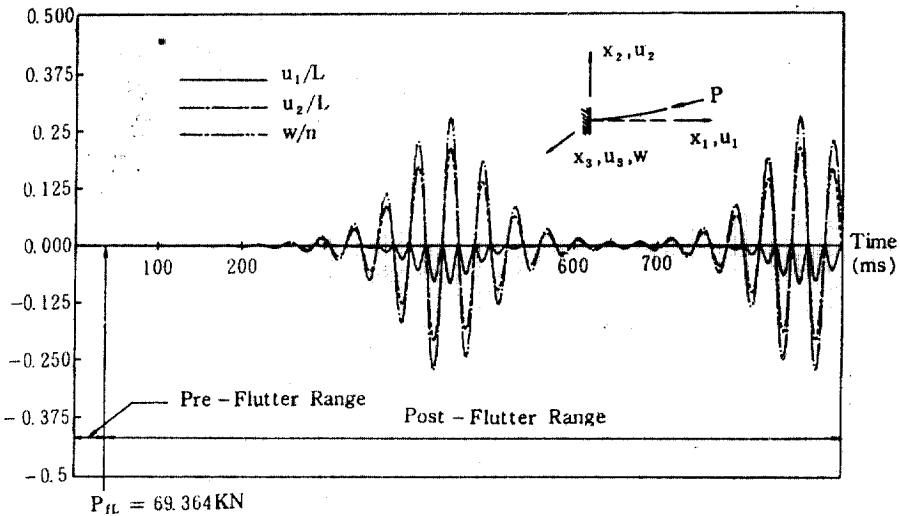


그림 5.3 Pre-and post-flutter response under follower end force

한 다음에 도달하고 폭발적인 진폭의 증가는 0.009초 정도에서 나타난다.

그림 5.3은 follower force가 critical flutter load보다 약간 큰 크기로 일정하게 재하되는 경우 (2)에 대한 것으로 시간이 지남에 따라 0.450초 까지는 수직변위진폭이 최고 27.8cm까지 증

가하는, 선형이론에 의해서도 예측되는 flutter 현상을 보이다가 휨강성의 증가 때문에 다시 진폭이 감소하는 비선형 거동을 보여준다.

그림 5.4는 保存力이 재하되는 경우(3)에 대한 것으로 시간이 경과함에 따라 변위들도 서서히 증가하다가 0.810초에서 수평변위  $U_1$ 은 -15.8



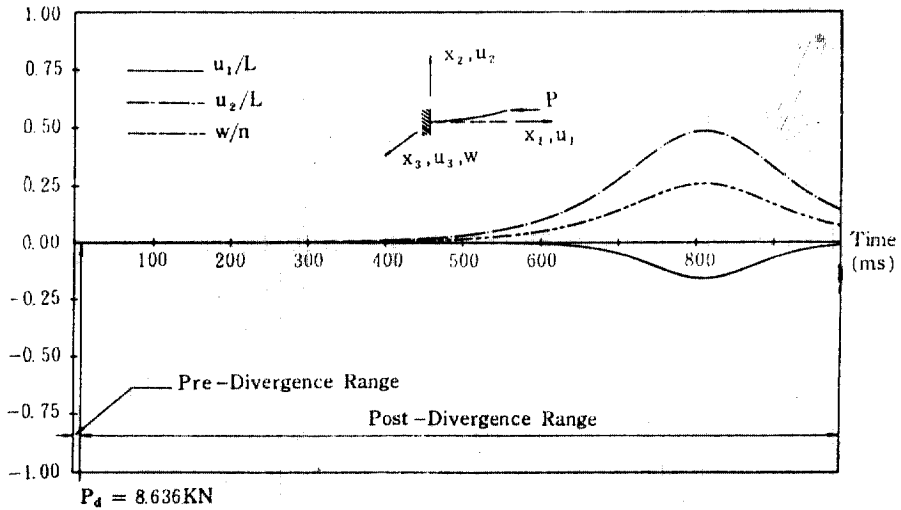


그림 5.4 Pre- and post-divergence response under conservative end force

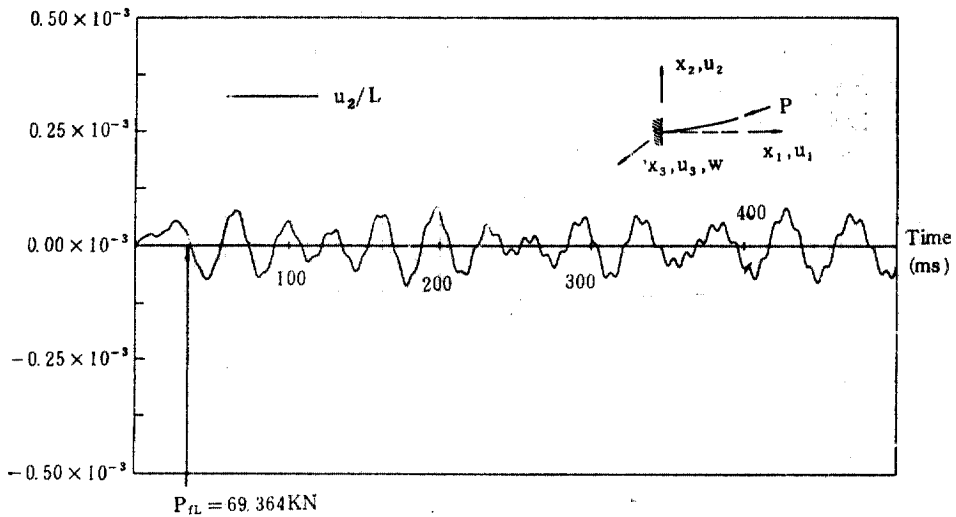


그림 5.5 Pre-flutter response under follower end force

cm 수직변위  $U_2$ 는 48.2cm 그리고 회전각  $\omega$ 는  $46.2^\circ$ 에 도달하였다가 다시 감소하는 모습을 나타낸다.

그림 5.5는 follower force가 critical flutter load보다 약간 작은 크기로 일정하게 재하되는 경우(4)의 해석결과를 나타낸 것이다.

작용점의 회전변위에 따라 작용방향이 접선방향으로 변화하는 follower force의 특성 때문에 critical divergence load보다 7.87배 큰 하중임에도 불구하고 수직처짐  $U_2$ 의 최대진폭이 0.008 cm 미만인 물결모양의 거동을 보여준다.

## 6. 結 論

本 論文은 circulatory force를 받는 평면뼈대 구조물의 動的 後挫屈거동을 파악하기 위하여 假想일의 原理를 이용한 幾何的 非線形 有限要素法을 제시하였다. 이를 위하여 3차원연속체의 운동방정식으로 부터 오일러가정을 포함하는 변위장을 설정하고, 이 변위장을 절점변위벡터로 나타내어 평면뼈대요소에 대한 탄성강도매트릭스, 기하적인 강도매트릭스 그리고 질량매트릭스들을 유도하였다.

非保存力系의 非保存性質은 외부에서 작용하는 外力이 circulatory force임으로 해서 특징지어지는 것이기 때문에 이 非保存性의 문제는 保存力系를 위하여 유도한 가상일의 원리를 확장시켜 非保存력이 행하는 가상일을 保存력이 하는 가상일에 追加시키므로써 해결하였다. 그러기 위해서 circulatory force에 대한 load correction stiffness matrix를 구할 필요가 있는데 circulatory discrete joint load에 대하여는 전체좌표계에 대한 load correction stiffness matrix를 구하고, circulatory distributed load에 대해서는 국부좌표계에 대한 load correction stiffness matrix를 유도하였다. 그 결과 위에서 취급한 非保存力의 性質때문에 circulatory force를 받는 평면뼈대 구조물의 接線剛度매트릭스는 비대칭 행렬임을 보였다.

挫屈이 일어나기 전후에 전체구조계의 시간에 따른 기하적인 비선형거동을 얻기 위하여 유도된 운동방정식을 직접적분(direct integration)하였다. 이때 직접적분방법으로 Newmark 방법을 채택하였다.

非保存력을 받는 외팔기둥의 안정성문제(Buck's problem)에 대한 이제까지의 문헌들은 선형이론을 사용하여 임계하중(critical flutter load)의 크기를 결정하는데 미치는 여러가지 파라미터들의 영향을 조사한 것들이 대부분이었으며, 비선형 동적해석이 요구되는 이러한 시스템의 post-flutter 거동은 아직까지 엄밀히 취급되지 않았다.

본 논문에서는 네가지 하중조건을 받는 외팔기둥의 안정성 거동에 대하여 비선형 동적해석

을 수행하여 얻은 결과들과 선형이론들에 의한 결과들을 비교 검토하므로써 본 연구에서 유도된 이론의 정당성을 입증하고자 하였다.

Follower force의 크기를 시간에 따라서 계속 증가시키는 경우에 그림 5.2에서 보는 바와 같이 그 크기가 선형이론으로 계산한 critical flutter load를 초과하면 갑작스러운 진폭의 증가를 나타내었다.

그림 5.4에서 볼 수 있는 것과 같이 임계좌굴 하중(critical divergence load)보다 약간 큰값의 保存力(conservative force)을 가하고 그 크기를 일정하게 유지시켜 해석을 행한 결과 시간에 따라 기둥의 사용성이 상실될 만큼 큰 변위가 발생하였다.

그 후에는 부재 휨강성의 증가로 인하여 이 변위는 서서히 감소하는 비선형거동을 보였다.

한편, 그림 5.3에서 보는 바와 같이 critical flutter load보다 약간 큰 非保存力(follower force)을 가하여 그 크기를 고정시킨 경우에는 시간에 따라 진동현상을 보이면서 진폭은 점차로 증가하여 保存력이 가해졌던 경우와 같이 기둥의 사용성을 상실할 만큼 큰 진폭까지 flutter 현상을 보이다가 휨강성의 증가로 인하여 진폭이 다시 감소하는 비선형거동을 나타내었다.

保存력이 가해진 경우와 非保存력이 가해진 경우에 대한 좌굴거동의 차이점은 保存력이 가해진 경우에는 진동현상이 변위가 증가하지만 非保存력이 작용하는 경우에는 변위가 진동현상을 수반하면서 증가하는 것이다. 또한 진폭의 증가에 따라 휨강성이 증가하는 것은 기하적인 비선형성(geometric nonlinearity)의 효과가 고려되었기 때문이다. 이와 같은 결과로 미루어 보아 본 비선형이론의 타당성이 검증되었다고 사료된다.

본 이론에 의해서 개발된 프로그램의 정당성은 保存力系의 임계치보다는 약 8배가 크며 非保存力系의 critical flutter load보다 약간 작은 非保存력을 기둥에 일정한 크기로 가한 결과 保存력을 가한 경우와는 달리 좌굴현상(divergence)이 일어나지 않고 또한 flutter현상도 일어나지 않음을 보이므로써 입증하였다.

参 考 文 献

1. H. Ziegler, "Principles of structural stability", 2nd ed. Birkhäuser, Basel/Stuttgart, 1977.
2. V.V. Bolotin, "Nonconservative problems of the theory of elastic stability" Moscow, 1961 English translation published by Pergamon press, New York, 1963, pp.86~138.
3. H.H.E. Leipholz, "Stability of elastic systems", Universities press, Belfast, 1980, pp.312~461.
4. R.S. Barsoum, "Finite element method applied to the problem of stability of a nonconservative system", *Internat. J. Numer. Meth. Eng.* 3, 1977, pp.63~87.
5. Fumio Kikuchi, "A finite element method for non-self-adjoint problems", *Internat. J. Numer. Meth. Eng.* 6, 1973, pp.39~54.
6. K.J. Bathe, "Finite element procedures in engineering analysis", Prentice-Hall, Inc., Englewood cliffs, New Jersey 07632, 1982, pp.301~405.
7. V.V. Novozhilov, "Foundation of the nonlinear theory of elasticity", Gray Lock, Rochester, N. Y., 1953.
8. K. Huseyin, "Vibration and stability of multiple-parameter systems", Sijthoff & Noordhoff Int. Pub., the Netherlands, 1978, pp.171~205.
9. S.P. Timoshenko and J.M. Gere, "Theory of elastic stability", McGraw-Hill, New York, 1961, pp.152~158.

附 錄 :

1) 기하적인 강도 매트릭스  $[K_r]$

$$\begin{array}{cccccc}
 u^p & v^p & \omega_1^p & u^q & v^q & \omega_1^q \\
 \hline
 e & \cdot & -f & -e & \cdot & -g \\
 a & b & \cdot & -a & b & \\
 & & c & f & -b & d \\
 & & & e & \cdot & g \\
 \text{sym} & & & & a-b & \\
 & & & & & c
 \end{array}$$

$$a = \frac{36F_1}{30L} + \frac{12F}{L^3}, \quad b = \frac{3F_1}{30} + \frac{6F}{L^2}, \quad F = \frac{I_3}{A} F_1$$

$$c = \frac{4F_1 L}{30} + \frac{4F}{L}, \quad d = \frac{-F_1 L}{30} + \frac{2F}{L}, \quad e = \frac{F_1}{L}$$

$$f = \frac{M_1^*}{L}, \quad g = \frac{M_2^*}{L}$$

2) 기하적인 강도 매트릭스  $[K_r^*]$

$$\begin{array}{cccccc}
 u^p & v^p & \omega_1^p & u^q & v^q & \omega_1^q \\
 \hline
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 A & B & \cdot & -A & C & \\
 & D & \cdot & -B & G & \\
 & & \cdot & \cdot & \cdot & \\
 \text{sym} & & & A & -C & \\
 & & & & & H
 \end{array}$$

$$A = -\frac{36F_1^2}{30L} + \frac{18P_2^2}{30} + \frac{72P_2}{420}$$

$$B = -\frac{3F_1^2}{30} + \frac{3P_2^2 L}{30} + \frac{15P_2 L}{420}$$

$$C = -\frac{3F_1^2}{30} - \frac{6P_2 L}{420}$$

$$D = -\frac{4F_1^2 L}{30} + \frac{P_2^2 L^2}{30} + \frac{4P_2 L^2}{420}$$

$$G = \frac{F_1^2 L}{30} - \frac{P_2^2 L^2}{60} - \frac{3P_2 L^2}{420}$$

$$H = -\frac{4F_1^2 L}{30} + \frac{3P_2^2 L^2}{30} + \frac{18P_2 L^2}{420}$$

$$P_2 = P_2^* - P_2^*$$

3) 질량 매트릭스  $[M]$

$$\begin{array}{cccccc}
 u^p & v^p & \omega_1^p & u^q & v^q & \omega_1^q \\
 \hline
 a & \cdot & \cdot & \bar{a} & \cdot & \cdot \\
 b & c & \cdot & d & e & \\
 & & f & \cdot & -e & -g \\
 & & & a & \cdot & \cdot \\
 \text{sym} & & & & b & -c \\
 & & & & & f
 \end{array}$$

$$a = \frac{\rho AL}{3}, \quad \bar{a} = \frac{\rho AL}{6}$$

$$b = \frac{36\rho I_3}{30L} + \frac{156\rho AL}{420}, \quad c = \frac{3\rho I_3}{30} + \frac{22\rho AL^2}{420}$$

$$d = \frac{-36\rho I_3}{30L} + \frac{54\rho AL}{420}, \quad e = \frac{3\rho I_3}{30} - \frac{13\rho AL^2}{420}$$

$$f = \frac{4\rho I_3 L}{30} + \frac{4\rho AL^3}{420}, \quad g = \frac{\rho I_3 L}{30} + \frac{3\rho AL^3}{420}$$

4) Circulatory Distributed Load에 대한 L.C.S.M.  $[K^{**}]$

$u^s \quad v^s \quad w^s \quad u^s \quad \alpha^s \quad w^s$

•	$a_2$	$a_3$	•	$a_5$	$a_6$
•	$b_2$	$b_3$	•	$b_5$	$b_6$
•	$c_2$	$c_3$	•	$c_5$	$c_6$
•	$d_2$	$d_3$	•	$d_5$	$d_6$
•	$e_2$	$e_3$	•	$e_5$	$e_6$
•	$f_2$	$f_3$	•	$f_5$	$f_6$

$$a_2 = \frac{3}{10}P_z^s + \frac{1}{5}P_y^s, \quad a_3 = -\frac{L}{10}P_z^s + \frac{L}{60}P_y^s,$$

$$a_6 = \left(\frac{4}{60}P_z^s + \frac{1}{60}P_y^s\right)L, \quad a_5 = -a_2,$$

$$b_2 = \frac{-1}{2}P_z^s - \frac{78}{420}P_x, \quad b_3 = \left(\frac{1}{10}P_z^s - \frac{4}{420}P_x\right)L,$$

$$b_6 = \left(\frac{-1}{10}P_z^s - \frac{11}{420}P_x\right)L, \quad b_5 = -b_2,$$

$$c_2 = \left(\frac{-1}{10}P_z^s - \frac{18}{420}P_x\right)L, \quad c_3 = -\frac{2}{420}P_xL,$$

$$c_6 = \left(\frac{-1}{60}P_z^s - \frac{2}{420}P_x\right)L, \quad c_5 = -c_2,$$

$$d_2 = \frac{1}{5}P_z^s + \frac{3}{10}P_y^s, \quad d_3 = \left(\frac{1}{60}P_z^s + \frac{4}{60}P_y^s\right)L,$$

$$d_6 = \frac{L}{60}P_z^s - \frac{L}{10}P_y^s, \quad d_5 = -d_2,$$

$$e_2 = \frac{-1}{2}P_z^s - \frac{132}{420}P_x, \quad e_3 = \left(\frac{-1}{10}P_z^s - \frac{31}{420}P_x\right)L,$$

$$e_6 = \frac{1}{10}P_z^s + \frac{46}{420}P_x\right)L, \quad e_5 = -e_2,$$

$$f_2 = \left(\frac{1}{10}P_z^s + \frac{24}{420}P_x\right)L, \quad f_3 = \left(\frac{1}{60}P_z^s + \frac{5}{420}P_x\right)L,$$

$$f_6 = -\frac{2}{420}P_xL^2, \quad f_5 = -f_2$$

$$P_x = P_z^s - P_y^s,$$

(接受: 1988. 1. 22)