

철근콘크리트판의 비선형 파괴 유한요소 모델에 관한 연구

Nonlinear Fracture Finite Element Model of Reinforced Concrete Plates

진	치	섭*
Jin,	Chi	Sub
차	영	수**
Cha,	Young	Soo
엄	종	욱***
Eöm,	Jong	Uk

Abstract

A general finite element method is developed to analyze reinforced concrete plates under dead loads and monotonically increasing live loads. This method can be used to trace the load-deformation response and crack propagation through elastic, inelastic and ultimate ranges. The internal concrete and steel stresses can also be determined for any stage of the response history.

A layered 8 node isoparametric element taking account of coupling effect between the membrane and the bending action is developed. An incremental tangent stiffness method is used to obtain a numerical solution.

Validity of the method is studied by comparing the numerical solutions with other results.

요 지

사하중과 단조 활하중을 받고 있는 철근콘크리트판에 대한 일반적인 유한요소 해석방법을 개발하였다. 이 방법을 통하여 탄성, 비탄성 및 극한범위에서의 하중-변형 응답과 균열전파를 추적할 수 있었고 또한 응답 경로를 통하여 콘크리트와 철근의 내부응력을 결정할 수 있었다.

면내응력과 휨응력간의 상호작용을 고려하는 충분화된 8절점 동태개변수 요소를 개발하였다 수치해를 구하는 방법은 점선증분 강성도법을 이용하였다.

본 해법에 대한 유효성을 검토하기 위하여 다른 해석결과들과 비교하였다.

1. 서 론

철근콘크리트로 된 판이 하중을 받아 탄성범위를 넘을때 재료거동을 실제와 같이 이상화하

* 정희원 · 부산대학교 공과대학 부교수, 토목공학과
 ** 정희원 · 동의공업전문대학 부교수, 토목공학과
 *** 정희원 · 부산대학교 공과대학 조교, 토목공학과

는 것은 대단히 어렵고 또 실제와 동일하게 모델링했다 하더라도 매우 까다로운 응력해석 문제가 된다. 특히, 철근 콘크리트판에 대한 해석적 모델을 개발하는 때에는 콘크리트의 균열과 소성의 불규칙한 특성으로 인하여 많은 어려움이 있다⁽¹⁾. 따라서, 판의 해석적 모델을 구성하는 때에는 단순화된 가정을 사용하여야 하고 또 수학적 모델의 정확도를 입증하기 위하여 계산 결과를 실험치와 비교하는 것이 중요하다.

유한요소법으로 구성관계를 이상화하는 방법에는 근본적으로 서로 다른 두가지 방법이 있다. 첫번째 방법은, EI수정법(modified EI method)으로 이것은 철근콘크리트를 거시적으로 보는 것으로 재료거동의 여러단계에 따라 전체의 모멘트-곡률 관계를 가정하는 것이다. Jofriet와 McNeice⁽²⁾가 철근콘크리트 슬래브에 이 방법을 사용하였는데 이 EI 수정법에서는 면내력의 효과를 고려할 수가 없다. 두번째 방법은, 콘크리트와 철근의 이상화된 응력-변형률 관계에 기초를 둔 것으로 이 두가지 재료사이의 변형에 대한 적합조건을 가정하는 것이다. Lin⁽³⁾은 철근콘크리트 판과 셸에 층분할법(layered method)을 적용하여 비선형 해석을 하였는데 kirchhoff 판 이론을 사용했고 면내력과 면외력사이의 상호작용 효과를 고려하기 위하여 일차곡률 삼각형 휨요소에 일차변형률 삼각형 평면요소를 조합한 층분할 삼각형 유한요소를 개발하였다. Hand와 Pecknold⁽⁴⁾등은 철근콘크리트 판과 셸에 Pecknold의 20-자유도의 4각형 얇은 셸요소를 층분할 요소에 사용하여 면내자유도의 중요성을 제시하였다. Wanchoo와 May⁽⁵⁾는 철근콘크리트판의 해석에서 면내력을 무시한 층분할 모델로 콘크리트의 균열과 철근의 항복을 추적하였다.

본 논문은 철근콘크리트 판이 파괴에 이를때 까지의 하중-처짐이력과 단계별 재료 비선형 거동을 알아보기 위한 층 분할 유한요소 모델을 개발하는 것이다. 철근은 탄소성 재료로 된 Von Mises 항복기준과 결합유동법칙에 지배를 받으며 단지 축방향력 만을 받는 2차원 층으로 모델링하였고 콘크리트는 2축압축에서는 철근과 마찬가지로 Von Mises 항복기준에 지배되는 것

으로 가정하였다. 골재의 역물림과 철근의 다중 작용을 고려하기 위하여 전단유지 계수를 도입하였으며 콘크리트의 인장강성도 효과와 철근과 콘크리트 사이의 부착활동은 무시하였다. 2차원 8절점 등매개변수 평면응력요소와 휨요소를 조합한 유한요소를 사용하였으며 판의 휨에서는 Mindlin가정을 이용하였다. 면내자유도는 셀뿐만 아니라 판에서도 중요한데 이것은 하중이 증가함에 따라 판이나 셸의 두께에 따른 재료성질의 변화가 증면변형률과 곡률사이의 구성관계에서 상호작용을 일으키기 때문이다. 따라서, 본 논문에서는 면내작용과 면외작용 사이의 상호작용 효과를 포함시켰다. 요소정식화에서 요소평면에 수직한 축에 관한 회전에 대응하는 6번째 자유도는 공통평면내의 요소에서 임의의 작은 강도계수를 넣어 처리하였다⁽⁶⁾.

2. 재료성질과 구성방정식

2.1 서언

유한요소 내에서 서로 다른 재료성질을 가지는 가상적인 콘크리트층과 철근층으로 각 요소를 나눈다(그림 2.1). 각 층은 그층의 응력이나 변형률 상태에 대응되는 서로 다른 재료성질을 가져도 된다. 뿐만아니라 Mindlin가정에 따라 요소면에 수직한 방향의 응력은 무시되므로 요소내의 임의점은 평면응력 상태로 볼 수 있다.

본 논문에서는 재료 비선형 모델을 매우 단순화하였는데, 이는 철근 콘크리트 판의 해석이 복잡할 뿐만 아니라 장차 철근 콘크리트 셸 해

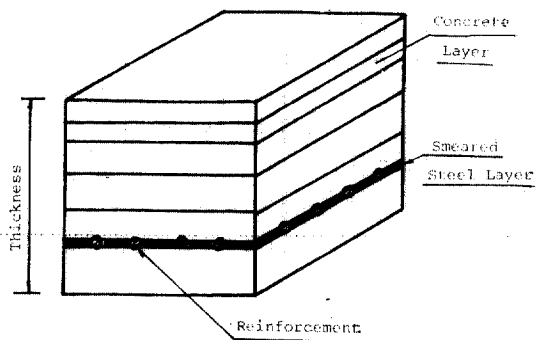


그림 2.1 Layered System

석에 확장 적용하기 위한 것으로 재료의 지배적인 거동만을 포함시켰다.

2.2 콘크리트

(1) 응력-변형률 관계

콘크리트의 응력-변형률 관계에서, 인장축에서는 콘크리트에 균열이 발생하여 응력이 '0'으로 떨어지는 인장강도에 도달할 때까지 거의 직선이고 압축축에서는 극한응력의 약 30%에 도달할때까지는 거의 직선이 되다가 그 이후 극한응력에 도달할때 까지 곡선을 이룬다. 이후 정점을 지나면서 감소곡선이 이루어져 완전히 파쇄되는 최종점에 이른다. 그러나 철근콘크리트 구조의 전체 비선형 거동이 콘크리트의 인장균열에 지배됨을 고려할 때 정교하게 가정된 응력-변형률 관계식을 채택할 필요는 없다. 따라서 본 논문에서는 콘크리트를 2축압축 상태에서는 탄소성으로 이상화하였고 2축인장과 인장-압축에서는 선형탄성으로 이상화하였다(그림 2.2)

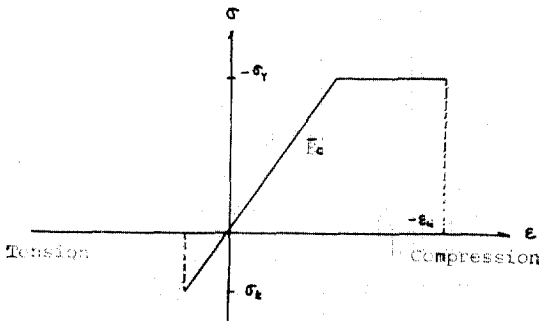


그림 2.2 Idealized Uniaxial Stress-Strain Relation for Concrete

(2) 파괴기준

Kupfer⁽⁷⁾ 등에 의하여 얻어진 2축응력 상태의 콘크리트 파괴포락선을 참고로, 본 논문에서는 2축압축 상태에서의 파괴면을 Von Mises 기준으로 근사화하였다(그림 2.3).

항복기준을 주응력의 항으로 표현하면 다음과 같다.

$$F(\sigma) = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} - \bar{\sigma} = 0 \quad (2.1)$$

여기서, $\bar{\sigma}$ 는 일축압축 강도이다.

콘크리트의 파쇄는 콘크리트가 항복한 후에 완전히 붕괴하는 것으로 정의하여 파쇄면을 변

형률로 나타내었다. 파쇄면은 다음과 같다(그림 2.4).

$$c(\epsilon) = \sqrt{\epsilon_1^2 - \epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_2^2} - \epsilon_u = 0 \quad (2.2)$$

여기서, ϵ_u 는 일축압축 극한변형률이다.

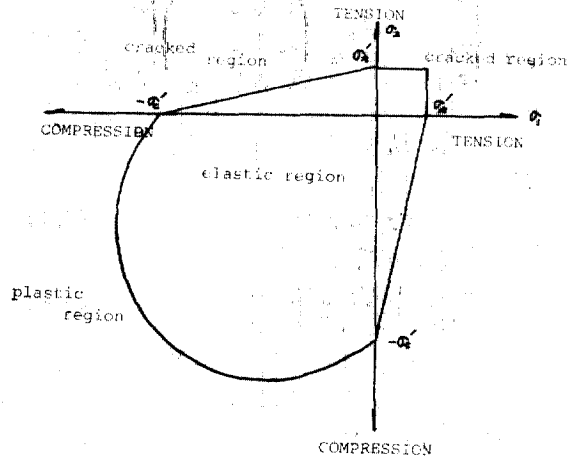
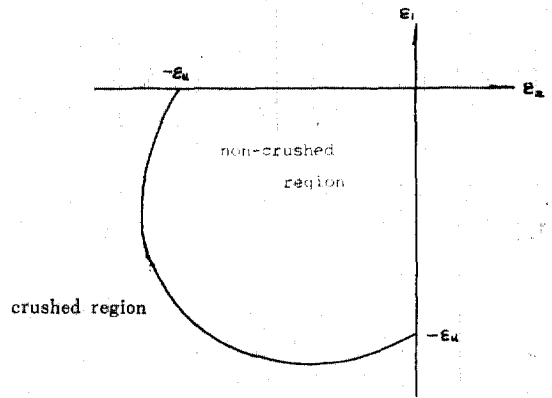


그림 2.3 Assumed Failure Surface for Concrete



2.4 Assumed Crush Surface for Concrete

2축인장을 받을때의 콘크리트의 강도는 σ_2/σ_1 에 거의 무관하며 일축 인장강도와 같다는 것을 보여주고 있다.

2축인장 상태에서는 최대응력 파괴이론을 채택하였다. 주응력의 어느하나가 일축 인장강도 σ_c' (그림 2.3)를 초과하면 콘크리트에 균열이 생긴다고 가정하였다. 인장-압축응력 상태에서는 그림 2.3의 σ_c' 와 σ_c' 를 연결하는 직선을 파

곡면으로 가정하였다.

(3) 비균열 탄성강성도

탄성한계(그림 2.3)내에서는 콘크리트는 등방성이고 균질인 선형탄성으로 가정하였다. 따라서 응력-변형을 관계는 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \tau_{XY} \end{Bmatrix} = \frac{E_c}{1-\nu_c^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu_c & 0 \\ \nu_c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu_c}{2} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_X \\ \epsilon_Y \\ \gamma_{XY} \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

여기서, E_c 는 콘크리트의 탄성계수이고 ν_c 는 포아송 비이다.

$$\text{또는, } \sigma_f = D_f \cdot \epsilon_f \quad (2.4)$$

전단변형에 대해서는

$$\begin{Bmatrix} \tau_{XZ} \\ \tau_{YZ} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G/\alpha & 0 \\ 0 & G/\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{XZ} \\ \gamma_{YZ} \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

여기서, α 는 전단 뒤편계수이고⁽⁸⁾,

G 는 전단탄성 계수이다.

$$\text{또는, } \sigma_s = D_s \cdot \epsilon_s \quad (2.6)$$

(4) 균열 강성도

주응력중 어느하나가 인장강도를 초과할때 그 주응력에 직각방향으로 균열이 일어날 것이다.

균열에서의 수직응력은 '0'으로 된다. 이때 전단응력도 균열때문에 감소하게 되나 철근의 다울작용과 골재 역물림의 영향으로 '0'으로 떨어지지 않는다. 본 연구에서는 균열된 콘크리트내의 전단응력을 유지시킬 수 있는 균열 전단상수 β 를 도입하였다. Hand⁽⁴⁾등은 이 값을 0.2~1.0 사이의 범위로 했을때 수치적 차이를 무시할 수 있다고 하였다.

그림 2.5에서 좌표축 X', Y' 를 각각 균열에 평행한 축과 그축에 직각방향으로 잡으면 X', Y' 좌표계에 관한 응력-변형을 관계는 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{X'} \\ \sigma_{Y'} \\ \tau_{X'Y'} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_1 G \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{X'} \\ \epsilon_{Y'} \\ \gamma_{X'Y'} \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

$$\text{또는, } \sigma_f' = D_f' \cdot \epsilon_f' \quad (2.8)$$

한편, 전단변형에 대하여는

$$\begin{Bmatrix} \tau_{X'Z'} \\ \tau_{Y'Z'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_2 G/\alpha & 0 \\ 0 & \beta_2 G/\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{X'Z'} \\ \gamma_{Y'Z'} \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

$$\text{또는, } \sigma_s' = D_s' \cdot \epsilon_s' \quad (2.10)$$

변형을 벡터를 변환하면

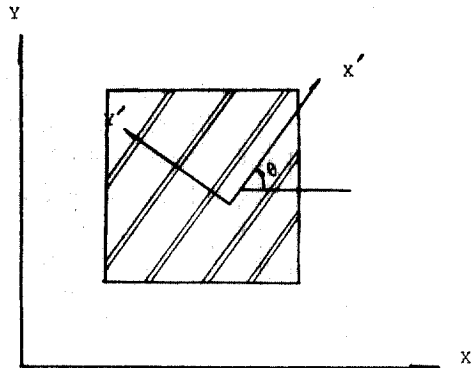


그림 2.5 Coordinate Transformation for a Cracked Element

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{X'} \\ \epsilon_{Y'} \\ \gamma_{X'Y'} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 & s^2 & sc \\ s^2 & c^2 & -sc \\ -2sc & 2sc & c^2-s^2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_X \\ \epsilon_Y \\ \gamma_{XY} \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

$$\text{또는, } \epsilon' = T \cdot \epsilon \quad (2.12)$$

여기서 $c = \cos \theta$

$s = \sin \theta$

$\theta = X$ 축으로부터 X' 까지의 각도

(반시계방향)

응력벡터는 다음과 같이 변환된다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \tau_{XY} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 & s^2 & -2sc \\ s^2 & c^2 & 2sc \\ sc & -sc & c^2-s^2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{X'} \\ \sigma_{Y'} \\ \tau_{X'Y'} \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

$$\text{또는, } \sigma_f = T^T \cdot \sigma_f' \quad (2.14)$$

식(2.12)와 식(2.14)에서 T 는 서로 직교하므로

$$T^{-1} = T^T \quad (2.15)$$

따라서 식(2.8)은 다음과 같이 XY 좌표계로 변환된다.

$$\sigma_f = D_f \cdot \epsilon_f \quad (2.16)$$

$$D_f = T^T \cdot D_f' \cdot T \quad (2.17)$$

전단변형에 대해서는 좌표변환이 필요치 않으므로

$$\sigma_s = D_s' \cdot \epsilon_s' = D_s \cdot \epsilon_s \quad (2.18)$$

결국 인장균열이 생긴후의 구성방정식은 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_f \\ \sigma_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T^T \cdot \sigma_f' \cdot T & 0 \\ 0 & D_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_f \\ \epsilon_s \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

$$\text{또는 } \sigma = D \cdot \epsilon \quad (2.20)$$

(5) 소성 강성도

콘크리트가 압축을 받아 항복하는데 Von Mises 항복기준과 결합유동법칙이 성립하는 것으로 가정하였다. 직교원리는 다음과 같이 표현된다.

$$d\epsilon_p = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma} \quad (2.21)$$

여기서, $d\epsilon_p$ 는 소성변형률 증분이고
 λ 는 비례상수이며
 F 는 항복함수이다.

또, 응력이 미소량만큼 증가하는 동안에 변형률의 변화는 탄성부분과 소성부분으로 나눌수 있다고 가정한다.

$$d\epsilon = d\epsilon_e + d\epsilon_p \quad (2.22)$$

탄성변형률 증분은 다음식으로 응력증분과 관련 지을 수 있다.

$$d\epsilon_e = [D]^{-1} \cdot d\sigma \quad (2.23)$$

여기서, $[D]$ 는 탄성매트릭스이다.

전단변형에 의한 영향은 항복에 영향을 주지 않으므로 항복후의 증분형 응력-변형률 관계식은 다음과 같이 얻어진다.⁽¹⁰⁾

$$d\sigma_f = [D_f]_{ep} \cdot d\epsilon_f \quad (2.24)$$

이 식에서 $[D_f]_{ep}$ 는 탄소성 매트릭스로서 증분 해석에서 탄성 매트릭스 $[D]$ 를 대신한다.

$$[D_f]_{ep} = [D_f] - \frac{d_p \cdot d_p^T}{A + d_p^T \cdot a} \quad (2.25)$$

여기서 d_p 는 $D_f \cdot a$ 이고 A 는 경화 파라메타로 완전소성 재료에서는 '0'이며 a 는 흐름벡터이다.

(6) 2 차균열 및 파쇄강성도

1 차 균열방향에 평행한 응력이 한계인장 응력을 초과하는 경우 2 차균열이 1 차균열에 직각으로 발생하는 것으로 가정하였다. 또 콘크리트가 파쇄되면 강성도를 모두 잃어버리는 것으로 가정하였다.

2.3 철근

본 연구에서는 철근의 크기와 간격에 대한 효과를 고려하지 않았으며 철근의 각층은 단지 축방향력만을 지지하는 2 차원 철근층으로 대처하였다. 철근은 탄소성 재료로 취급하였으며 탄성 매트릭스는 다음과 같이 가정하였다.

$$D_f = \begin{pmatrix} E_s & 0 & 0 \\ 0 & E_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

여기서 E_s 는 철근의 탄성계수이다.

또한 철근의 항복기준은 콘크리트 경우와 마찬가지로 Von Mises 기준을 이용하였다. 소성상태로 된 뒤의 탄소성 매트릭스는 식(2.25)와 같다.

3. 철근콘크리트 판의 충분할 유한요소 해석

3.1 Mindlin판의 변형률⁽¹¹⁾

판 임의점에서의 변위는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u &= u_0 - Z\theta_x \\ v &= v_0 - Z\theta_y \\ w &= w_0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

여기서 u, v, w 는 각각 X, Y, Z 방향의 변위이고 하첨자 '0'는 기준면 상의 값을 나타내는데 기준면은 판의 중앙면으로 취하였다. u_0, v_0, w_0 에 대한 변위함수를 가정하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{Bmatrix} &= N \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} w_0 \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} &= N \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.2)$$

여기서 $\theta_x = \frac{\partial w}{\partial X} + \phi_x$, $\theta_y = \frac{\partial w}{\partial Y} + \phi_y$ 이고 첨자 " "는 절점변위를 나타낸다. 식(3.1)을 미분하면 판 임의점에서의 변형률은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon_0\} + Z\{x\} \quad (3.3)$$

여기서 $\{\epsilon_0\}$ 는 기준면에서의 변형률 벡터이고, $\{x\}$ 는 일반점에서의 곡률벡터이다. 식(3.2)와 식(3.3)을 관련시키면,

$$\{\epsilon_0\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial X} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N}{\partial Y} \\ \frac{\partial N}{\partial Y} & \frac{\partial N}{\partial X} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [B_m] \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} 0 & -\frac{\partial N}{\partial X} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial N}{\partial Y} \\ 0 & -\frac{\partial N}{\partial Y} & -\frac{\partial N}{\partial X} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = [B_b'] \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

또 전단변형률은 Z 방향으로서는 무관하기 때문에

Mindlin 가정에서 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \{\epsilon_i\} = \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial X} - \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial Y} - \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial X} - N_0 \\ \frac{\partial N}{\partial Y} - N \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix}^e &= [B_b''] \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix}^e \end{aligned} \quad (3.6)$$

식(3.4)와 식(3.5)를 식(3.3)에 대입하고 식(3.6)을 고려하면

$$\{\epsilon\} = \begin{bmatrix} B_m & | & ZB_b' \\ \hline & & \\ 0 & | & B_b'' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = [B] \{\delta\}^e \quad (3.7)$$

요소강성도 매트릭스는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} [K] &= \int_{vol} [B]^T [D] [B] dv \\ &= \int_{vol} \begin{bmatrix} B_m^T DB_m & | & ZB_m^T DB_b' \\ \hline ZB_b' DB_m & | & Z^2 B_b'^T DB_b' + B_b''^T \end{bmatrix} dv \\ &= \begin{bmatrix} K_{mm} & | & K_{m'b} \\ \hline K_{b'm} & | & K_{b'b'} + K_{b''b''} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.8)$$

여기서, $[K_{mm}] = \iint [B_m]^T [D] [B_m] dXdY$ (3.9)

$$[K_{m'b}] = \iint [B_m]^T [ZD] [B_b'] dXdY = [K_{b'm}] \quad (3.10)$$

$$[K_{b'b'}] = \iint [B_b']^T [Z^2 D] [B_b'] dXdY \quad (3.11)$$

$$[K_{b''b''}] = \iint [B_b'']^T [D] [B_b''] dXdY \quad (3.12)$$

$K_{mm}, K_{m'b}, K_{b'b'}, K_{b''b''}$ 는 각각 면내강성도, 연성강성도, 휨강성도, 전단강성도이다. 연성강도는 면내강성도와 휨강성도 사이의 상호작용을 나타내는 것으로 그 재료성질이 기준면에 대하여 대칭이면 그값은 '0'가 된다.

3.2 층분할

(1) 요소강성도 평가

층분할 유한요소에서 각 층내의 재료성질이 일정하다고 하면 식(3.9)~식(3.12)의 내부에 있는 적분은 다음과 같이 된다.

$$[D_{mm}] = \int [D] dZ = \sum_{i=1}^n (Z_{i+1} - Z_i) [D_i] \quad (3.13)$$

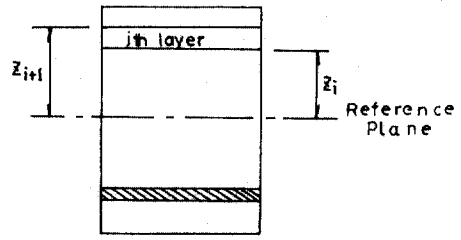


그림 3.1 Layered Plate Model

$$[D_{mb}] = [D_{bm}]^T = \int Z [D] dZ = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (Z_{i+1}^2 - Z_i^2) [D_i] \quad (3.14)$$

$$[D_{bb}] = \int Z^2 [D] dZ = \sum_{i=1}^n \frac{1}{3} (Z_{i+1}^3 - Z_i^3) [D_i] \quad (3.15)$$

이리하여 강성도는 다음과 같이 된다.

$$[K_{mm}] = \iint [B_m]^T [D_{mm}] [B_m] dXdY \quad (3.16)$$

$$[K_{m'b}] = \iint [B_m]^T [D_{mb}] [B_b'] dXdY \quad (3.17)$$

$$[K_{b'b'}] = \iint [B_b']^T [D_{bb}] [B_b'] dXdY \quad (3.18)$$

$$[K_{b''b''}] = \iint [B_b'']^T [D_{mm}] [B_b''] dXdY \quad (3.19)$$

(2) 층별 변형률과 응력

절점변위를 구하고나면 기준면 상의 면내변형률 $\{\epsilon_0\}$ 와 곡률 $\{x\}$ 는 식(3.4)와 식(3.5)로 구해진다. 각층 중심에서의 변형률은 식(3.3)으로부터 계산된다.

$$\{\epsilon_i\} = \{\epsilon_0\} + \frac{1}{2} (Z_{i+1} + Z_i) \{x\} \quad (3.20)$$

또 각층의 응력은 다음과 같이 계산된다.

$$\{\sigma_i\} = [D_i] \{\epsilon_i\} \quad (3.21)$$

4. 비선형 해석^(9,13)

본 연구에서는 비선형 거동을 크게 좌우하는 콘크리트의 균열효과를 요소의 형상성질은 변화시키지 않고 단지 요소의 재료성질만을 변화시킴으로서 해결하였으며 층분할 반복기법을 사용하여 단조하중에 대한 구조물의 응답이력을 추적하였다.

각 하중증분에 대한 해석과정은 다음과 같다.

1) 구조강성도 재구성여부와 전단계의 응력상

태에 따라 면내강성도, 연성강성도, 휨강성도, 전단강성도를 구성한다. 단, 첫 하중증분에 대해서는 초기균열이 없는 선형탄성 상태로 가정한다.

2) 새로운 증분에 대하여 전체좌표계 상의 변위와 반력을 계산하여 전단계의 전체변위와 반력에 더하여 전체절점 변위와 반력을 구한다.

3) 증분변위와 전체변위를 각 요소좌표계 상의 변위로 변환시켜 각층 증분의 변형률과 곡률을 계산한다. 이하 각 요소의 각층에 대하여 반복한다.

$$\text{즉, } \epsilon_i = \epsilon_0 + Z_i x_i$$

여기서 ϵ_0 는 기준면상의 면내변형률이다.

4) 각층의 증분에서 전응력 상태에 따라 D 행렬을 재구성하여 단계 3)의 변형률과 더불어 그 층의 응력을 계산한다.

$$\sigma_i = D_i \cdot \epsilon_i$$

5) 각층의 응력이나 변형률 상태를 적용한 기준에 대해 검토한다. 만일 그 기준을 초과하지 않으면 단계 7)로 간다.

6) 각층에서 현응력의 증분량에 대한 불평형 응력을 계산하고 수정된 응력의 상태에 따라 구성관계 성질을 수정한다. 즉, 소성상태에서는 소성강성도를 재구성하고 파괴상태에서는 단계 4)에서 주어진 응력에서 총보정량을 감한 released 된 응력으로 수정한다.

7) 한요소의 모든층에 대한 loop가 끝나지 않았으면 단계 3)에서 단계 7)까지의 loop를 반복하고 완료되었으면 단계 8)로 간다.

8) 수치적분을 이용하여 불평형 응력을 불평형 절점력으로 환산한다. 그리고 층의 수정된 구성성질에 따라 새로운 요소강성도를 구성한다.

$$F = \int B^T \sigma dv$$

9) 각 변형률상태에 대한 불평형 절점력을 조합한다.

10) 불평형력이나 변위증분이 수렴하는지를 검토한다. 만약 수렴하거나 규정된 최대반복회수를 초과하면 다음하중 증분을 위하여 단계 1)로 간다.

11) 새로운 구조강성도를 구성하여 불평형 절점력에 대한 절점변위 증분을 계산한다.

12) 단계 2)로 간다.

5. 수치에 및 고찰

5.1 수치에

변의 길이가 L 인 정사각형 콘크리트 슬래브를 수치에로서 채택하였다. 기하학적 형상과 하중조건이 대칭이므로 슬래브의 1/4만 취하며 모델에 대한 요소분할은 그림 5.1과 같으며 각기 다른 경계조건에 대한 슬래브 층분할은 그림 5.2와 같다. 경계조건은 4변고정과 4변 단순지지인 두 경우에 대해 철근비가 0.005인 경우에 관하여 해석하였다.

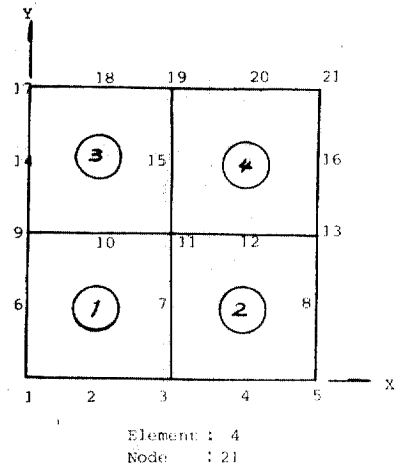


그림 5.1 Finite Element Idealization

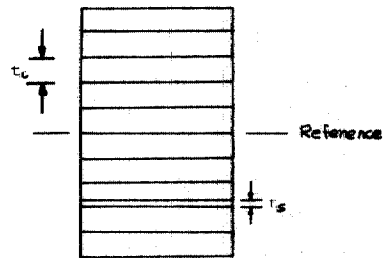


그림 5.2 Layered System

5.2 고찰

그림 5.2에서 보는 바와 같이 층분할은 같은 두께의 10층으로 나누고 철근은 가상단면 층으로 환산하여 철근이 속한 콘크리트 층에 치환시

켰다. 이때 철근의 처환에 의한 콘크리트 면적 손실은 미소하므로 무시했다. 또한, 재료상수들은 실제의 콘크리트와 철근의 거동을 나타내는 무차원 매개변수들로 나타내었다.⁽⁶⁾

$$\text{즉, } E_c/\sigma_c=5800$$

$$E_c/\sigma_0=725$$

$$E_s/\sigma_s=600, \nu_c=0.18$$

여기서 E_c, E_s : 콘크리트와 철근의 탄성계수
 σ_c, σ_0 : 콘크리트의 인장강도와 항복강도
 σ_s : 철근의 항복강도

해석의 결과도 역시 다음과 같은 무차원 비를 사용하여 도표로 나타내었다.

$$p^* = \frac{p \cdot l^4}{E_c \cdot h^4}$$

$$w^* = \frac{w}{h}$$

여기서 p 는 실제 작용하는 하중강도(psi)이며
 w 는 실제 처짐량(inch)이다.

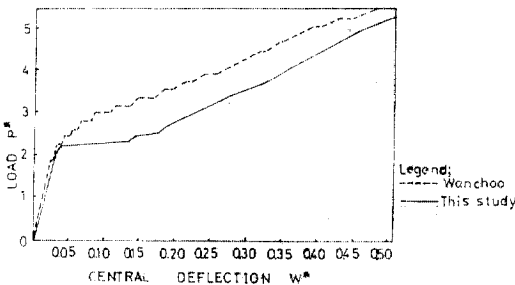


그림 5.3 Load-Central Deflection Curve for Clamped Plate ($1/h=40, p=0.005$)

그림 5.3은 판에 등분포 하중이 작용할 때 중앙점의 수직처짐을 나타낸 것으로 점선은 Wanchoo⁽⁶⁾의 수치해법을 나타내고 있고 실선은 본 프로그램에 의한 해를 나타내고 있다. 그림에서 알수있듯이 두 결과는 항복 이후에서 약간의 차이를 보이고 있는데 이것은 Wanchoo의 방법과는 달리 본 프로그램에서는 면내력의 효과와 더불어 그 효과가 비록 미소하지만 골재의 역물림과 철근의 다중 작용을 고려했기 때문으로 생각된다. 불행히도 여기에 합당한 실험결과를 찾을

수 없어 실제거동과 비교할 수가 없었다.

그림 5.4는 앞의 예제와는 달리 경계조건이 단순지지된 경우에 대한 중앙점의 수직처짐을 나타낸 것으로 점선은 Wanchoo의 수치해법, 일점쇄선은 Taylor⁽¹⁴⁾ et al.의 실험결과를 그리고 실선은 본 프로그램에 의한 결과로 동일한 형상비($1/h=36$)와 철근비($p=0.005$) 및 동일한 무차원비⁽⁶⁾를 가지고 있다. 그림에서 알수있듯이 본 프로그램에 의한 해가 면내력의 영향을 무시했던 Wanchoo⁽⁶⁾의 수치해 보다 실험결과에 훨씬 접근하고 있음을 알수있다.

또한 그림 5.5는 철근비 0.005, 형상비 36인 4번 단순 지지인 판에 대해 x-y 평면상으로의 균열과 소성의 전파를 도시한 것이다. 여기서 상부의 점선과 실선은 콘크리트의 균열을 나타내었고 하부의 빗금부분은 철근의 소성상태를 표시하였다.

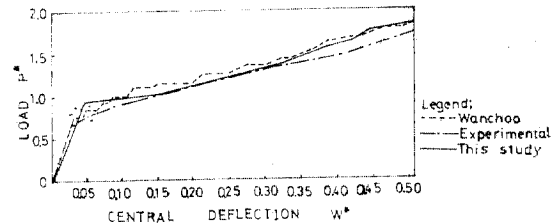


그림 5.4 Load-Central Deflection Curve for Simply Supported Plate ($1/h=36, p=0.005$)

하중단계(I)에서는 슬래브의 하부층에서 대각선방향으로 먼저 균열이 발생하였다. 또한 모서리부분의 상부층에서도 대각선에 직각방향으로 균열이 성겼다. 균열은 서서히 전파되어, 하중단계(II)에서는 하부층 거의 전부에 균열이 발생되었으며 상부모서리부분의 균열도 점점 증가하였다. 하중단계(III), (IV), (V)에서는 슬래브 상. 하부층에 심한 균열이 발생하여 더이상의 하중지탱능력을 갖지 못하게 되었고 또한 철근층도 항복이 슬래브 중앙에서 경계쪽으로 확산되어 판전체가 거의 파괴직전에 와있었다.

또한, 슬래브의 두께방향으로의 균열과 소성의 전파를 관찰하였는데 그결과 위의 결과와 마찬가지로 기존의 판이론에 따른 역학적 예측과 거의 일치함을 알수있었다.

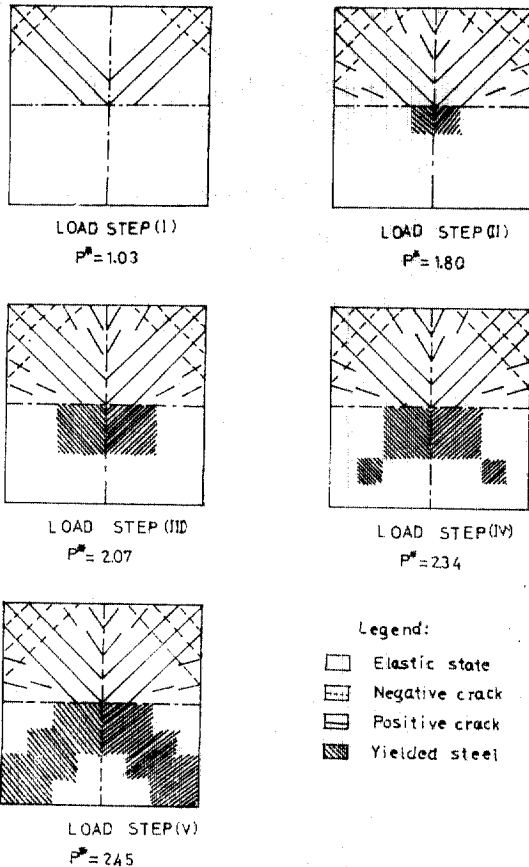


그림 5.5 Crack and Yield Progression of Simply Supported plate ($l/h=36$, $p=0.005$)

6. 결 론

본 연구를 통하여 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

1) 본 연구에서는 증분형 점선 강성도 반복법을 이용한 연속적인 유한요소 해석방법으로 탄성, 비탄성 및 극한범위에서의 철근과 콘크리트의 응력결정은 물론 하중-변형 응답과 균열전파를 추적하였으며 특히 실험적으로도 쉽게 규명할 수 없었던 판구조물에 대한 완전한 응력분포를 해석할 수 있었다.

2) 본 프로그램의 해는 철근콘크리트 판의 해석에 면내력의 영향을 고려하게 되어 보다 실제적인 결과를 얻을 수 있었다. 이는 면내력과 균열유효 전달저항을 무시했던 Wanchoo⁽⁶⁾ 해석치와의 비교에서 잘 입증할 수 있었다.

3) 본 연구에서는 비록 철근 콘크리트 판만을

취급하였으나 본 논문에서 개발한 모델은 철근 콘크리트 슬래브 해석에도 바로 이용할 수 있다. 슬래브에 대한 해석은 다음 연구과제로 삼고자 한다.

감사의 글

본 연구는 1985년도 후반기 한국과학 재단의 지원에 의하여 연구된 것으로 이에 동 재단과 관계직원에게 감사드리는 바입니다.

참 고 문 헌

1. Chen, W.F.; "Plasticity in Reinforced Concrete," McGraw-Hill, 1982, pp. 394~421.
2. Jofriet, J.C. and McNeice, G.M.; "Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Slabs", *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 97, No. ST3, Proc. paper 7963, Mar., 1971, pp. 785~806.
3. Lin, C.S.; "Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Slabs and Shells," *ph. D. dissertation, University of California, Berkeley*, April 1973, pp. 1~161.
4. Hand, F.R., Pecknold, D.A., and Schnobrich, W.C.; "Nonlinear Layered Analysis of R.C. Plates and Shells," *Journal of Structural Division, ASCE*, Vol. 99, No. ST7, 1973, pp. 1491~1505.
5. Wanchoo, M.K. and May, G.; "Cracking Analysis of Reinforced Concrete Slabs," *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 101, No. ST1, 1975, pp. 201~214
6. 진치섭, 엄종욱; "박판 유한요소를 이용한 사지치 입체구조물의 해석", 부산대학교 공과대학 연구보고 제32집, 1986.12, pp. 121~130.
7. Kupfer, H.B. and Gerstle, K.H.; "Behaviour of Concrete under Biaxial Stresses", *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 9, No. EM4, 1983, pp. 853~866.
8. Cowper, G.R.; "The Shear Coefficient in Timoshenko Beam Theory," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 33, 1966, pp. 335~345.
9. Owen, D.R.J., and Hinton, E.; "Finite Elements in Plasticity," Pineridge Press, Swansea, 1980, pp. 157~373.

10. Zienkiewicz, O.C.; "The *Finite Element Method (3rd)*," McGraw-Hill Company (UK) Limited. 1977, pp.450~499.
11. Construction Engineering Software Development Center, Kist, Seoul; "*SAPV-2, A Structural Analysis Program for Static and Dynamic Response of Linear Systems*," Kist, Seoul, 1980, pp.1~End.
12. Bhagwan, D. and Aggarwara; "Bending of Parallelogram Plates," *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 93, No. EM4 1967, pp.9~18.
13. 진치섭, 김충호, 정재동. ; "유한요소법에 의한 철근 콘크리트 슬래브의 "탄-소성 파괴해석", 부산대학교 공과대학 연구보고 제28집, 1984, pp.261~269.
14. Taylor, R., Maher, D.R.H., and Hayes, B.; "Effect of the Arrangement on the Reinforced Concrete Slab," *Magazine of Concrete Research*, Vol. 18, No. 55, 1966, pp.85~93.

(接受 : 1987. 10. 6)