

파수영역에서 모멘트 방법을 이용한 새로운
역산란 방법, I : 이론

(A New Inverse Scattering Technique Using the Moment
Method in the Spectral Domain, I : Theory)

金世潤,* 李在敏,** 羅正雄**

(Se Yun Kim, Jae Min Lee and Jung Woong Ra)

要 約

공간영역에서 모멘트방법을 써서 2차원 유전체의 복소 유전율 분포를 재구성 하기 위해 개발된 역산란 방법을 파수영역에서 사용할 수 있도록 개선하였다. 이 역산란 방법은 개념적으로 간단하고, 역산란 문제에 내재한 ill-posedness을 해결할 수 있는 여러가지 적절한 방안을 강구할 수 있도록 한다.

Abstract

The inverse scattering scheme, which was exploited for the reconstruction of complex permittivity profiles of 2-dimensional dielectric objects by using the moment method in the spatial domain, is modified to be applicable in the spectral domain. The presented scheme is conceptually simple and provides some proper ways to regularize the ill-posed characteristics inherent to the inverse scattering problems.

I. 서 론

전자파를 다루는 문제들은 일반적으로 산란(scattering)문제와 역산란(inverse scattering) 문제의 두 가지로 나누어 생각할 수 있다. 넓은 의미로 전자파 산란문제는 한 지점에서의 정보 또는 에너지를 전자파라는 매개수단을 써서 다른 지점으로 운반하는 것으로, 이러한 정보 또는 에너지를 담은 입사파가 운

반경로상의 매질분포에 따라 직진, 반사, 굴절, 회절하면서 발생하는 산란파를 구하는 문제이다. 이와 같이 임의의 매질과 여기에 입사하는 전자파간의 상호작용을 계산하는 방법에 관해서는 많은 연구가 되어져 있음에 비하면, 입사파가 임의의 매질분포를 통과하여 생기는 산란파를 측정하여 얻은 자료로부터 통과한 매질분포의 특성을 구하는, 즉 산란문제를 푸는 과정을 역으로 적용하여 계산하는 역산란문제에 대해서는 상대적으로 연구가 미약하다.^{1,2,3} 왜냐하면 입사파에 의해 전파경로상의 매질에 유기되는 등가전류로부터 복사되는 산란파의 스펙트럼(spectrum) 중 고주파 성분은 거리에 따라 그 세력이 지수적으로 감쇄한다.⁴ 따라서 산란파의 측정자료로부터 통과한

*正會員, 韓國科學技術院 物理電子研究部

(Center for Appl. Phys. and Elec. Eng., KAIST)

**正會員, 韓國科學技術院 電氣 및 電子工學科

(Dept. of Electrical Eng., KAIST)

接受日字 : 1988年 5月 17日

매질특성을 구하기 위해 등가유기전류의 스펙트럼을 계산시 고주파 성분의 스펙트럼은 정확히 복원하기가 매우 어렵다.¹⁵⁾ 실사 산란파로부터 등가유기전류의 모든 스펙트럼을 정확히 구할 수 있는 역산란계산식이 있다 하더라도, 실제 상황에서는 산란파의 측정시 주위 신호에 의한 영향과 측정오차등으로 생기는 잡음의 스펙트럼중 일부는 해당 산란파의 스펙트럼의 크기보다 더 커지게 되므로 정확한 등가유기전류 분포를 구할 수 없다. 이러한 역산란문제에서의 어려움을 ill-posedness 라고 하는데, 수학적으로는 역산란계산식으로 구한 해의 existence, uniqueness, stability 등을 보장하기 어렵기 때문이다.¹⁶⁾

최근 컴퓨터의 급속한 발달에 힘입어 전자파의 산란문제를 수치해석적인 방법으로 푸는 경향이 강한데, 임의의 유전체에 의해 산란된 전자파를 공간영역에서 모멘트 방법으로 수치계산하는 방법을 역으로 적용하여 유전체 내부의 유전율 분포를 구하는 역산란방법이 개발되었다.^{17,8,9)} 이 방법은 입사파의 파장에 비해 훨씬 작은 정도로 유전율 분포를 분별할 수 있음에 반하여, 산란파에 약간의 잡음이 있더라도 역산란 방법으로 구한 유전율 분포에 거의 원래값을 알아 볼 수 없을 정도로 심한 오차가 존재하였다.¹⁰⁾ 이러한 잡음의 영향을 줄이기 위하여 다중입사,¹¹⁾ pseudo 역변환,¹¹⁾ sinc 함수 basis¹²⁾ 등의 방법을 사용하였으나 큰 실효를 볼 수 없었다.

본 논문에서는 공간 영역에서 개발된 모멘트 방법을 이용한 역산란 방법을 주파수 영역에서 적용할 수 있도록 개발 하였다. 파수영역에서는 등가유기전류와 산란파 간의 상호 관계를 나타내는 Green 함수가 간단한 지수함수 형태로 표현되며, 이때 Green 함수의 역할이 마치 필터와 같으므로 산란파에 더해지는 잡음이 재구성된 등가 유기전류에 미치는 영향을 잘 기술할 수 있다. 왜냐하면 공간영역에서 모멘트 방법을 적용시 복잡한 적분계산을 해야 하므로 여러 가지 basis 함수를 취하는 데 어려움이 있으나, 파수영역에서는 모멘트 방법을 적용시킬 때 발생하는 적분식이 매우 간단하여 임의의 basis 함수에 대해서도 해석적인 표현식을 얻을 수 있기 때문이다. 파수영역에서 사용할 수 있는 역산란 계산식을 사용하여 ill-posedness의 원인을 규명하고, 이를 해결할 수 있는 방안들을 살펴보았다.

II. 파수 영역에서의 역산란방법

1. 적분방정식

그림 1과 같이 임의의 전원 $s(x, y)$ 로부터 복사된 평면파 $u^i(x, y)$ 가 z 방향으로 편파(polarization) 되어

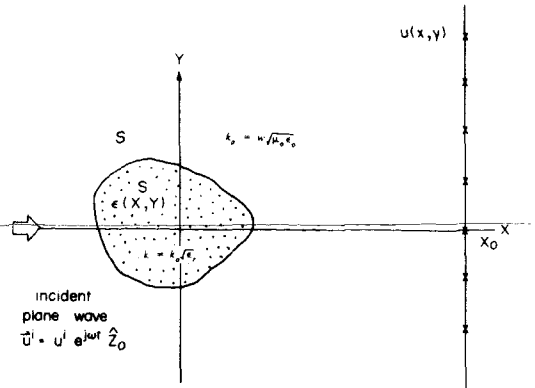


그림 1. 2차원 유전체의 구조
Fig. 1. Geometry of 2-dim. dielectric objects.

단면 S 를 갖는 유전체 기둥으로 입사할 경우 발생하는 전자파의 산란문제를 다루고자 한다. 유전체의 단면 S 내의 비유전율 분포가 $\epsilon_r(x, y)$ 로 z 방향으로 균일한 경우, 산란파 $u^s(x, y)$ 도 z 방향 성분만을 갖게 되므로 3차원 벡터 문제가 2차원 스칼라 문제로 간단하게 된다. 유전체 외부영역 \bar{S} 에서의 매질은 진공중과 같으며, 유전체 내부에서의 투자율은 외부매질과 같다고 한다. 본 논문에서는 시간 조화함수 $e^{j\omega t}$ 를 사용하였는데, 모든 전자파에 대한 표현식에서 생략하였다.

먼저 전체전계 $u(x, y)$ 는 맥스웰(Maxwell) 방정식으로부터 유도된 다음과 같은 파동방정식을 만족해야 한다.

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + k_0^2) u(x, y) &= -s(x, y), \quad S \\ (\nabla^2 + k^2) u(x, y) &= 0, \quad \bar{S} \end{aligned} \tag{1}$$

여기서 k_0 와 k 는 각각 영역 \bar{S} 와 S 에서의 파수(wavenumber)를 의미하는데 다음과 같다.

$$k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}, \quad k = k_0 \sqrt{\epsilon_r} \tag{2}$$

또 식 (1)에서 ∇^2 는 Laplacian 연산자를 의미한다. 식 (2)를 이용하면 식 (1)을 모든 영역에서 파수 k_0 를 갖도록 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + k_0^2) u(x, y) &= \begin{cases} -s(x, y), & \bar{S} \\ -k_0^2 p(x, y), & S \end{cases} \end{aligned} \tag{3}$$

여기서 $p(x, y)$ 는 유전체 내부에 유기되는 등가전원을 $j\omega \epsilon_0$ 으로 나눈 것으로 다음과 같이 주어진다.

$$p(x, y) = [\epsilon_r(x, y) - 1] u(x, y) \tag{4}$$

편의상 앞으로는 $p(x, y)$ 를 등가전원이라고 부르기로 한다. 식 (3)에 주어진 파동방정식을 적분식으로 바꾸기 위하여, 2 차원 자유공간상의 임의의 점 (x, y) 에 위치한 선전류원에 의한 복사파를 나타내는 그린 (Green) 함수를 다음과 같이 도입한다.

$$(\nabla^2 + k_0^2) G(x, y; x', y', k_0) = -\delta(x-x') \delta(y-y') \quad (5)$$

여기서 δ 는 Dirac 델타 함수를 의미하는데, 식 (5)의 2 차 편미분방정식을 직접 풀면, 그린함수를 다음과 같은 제 2 종 Hankel 함수로 표시할 수 있다.

$$G(x, y; x', y', k_0) = -\frac{j}{4} H_0^{(2)}(k_0 \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}) \quad (6)$$

또 식 (6)의 양변을 변수 y 에 대해 푸리에 변환을 취하여 2 차 상미분방정식을 풀고, 이를 다시 역푸리에 변환을 취하면 그린함수를 임의의 x 선상에서 다음과 같은 스펙트럼 (spectrum)의 적분형태로 쓸 수 있다.

$$G(x, y; x, y; k_0) = \frac{-j}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\beta \frac{e^{-\sqrt{k_0^2 - \beta^2} |x-x'| + j\beta y}}{2\sqrt{k_0^2 - \beta^2}} e^{-j\beta y} \quad (7)$$

여기서 β 는 파수 (spatial-frequency) 영역에서의 변수를 의미하고, 그린함수 G 는 복사조건 (radiation condition)을 만족해야 하므로, $\sqrt{k^2 - \beta^2}$ 의 허수부분은 항상 음수이다. 식 (3)의 양변에 함수 G 를 곱하고, 이를 식 (5)의 양변에 함수 u 를 곱한 값으로 빼서 2 차원 전공간에 대해 적분하면 다음과 같은 적분 방정식을 얻을 수 있다.

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} dx dy [G \nabla^2 u - u \nabla^2 G] = u(x', y') - \iint_S dx dy GS - k_0^2 \iint_S dx dy Gp \quad (8)$$

식 (8)의 좌변항은 제 2 차 그린정리 (Green's second identity)를 쓰면 무한원주상의 선적분으로 그 값이 0이 됨을 보일 수 있다. 또 식 (8)의 우변의 두번째 항은 입사파 u^i 를 의미함을 알 수 있다. 따라서 식 (8)에 적분변수 x 와 y 를 변수 x' 와 y' 으로 서로 치환할 경우 식 (1)에서 보인 바와 같이 그린 함수는 같은 값을 주므로, 식 (8)은 다음과 같은 제 2종 Fredholm형 적분 방정식으로 간단히 표현된다.

$$u(x, y) = u^i(x, y) - \frac{jk_0^2}{4} \iint_S dx' dy' p(x', y') H_0^{(2)}(k_0 \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}) \quad (9)$$

식 (9)의 양변을 변수 y 에 대해 푸리에 변환할 경우 우변항의 적분식에 식 (7)의 결과를 대입하여 정리하면, 식 (9)는 다음과 같은 파수영역에서의 적분 식으로 바뀐다.

$$U(x, \beta) = U^i(x, \beta) + F(x, \beta) I(\beta) \quad (10)$$

이때 함수 F 와 I 는 각각 다음과 같이 주어진다.

$$F(x, \beta) = -\frac{jk_0^2}{2} \frac{\exp^{+j\sqrt{k_0^2 - \beta^2} x}}{\sqrt{k_0^2 - \beta^2}} \quad (11)$$

$$I(\beta) = \iint_S dx' dy' p(x', y') e^{+j\sqrt{k_0^2 - \beta^2} x' + j\beta y'} \quad (12)$$

식 (11)과 식 (12)의 복부호증 및 부호는 $x \geq x'$ 일 경우이고, 아랫 부호는 그 반대 경우에 사용한다. 계산 편의상 이후부터는 $x \geq x'$ 인 경우에 대해 기술한다.

적분방정식은 Hankel 함수와 같은 특수함수에 대한 적분으로 주어지는데 비해, 식 (10)의 파수영역에서의 적분 방정식은 식 (12)에 보인 것처럼 간단한 지수함수의 적분형태로 표현됨을 볼 수 있다. 이러한 차이점은 유전체 내부에 유기되는 등가전류분포인 함수 p 를 여러가지 급수형태로 전개할 경우 그 적분이 해석적인 형태로 계산 되는가 아닌가를 결정하는 중요한 요소가 된다.

2. 모멘트 방법

식 (10)의 적분 방정식을 직접 해석적인 방법으로 풀기는 어려우므로, 식 (12)의 적분식을 모멘트 방법^[11]을 써서 선형방정식으로 표현한다. 이를 위해서는 유전체 단면 S 를 그림 2와 같이 N 개의 소영역 (cell)으로 잘게 나누고, 이때 n 번째 소영역 S_n 은 한변의 길이가 입사파의 파장인 λ 에 비해 훨씬 작은 $2d$ 인 정사각형으로 취하면, 이 소영역내에서의 전계분포 u 와 비유전율 분포 ϵ_r 은 중심점 (x_n, y_n) 에서의 전계 u_n 과 비유전율 ϵ_n 으로 근사화 시킬 수 있다.

$$u(x, y) \approx u(x_n, y_n) = u_n, \quad S_n \\ \epsilon_r(x, y) \approx \epsilon_r(x_n, y_n) = \epsilon_n, \quad S_n \quad (13)$$

식 (13)과 같이 유전체 내부의 전계와 유전율 분포를 근사시키는 것을 수학적으로는 전계와 유전율 분포를 펄스 basis로 전개 한다고 한다. 따라서 소영

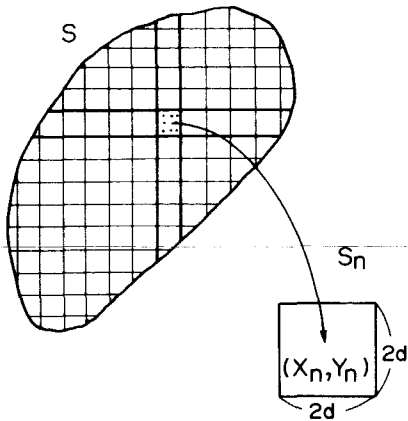


그림 2. 영역 S를 소영역 S_n의 합으로 분할
Fig. 2. Partition of S into a number N of cells.

영역 S_n 내의 등가 유전전류 p는 다음과 같이 근사시킬 수 있다.

$$p(x, y) \approx p(x_n, y_n) = p_n = (\epsilon_n - 1) u_n, S_n \quad (14)$$

식 (14)를 식 (12)에 대입하여 정리하면 I(β)를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$I(\beta) = \sum_{n=1}^N p_n \int_{x_n-d}^{x_n+d} dx' \int_{y_n-d}^{y_n+d} dy' e^{j\sqrt{k_0^2 - \beta^2} x' + j\beta y'} \\ = B(\beta) \sum_{n=1}^N G_n(\beta) p_n \quad (15)$$

여기서

$$B(\beta) = \frac{2\sin(\sqrt{k_0^2 - \beta^2} d)}{\sqrt{k_0^2 - \beta^2}} \cdot \frac{2\sin(\beta d)}{\beta} \quad (16)$$

$$G_n(\beta) = e^{j\sqrt{k_0^2 - \beta^2} x_n + j\beta y_n} \quad (17)$$

식 (15)를 식 (10)에 대입하면, 파수영역에서의 적분방정식을 다음과 같은 급수합 형태로 쓸 수 있다.

$$U(x, \beta) = U^i(x, \beta) + F(x, \beta) B(\beta) \sum_{n=1}^N G_n(\beta) p_n \quad (18)$$

3. 역산란 계산방법

역산란 계산시 미리 알고 있는 양은 입사파 uⁱ(x, ·)와 유전체 외부에서 측정된 전계 u(x, y)으로, 임의의 x=x₀ 선상의 유한개의 점에서 그 값을 알므로 변수 y에 대해 불연속 푸리에 변환(discrete Fourier transform)을 취하면 N개의 불연속적인 파수영역에

서의 변수 β_l에 대한 스펙트럼인 Uⁱ(x₀, β_l)와 U(x₀, β_l)을 알 수 있다. 여기서 l은 1부터 N까지의 정수이다. 따라서 식(18)에 x=x₀, β=β_l을 대입하여 정리하면,

$$\sum_{n=1}^N G_n(\beta_l) p_n = \frac{U(x_0, \beta_l) - U^i(x_0, \beta_l)}{F(x_0, \beta_l) B(\beta_l)}, l=1, \dots, N \quad (19)$$

으로 우변항은 아는 양이 된다. 식 (19)를 행렬식으로 나타내면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$[G] \mathbf{p} = \mathbf{r}(x_0) \quad (20)$$

여기서 [G]는 N×N행렬로 l×n번째 요소 G_{ln}은 식 (17)에서 주어진 G_n(β)을 의미하고, N차 벡터 p의 n번째 요소가 p_n이며 N차 벡터 r(x₀)의 l번째 요소인 r(x₀)는 식 (19)의 우변과 같이 주어진다. 식 (20)에서 벡터 r은 아는 양이므로 유전체 내부의 등가 유전 전류분포를 나타내는 p는 행렬 [G]의 역변환으로 구할 수 있다.

$$\mathbf{p} = [G]^{-1} \mathbf{r}(x_0) \quad (21)$$

그런데 구하고자 하는 양은 유전체 내부에 유기되는 등가전류가 아니라, 유전체 내부의 비유전율 분포이다. 따라서 식 (21)에서 구한 N개의 p_n을 식 (18)에 대입하면, 입사파 Uⁱ(x, β)에 대해서는 정확히 알 수 있으므로 U(x, β)에 대해 알 수 있다. 따라서 역 푸리에 변환으로부터 유전체 내부의 점 (x_n, y_n)에서의 전계 u_n을 쉽게 계산하게 된다. 유전체 내부의 소영역 S_n내에서의 등가유전전류 p_n과 전계 u_n을 알므로 식 (14)로부터 S_n내의 비유전율 값인 ε_n을 구할 수 있다.

$$\epsilon_n = \frac{p_n}{u_n} + 1, S_n \quad (22)$$

위에서 기술한 역산란과정은 세 단계로 구성되어 있다. 먼저 유전체 외부영역에서 산란 전계를 측정하고 이를 식 (21)에 대입하여 유전체 내부에 유기된 등가전류를 N×N행렬의 역변환으로 구한다. 이것은 역전원문제(inverse source problem)를 푸는 것과 같다. 두번째 단계는 계산된 등가유전전류로부터 복사되는 전계를 유전체 내부에서 구하기 위해 식 (18)을 사용하는데, 일종의 복사 및 전파(radiation and propagation)문제를 푸는 것으로 N×N행렬과 N차 벡터간의 곱을 계산한다. 마지막 단계로 앞의 두 단계로부터 각각 구한 등가유전전류와 전계의 비로부터 비유전율 분포를 구할 수 있다.

III. 물리적인 의미 및 장단점

1. Ill-posedness

이미 개발된 공간영역에서의 역산란 방법⁽⁹⁾에서는 산란파의 측정위치, 등가유기전류 분포를 급수 전개로 표현시 basis 종류, 소영역의 크기 등의 영향이 분리되지 않고 함께 복합적으로 표현됨에 비하여, 앞에서 기술한 파수영역에서의 역산란 계산식에는 측정위치, basis 형태 및 소영역 크기의 영향이 각각 식 (18)에서의 함수 $F(x, \beta)$, $B(\beta)$ 및 $G_n(\beta)$ 로 독립적으로 표현된다는 장점이 있다.

먼저, 함수 $F(x, \beta)$ 의 역할을 자세히 살펴보기 위하여, $x=x_0$ 선상에서 임의의 $\beta=\beta_i$ 에 대해 식 (11)을 β_i 의 절대값이 k_0 보다 클때와 작을때로 나누어 표현하면 다음과 같다.

$$F(x_0, \beta_i) = \begin{cases} -\frac{jk_0^2}{2} \frac{e^{-j\sqrt{k_0^2-\beta_i^2} x_0}}{\sqrt{k_0^2-\beta_i^2}}, & |\beta_i| \leq k_0 \\ \frac{k_0^2}{2} \frac{e^{-\sqrt{\beta_i^2-k_0^2} x_0}}{\sqrt{\beta_i^2-k_0^2}}, & |\beta_i| > k_0 \end{cases} \quad (23a)$$

$$\quad (23b)$$

함수 $F(x_0, \beta_i)$ 의 특성을 좀 더 잘알기 위해서 식 (10)의 표현식을 빌어서 식 (19)를 나타내면

$$I(\beta_i) = \frac{U^s(x_0, \beta_i)}{F(x_0, \beta_i)} \quad (24)$$

으로 $U^s(x_0, \beta_i)$ 은 $x=x_0$ 선상에서 측정된 산란전계의 스펙트럼을 의미한다. 산란 문제를 푸는 과정은 등가 유기전류 분포의 스펙트럼 $I(\beta_i)$ 에 $F(x_0, \beta_i)$ 과 같은 필터를 곱함으로써 산란전계 $U^s(x_0, \beta_i)$ 을 계산하는 것으로 그림 3(a)와 같다. 식 (23b)에서 보듯이 $F(x_0, \beta_i)$ 은 $|\beta_i| > k_0$ 일 때 그림 3(a)와 같이 지수감쇄하여 마치 저대역 필터와 같이 보인다. 본 논문에서 다루는 역산란문제에서는 그림 3(b)에서 보듯이, 측정된 산란전계 스펙트럼에 $1/F(x_0, \beta_i)$ 과 같은 고대역 필터를 곱하여 $I(\beta_i)$ 을 계산해야 한다. 이러한 문제를 풀 경우 항상 발생하는 어려운 ill-posedness를 그림 3(b)를 이용하여 설명하도록 하자. 역산란 계산을 위해 필요한 일은 유전체 외부에서 산란전계를 측정하는 것인데, 많은 경우 주위의 불필요한 신호나 측정상의 오차등이 존재하여 이러한 잡음이 산란전계에 더해져 측정된다. 그림 3(b)에서와 같은 백색잡음(white noise)이 실선으로 표시한 정확한 산란전계의 스펙트럼에 더해져 실제 산란전계의 스펙트럼이 그림 3(b)에서 점선과 같을 경우, 식 (24)를 써서 구한 등가유기전류의 고주파 성분에서는 많은 오

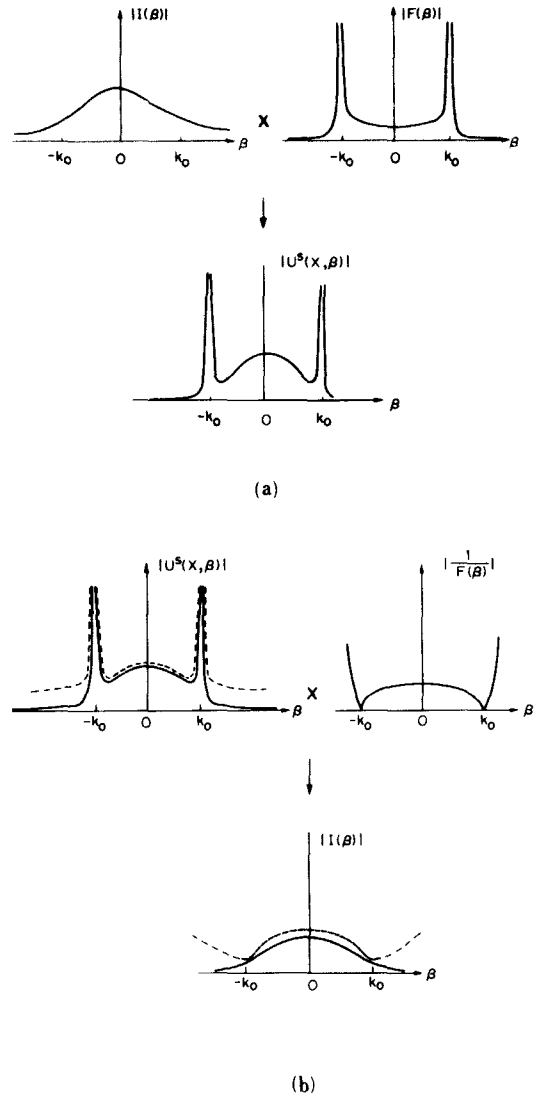


그림 3. 함수 $F(x_0, \beta_i)$ 의 특성

(a) 산란과정

(b) 역산란과정

Fig. 3. Characteristics of $F(x_0, \beta_i)$.

(a) scattering process.

(b) inverse scattering process.

차가 발생한다. 특히 산란전계의 잡음이 재구성된 등가유기전류에 미치는 영향이 측정위치가 유전체로부터 멀어져 x_0 가 커질수록 엄청나게 증가함을 식 (23b)로부터 알 수 있다. 이러한 잡음의 영향을 줄이는 방안으로 측정된 산란전계의 스펙트럼중 $|\beta_i| > k_0$ 인 고주파 성분은 0으로 가정하여, 재구성된 등가유기전류에 대한 스펙트럼 정보는 $|\beta_i| < k_0$ 인 영역에서만 취하는 것을 들 수 있다. 그러나 이 경우

고주파 성분의 스펙트럼을 0으로 처리하므로, 역푸리에 변환으로 구간 공간영역의 등가유기진류 분포에는 원래의 미세한 변화가 나타나지 않는다. 이것은 구하고자 하는 유전체 내부의 유전율 분포에 대한 분해능력 (resolution)이 떨어짐을 의미한다. 따라서 잡음의 영향을 줄이면서 분해능력도 증진시키는 타협방안이 필요한데, 이를 regularization이라고 한다. 예로서 그림 4에서와 같은 함수 $W(x_0, \beta)$ 를 그림 3(b)에서와 같이 주어진 $I(\beta_i)$ 에 곱하면, 그림 3(b)에서 점선으로 표시된 $|\beta_i| > k_0$ 인 영역의 $I(\beta_i)$ 의 잡음에 의한 오차를 개선할 수 있다. 이와 같은 함수 $W(x_0, \beta)$ 을 regularization 필터¹¹⁾라고 부르는데, 실제 역산란 문제 상황에 따라 적절히 $W(x_0, \beta)$ 을 선택해야 한다.

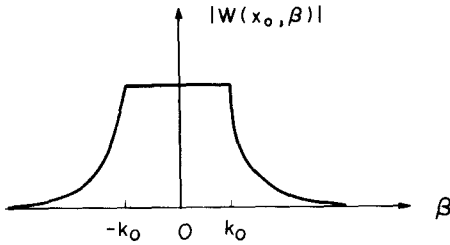


그림 4. Regularization 필터 $W(x_0, \beta)$
Fig. 4. Regularization filter $W(x_0, \beta)$.

2. 평균효과

공간영역에서의 역산란방법¹¹⁾에서는 산란전계에 측정점을 많이 잡을 수록 역 변환시켜야 할 행렬의 행의 수가 증가하여 pseudo 역변환¹¹⁾을 해야 하는 단점이 있었다. 그러나 파수영역에서의 역산란 방법을 사용할 경우, 산란전계의 측정점을 많이 잡을 수록 실제 산란전계의 스펙트럼에 대한 평균값을 취할 수 있어서 측정시 발생하는 잡음의 영향을 줄일 수 있는 잇점이 있다. 앞 절에서 보인 바와 같이 잡음의 영향을 줄이는 방안으로 regularization 필터를 사용할 수도 있지만, 가장 근원적인 방법은 측정된 산란전계의 오차를 줄이는 것이다. 먼저 그림 5와 같이 $x = x_0, x_1, x_2, \dots, x_Q$ 의 $Q + 1$ 개의 선상에서 산란전계를 측정하여 푸리에 변환으로 β 에 대한 스펙트럼을 구하였다고 하자. 이 경우 각각 식(19)를 만족하므로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\sum_{n=1}^N G_n(\beta_i) p_n = \frac{U(x_0, \beta_i) - U^i(x_0, \beta_i)}{F(x_0, \beta_i) B(\beta_i)}, \quad i = 1, \dots, N \quad (25)$$

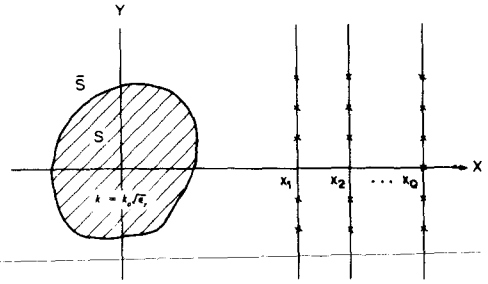


그림 5. 산란 전계의 스펙트럼 평균
Fig. 5. Average of spectrums of scattered fields.

식 (25)에서 $q=0, 1, \dots, Q$ 이다. 식 (25)의 우변항은 전부 아는 양이므로 식 (20)과 같은 행렬식으로 쓸 수 있다.

$$[G] \vec{p} = \vec{r}(x_q), \quad q=0, 1, \dots, Q \quad (26)$$

식 (26)에서 구하고자 하는 벡터 \vec{p} 는 x_0 에 상관없이 일정하므로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\vec{p} = [G]^{-1} \vec{r} \quad (27a)$$

$$\vec{r} = \frac{\sum_{q=0}^Q \vec{r}(x_q)}{Q + 1} \quad (27b)$$

식 (20)과 식 (27a)를 비교하면 두 경우 모두 같은 $N \times N$ 행렬인 $[G]$ 를 역변환하고, 다만 산란전계의 측정으로부터 얻은 스펙트럼을 후자의 경우 식 (27b)와 같이 $Q + 1$ 번 평균하여 구한다는 차이 밖에 없다. 따라서 파수영역에서의 역산란계산시는 행렬 $[G]$ 의 요소숫자를 늘리지 않으면서도 여러 지점에서 측정된 산란전계 정보를 한꺼번에 이용할 수가 있다.

3. Basis 변화

공간 또는 파수영역의 역산란계산방법에서 모멘트방법을 사용할 경우, 유전체 내부의 전계 및 비유전율 분포를 어떠한 basis로 전개하는 가는 매우 중요하다. 본 논문의 II장에서는 식 (12)의 적분식을 식 (13)과 같이 임의의 소영역내에서의 전계와 비유전율 분포를 소영역의 중심에서의 전계와 비유전율값과 같은 상수값으로 각각 근사화하였는데, 이는 펄스함수를 basis로 취한 경우이다. 편의상 소영역 S_n 내에서의 비유전율 분포는 식 (13b)와 같이 근사화하며, S_n 내의 전계 $u(x, y)$ 를 pulse 함수대신 변수 x 와 y 에 대해 서로 같은 $u_n \cdot b_n(x) \cdot b_n(y)$ 와 같은 basis를 취할 경우 식 (12)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$I(\beta) = \sum_{n=1}^N G_n(\beta) p_n J_n(\alpha) J_n(\beta) \quad (28)$$

여기서 $G_n(\beta)$ 는 식 (17)과 같고, α 는 $\sqrt{k_0^2 - \beta^2}$ 를 의미하며 함수 $J_n(\beta)$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$J_n(\beta) = \int_{-t}^t dy b_n(y) e^{i\beta y} \quad (29)$$

여기서 t 는 $\beta = 0$ 일때 식 (29)의 적분값이 $2d$ 가 되도록 잡는다. 이때 $J_n(\alpha)$ 는 식 (29)와 같으며 다만 적분변수가 y 대신 x 임이 다르므로 실제 계산과정은 같다. 따라서 본 논문에서는 $J_n(\beta)$ 에 대해서만 기술하도록 한다. 먼저 그림 6과 같이 소영역 S_n 내에서 y 방향으로의 전계변화를 삼각(triangular)함수, cosine 함수 및 sinc 함수의 세가지로 표현할 경우, 펄스 함수의 경우와 비교해보자. 이때 $J_n(\beta)$ 를 각각 계산하면 다음과 같다.

$$J_n(\beta) = \begin{cases} 2d \frac{\sin(\beta d)}{\beta d}, & \text{펄스함수} \end{cases} \quad (30a)$$

$$2d \left(\frac{\sin(\beta d)}{\beta d} \right)^2, \text{ 삼각함수} \quad (30b)$$

$$2d \frac{\sin(\beta d)}{\beta d} \cdot \frac{\cos(\beta d)}{1 - \frac{2\beta d}{\pi}}, \text{ cosine 함수} \quad (30c)$$

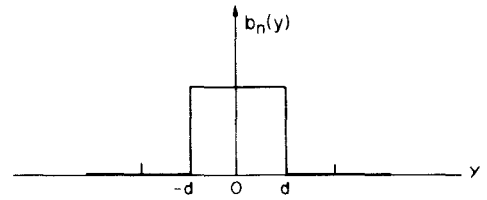
$$2d \left[S\left(\beta + \frac{\pi}{2d}\right) - S\left(\beta - \frac{\pi}{2d}\right) \right], \text{ sinc 함수} \quad (30d)$$

식 (30a)는 식 (16)에서 보인 것과 같은 것이며, 식 (30d)에서 함수 S 는 단위계단함수로 다음과 같다.

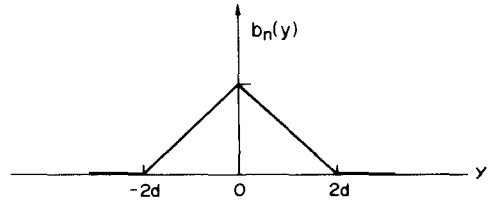
$$S(\beta) = \begin{cases} 1, & \beta > 0 \\ 0, & \beta < 0 \end{cases} \quad (31)$$

식 (30)을 이용하여 위의 네 경우의 $J_n(\beta)$ 를 그림 7에 보였는데, basis를 부드러운 형태로 취할수록 $J_n(\beta)$ 가 $\beta=0$ 를 중심으로 급속히 변화함을 알 수 있다. 이는 식 (29)가 일종의 푸리에 적분과 같기 때문이다. 위에서 보인 바와 같이 파수영역에서의 역산란계산방법은 여러가지 형태의 basis를 취할 수 있으므로, 유전체 내부에 유기되는 등가전류를 가장 잘 나타내는 basis로 전개할 경우 계산상의 어려움이 없다. 특히 소영역 S_n 의 크기를 크게 할 경우 앞 II 장에서와 같은 펄스함수로 소영역내의 전계분포를 나타내기 어려운데, 소영역내의 전계를 급수함으로 표현해도 마찬가지로 계산할 수 있다.

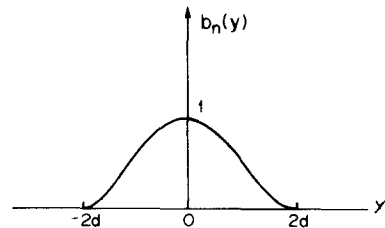
본 논문에서 기술한 파수영역에서의 역산란 방법은 공간영역에서의 방식에 비해 물리적인 의미를 잘 보여주며 계산과정이 쉽지만, 산란전계에 대한 스펙트럼을 알아야 하므로 푸리에 변환을 더 해야 하는



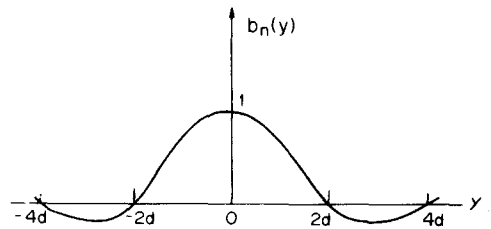
(a)



(b)



(c)



(d)

그림 6. Basis 함수 형태

- (a) 펄스
- (b) 삼각
- (c) cosine
- (d) sinc

Fig. 6. Types of basis functions.

- (a) pulse,
- (b) triangular,
- (c) cosine,
- (d) sinc.

단점이 있다. 그러나 푸리에 변환을 신속히 처리할 수 있는 여러가지 프로그램이 잘 개발되어 있으므로 큰 어려움으로는 볼 수 없다.

IV. 결 론

본 논문에서는 공간영역에서 모멘트 방법을 이용

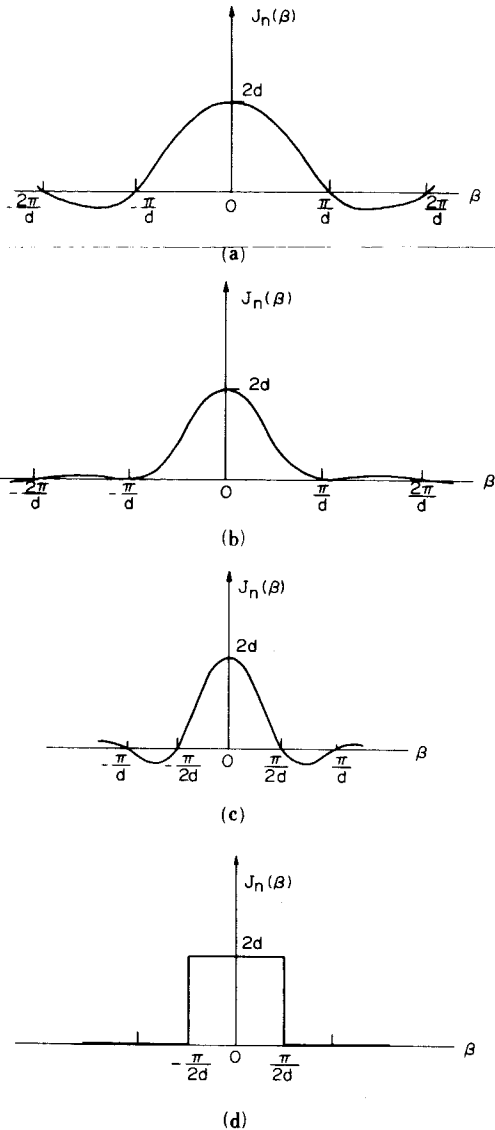


그림 7. 여러가지 형태의 $J_n(\beta)$
 (a) 펄스 (b) 삼각
 (c) cosine (d) sinc

Fig. 7. Various types of $J_n(\beta)$.
 (a) pulse. (b) triangular.
 (c) cosine. (d) sinc.

한 역산란계산방법을 파수영역에서 적용할 수 있도록 개선하였는데, 파수영역에서 역산란계산식에서는 측정위치, basis 형태, 소영역의 크기등의 영향을 각각 분리하여 볼수 있는 장점이 있음을 알았다. 특히 모든 역산란문제에서 어려움을 야기시키는 ill-posedness의 원인을 쉽게 발견할 수 있으며, 파수영역에

서의 역산란계산방법을 쓰면 적절한 regularization필터를 부가하거나 산란전계를 여러점에서 측정하여 이를 평균하거나, 또는 유전체 내부의 등가 유전률을 다양한 basis로 전개함으로 ill-posedness를 개선할 수 있음을 보였다.

이 방법은 3차원 유전체의 역산란문제에도 큰 어려움이 없이 확대 적용시킬 수 있으며, 본 논문의 연속논문에서는 실제 여러가지의 경우에 대해 본 논문에서 개발한 역산란방법으로 수치계산하여 유전체 내부의 유전율 분포를 계산하였다.

參 考 文 獻

- [1] L. Colin, Proc. of the Workshop on mathematics of profile inversion, Ames. Research Center, Moffett Field, CA, NASA Tech. Memorendom, X-62. 150, |1972.
- [2] Special issue on inverse method in electromagnetics, *IEEE Trans. Antennas and Propagat.*, vol. 29, no. 2, 1981.
- [3] Special issue on inverse problems in propagation and scattering, *J. Opt. Soc. Am. A.*, vol. 2, no. 11, 1985.
- [4] P.C. Clemmow, *The plane wave spectrum representation of electromagnetic fields*, Pergamon, 1966.
- [5] H.P. Baltes, ed., *Inverse source problem in optics*, Ch.4, Springer-Verlag, 1978.
- [6] P.C. Sabatier, "Theoretical considerations for inverse scattering," *Radio Sci.*, vol. 18, pp. 1-18, 1983.
- [7] S.A. Johnson, T.H. Yoon, and J.W. Ra, "Inverse scattering solutions of scalar Helmholtz wave equation by a multiple source moment method," *Electron. Lett.*, vol. 19, pp. 130-132, 1983.
- [8] D.K. Ghodgaonker, O.P. Gandhi, and M.J. Hagmann, "Estimation of complex permittivities of three dimensional inhomogeneous biological bodies," *IEEE Trans. Microwave Theory and Tech.*, vol. 31, pp. 442-446, 1983.
- [9] 김세윤, 이재민, 나정웅, "모멘트 방법을 이용한 새로운 역산란 계산 방법, I : 이론," 전자공학회지, 제25권, 제 3 호, pp. 6-14, 1988.
- [10] 김세윤, 윤태훈, 나정웅, "모멘트 방법을 이용한 새로운 역산란 계산 방법, II :잡음의 영향," 전자공학회지, 제25권, 제 4 호, pp. 15-24, 1988.

[11] M.M. Ney, A.M. Smith, and S.S. Stuchly, "A solution of electromagnetic imaging using pseudoinverse transformation," *IEEE Trans. Medical Imaging*, vol. 3, pp. 155-162, 1984.

[12] S.A. Johnson and T.L. Tracy, "Inverse

scattering solution by a sinc basis, multiple source, moment method," *Ultrasonic Imaging*, vol. 5, pp. 361-375, 1983.

[13] A. Tikhonov and V. Arsenine, *Solutions of ill-posed problems*, Wiley, 1977. *

著 者 紹 介

金 世 潤 (正會員) 第25卷 第8號 參照
 현재 한국과학기술원 물리전
 자 연구실 선임연구원

羅 正 雄 (正會員) 第25卷 第8號 參照
 현재 한국과학기술원 전기
 및 전자공학과 교수



李 在 敏 (正會員) 第25卷 第3號 參照
 현재 한국과학기술원 박사
 과정 재학중