Journal of Historia Mathmatica Vol.5. No.1, 1988.9
The Society of Korean Mathematical History

集合論 成立의 背景으로서의 無限論에 관해서

한양대학교 김 용 운

머 리 말

밑이 없는 나락 속을 한없이 빠져 들어가는 공포의 순간을 누구나 한번 쯤은 꿈 속에서 겪었음에 틀림없다. 또 이 우주가 끝없이 커져가고, 이에 따라, 여기에 있는 내가 한없이 작아지면서 눈에 띌까 말까 하는 점으로 변하고, …마침내는 그 존재조차 지워지고 만다는 생각에 온 몸을 떨면서 잠자리를 땀으로 적신 적도 아마 있었을 것이다

이처럼 무한(無限)은, 보통, 가까이 할 수 없는 암흑의 심연이자 공포의 대상, 게다가 무익한 것, 무의미한 것으로 여겨지기도 한다. Pascal은 그의 명상록 〈빵세〉 속에서 이 무한의 '이미지'(心像)를 다음과 같이 표현하고 있다.

『모든 시간의 무한성 속에 빨려 들어간 자신의 짧은 생명을 생각할 때, 또 내가 모르는, 그리고 나를 모르는 무한히 큰 공간 속에 빨려들어간 이 조그만 공간의 소부분을 생각할 때, 나는 저기에 있지 않고 여기에 있다는 사실, …그 때가 아니고 이 때에 존재한다는 사실을 의아스럽게도 또 두렵게도 여기게 된다.

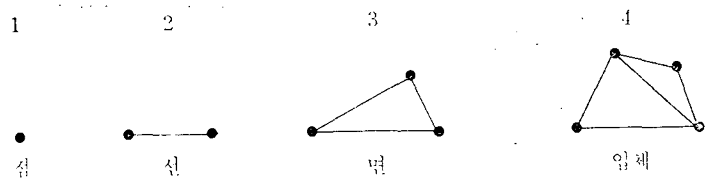
원시시대에 그려진 동굴의 벽화를 보면, 빈 틈 없이 여러가지 그림으로 가득 메워져 있는 것이 특징이다. 화면에 여백을 남기지 않고 온통 물감을 칠하는 이러한 심리를 공백의 공포'라고 부르는 사람도 있다. 또 원시인들의 상상의 세계가 무한히 뻗은 우주가 아니고, 강이나 산맥에 의해서 한정된 유한의 세계였던 것도, 이 '공백'(=무한)에 대한 공포심을 반영한 탓으로 보인다.

그리스어로 무한을 apeiron이라고 하는데 이 낱말은 유한, 즉, '한정된 것'(peras)의 부정, 그러니까 본래 '부정'(不定), 즉, 일정치 않는 것, 불분명(不分明)한 것을 뜻하였다. 이 말은 심지어 부정(否定)적이자 멸시적인 뜻으로 쓰여지기까지 하였다. 무질서한 상태, 예를 들어, 마냥 구부러진 선(線)이나, 형편없이 구겨진 옷도 '아페이론 이라고 불리어졌었다. 이처럼, '아페이론'은 무한히 큰 것, 분명치 않는 흐릿한 상태 헤아릴 수 없을 만큼 복잡한 형태 등을 통틀어 나타내는 말이었다. 이 우주(宇宙)를 조화로운 것, 질서 정연하게 이루어진 것, 즉 'Cosmos'('통일적인 질서세계')로 여겼

던 그리스도인들로서는 이것과 반대의 뜻을 지닌 'apeiron'을 부정적인 것으로 해석한 것은 오히려 당연하였다.

유럽인의 사상에 가장 심각한 영향을 끼친 그리스의 두 철학자 Pythagoras나 Platon이 품었던 우주상(宇宙像)은, 'apeiron'의 어두운 그림자가 끼어들 여지가 없는 단순 명확한 기하학적인 세계였다.

Pythagoras는 세계의 온갖 현상은 유한개의 자연수의 배열로 나타내어진다고 믿었으며, 그의 이러한 영향을 받은 플라톤은, 세계의 근본원리인 '선'(善)까지도 어떤 '유한인 존재'로 믿었다. Aristoteles의 다음 말은, 이러한 그리스인의 심성(心性)을 잘 대변해 주고 있다.



우주를 구성하는 기본요소로서의 수

『무한(apeiron)은 부족함, 완전하지 않음을 나타낸다. 그것은 한계(peras)의 상실을 뜻한다.』*

앞에서 이야기한 Pythagoras나 Platon의 생각을 이어 받으면서, 논리적으로 이것을 더 철저하게 다듬어서 그리스적 무한관(無限觀)을 최종적으로 정리한 것은 이 Aristoteles이다. 그의 표현을 빌면, 무한은 '현실적으로 존재하는 것', '완성된 형태로 존재하는 것', 즉 형상을 지닌 상태로 존재하는 것이 아니고, 단지 '가능적인 존재,에 지나지 않는다. 가능적인 존재란, 아직 형상을 갖추지 않는 질료(=소재)의 상태에 있음을 뜻한다. 이것은 소크라테스의 상(像이 아직 완성되지 않고, 대리석의 석재 속에 묻혀 있는 상태, 또는 알 속에서 아직 뚜렷한 형체를 취하지 않고 있으나, 가능적으로 존재하고 있는 '닭'에 비유할 수도 있다

그러나 Aristoteles는 무한의 가능적 존재를 그의 저술("Physica") 속에서, 이것과 조금 다른 뜻으로 풀이하고 있다. 예를 들어, 자연수열

$1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$

은 어떤 시점(時點)에서는 확실히 한정되어 있으며, 따라서 현실적으로 존재하는 것이지만, 계속 나타나는 부분의 계열은 한없이 이어질 수 있다. 이와 같이, 어디까지나 차례차례 시간적으로 덧붙여질 수 있는 가능성, 여기에 무한의 본질이 있다고 Aristoteles는 생각하였다.

무한에 대한 동·서양 시차(視差) :

'무한'은 비단 그리스 뿐만 아니라, 다른 시대 다른 곳에서도 늘 '유한'과 대비시켜서 쓰여져 왔다. 한 예로 영어의 boundless, endless, infinite 등은 'finite'(유한)의 반대어 인데, 이들 낱말은 모두가 '끝', '한계'를 뜻하는 라틴어의 'finis'로부터 파생

* Aristoteles, "Physica"

한 것이다. 이 사실에서도 짐작할 수 있는 바와 같이, 본래 '무한'이란, 문자 그대로 한계나 끝을 갖지 않는다는 뜻이었다.

인도에서 일어난 불교 경전 속에서도 이러한 무한·유한의 대비는 여러가지 형태로 다루어지고 있다. 예를 들면, 중국어로 옮긴 경전 속에는 '상'(常)과 '무상'(無常)이라는 표현이 있다. 여기서 '무상'이란 일정치 않고 소멸하는 것이며, 시간적인 유한을 가리킨다. 역으로 '상'이란, 끊임없이 지속한다는 뜻으로 뒤에서 이야기할 아리스토텔레스의 '가능적무한'에 해당한다. 또, 공간적인 뜻으로는 '무변'(無邊)과 '유변'(有邊)이라는 표현이 있고, 무한의 양(量)을 나타내는 '무량'(無量)이라는 낱말도 자주 쓰인다. 불교의 '구제자(救濟者)이자 숭배의 대상인 '아미타불'(阿彌陀佛)이 본래는 '무량수불'(無量壽佛)로 불리어졌었던 것은 널리 알려진 사실이다.

이렇듯 인도에서는 무한은 긍정적·본질적인 것으로 여겼으며, 이 경향은 중국을 중심으로 한 동 아시아 문화권(文化圈)에서도 마찬가지였다. 중국 전국시대의 대 철학자 莊子(莊周, B.C. 4세기)가 쓴 같은 이름의 책 〈장자〉(莊子)에는 이 동양적인 무한 우위론(無限優位論)이 펼쳐지고 있다.

『태고적 사람들 중에 최고의 지혜를 지녔던 사람들이 있었다. 왜냐 하면 그들은 자연 그대로의 존재였고, 그들의 의식은 주객이 아직 나눠지지 않은 이른바 혼돈상태였다고 생각되기 때문이다. 이 혼돈상태야 말로 가장 바람직한 것이다.

시대가 내려옴에 따라 사람들은 자신을 둘러싸고 있는 세계를 의식하기 시작했다. 이리하여 인식 작용이 생기게 되었으나 객체(客體)로서의 사물에 구별을 두지는 않았다.

다시 시대가 내려오자 사람들은 사물의 구별을 의식하게끔 되었다. 그러나 아직 가치 관념은 생겨나지 않았다. 그러나 이윽고 가치 관념이 생겨나자 〈도〉(道)는 허물어지고 말았다. 〈도〉가 허물어짐과 동시에 인간의 집착심이 생기게 되었다.

그러나 과연 〈도〉에 이루어지고 허물어지는 성휴(成虧)의 구별이 있는 것일까.

금(琴)의 명수인 소문(昭文)의 연주를 생각해 보자. 소문의 연주는 분명히 묘한 가락을 이루고 있다. 그러나 묘한 가락들이 형성된 반면에, 그는 연주되지 않은 무수한 가락들을 잃게 되었다.

……

처음이 있으면 처음 이전의 시기가 있고, 또한 처음 이전의 시기 이전의 시기가 있게 된다. 유(有)가 있으면 그 이전에 무(無)가 있다. 무 이전에는 무가 없었던 상태가 있고, 또한 무가 없었던 상태 이전의 상태가 있게 된다.

……

일체의 모순과 대립을 초월한 〈도〉의 세계에 있어서는, 큰 것을 대표하는 태산도 짐승의 잔털보다 작으며, 8백 살을 살았다는 팽조(彭祖)도 어머니 뱃속에서 나오자마자 금방 죽어 버린 갓난아이보다 더 명이 짧다.

〈莊子〉 齊物論, 宋志英譯解 學園社

……

무릇 도란 처음부터 한계가 없으나, 말은 애당초 일정함이 없다. 말로써 도를 나타내려 함으로 한계를 두게 된다.』

도(道), 즉 진리는 본질상 무(無)·무한·무한정(無限定)인 것이다. 연주되지 않는 악기(琴)에는 이 무한의 음(音)이 갖추어져 있지만, 일단 악기에 손이 닿고 일정한 음이 일어나는 순간, 이미 그 '무한'에는 한정이 지어지고, 유한의 모습으로 나타난다. 이것은 무한이어야 할 '도'(道)를 해친 것이라 할 수 있다. 시인 陶淵明이 무현금(無弦琴)의 '소리'를 즐겼다는 것도, 이 무한의 '도'의 삼매경(三昧境)을 지상(至上)의 낙으로 삼았기 때문이다. 악기와 마찬가지로, 인간의 언어는 예를 들어 「이것이 진리이다」라고 하는 순간, 이미 진리성을 한정시키고 '유한화'(有限化)하고 만다. 따라서 이때는 이미 진리는 사라지고 없다. 이렇듯 인간의 언어는 절대무한인 것을 파악할 수 있도록 되어있지 않다. 인간의 언어로 파악한 것은 항상 유한이며 상대적이다. 로고스(=언어)에 대한 강한 불신감은 〈장자〉에서 다루어지는 주제의 하나이다.

이와는 대조적으로 그리스인의 무한만은 부정적이다. 이 태도는 그리스적 사고형식(思考形式)의 전형적인 표현으로 잘 알려진 헤시오도스(Hesiodos, B.C.700년쯤)의 〈神統記〉 속에 잘 나타나 있다.

원초(原初)에 '가오스'(Khaos)가 태어나고,

이어서 영구히 변함없는 자리인 '가이아'(Gaia, 大地)가,

그리고, 또 영생(永生)의 삶을 누리는 신중에서 유독 아름다운 '에로스'(Eros)가 태어났다.

'카오스'로부터 저승(幽冥)과 밤이 생겼다.

'가이아'는, 처음에 자신과 같은 크기의, 별들이 흩어져 밝힌 '우라노스'(Ouranos, 하늘)를 낳았다.

또, '가이아'는 높이 치솟는 산들을, 그리고 큰 파도가 밀리는 불모의 바다 '폰토스'(Pontos)를 낳았다.

……

여기서는, 우주 탄생의 근원적인 힘의 하나인 '카오스'는 그 자신 속에 '어둠'을 간직하고 있다. 이 때문에, 저승과 밤이라는 어둠은 이 '카오스'의 또 다른 모습인 것이다. 이 형체가 없는 죽음의 어둠을 지닌 '카오스'는 그 후에도 줄곧 존재해 왔다. 우주 생성의 제 1 단계인 무시간적(無時間的) 세계는, 형체가 없는 '카오스'와 형체를 갖춘 '가이아' 사이의 대립적인 긴장을 바탕으로 이루어진 것이다. 이 두 근원, '카오스'와 '가이아'는 서로 아무런 연관이 없다. 그러니까, 「최초에 '카오스'가 태어나고, 이어서 '가이아'가 생겼다」고 할 때, '가이아'가 '카오스'로부터 태어났음을 뜻하는 것은 아니다. 이 둘은 서로 다른 근원이며 정반대의 영역을 이룬다. 즉, 무형(無形)과 유형(有形), 밑없는 심연과 명확하고 확실한 경계, 막막한 죽음의 어둠과 별들이 규칙적으로 운행하는 밝은 영역, …등과 같이 대립을 이루지만, 서로 무관한 채 각각 통일적인 완전한 세계를 이룬다.

유한(유형)	무한(무형)
일(1)	다(多)
정지	운동
곧음	굽음
어둠	밝음
선(善)	악(惡)

(그리스인들이 생각하였던 대립개념)

중국인과 그리스인의 이러한 서로 전도(轉倒)된 무한관을 낳은 가장 중요한 배경으로 주목해야 할 것은, 두 민족의 자연관(自然觀)의 격차, 더 근원적으로는 흔히 '몬순적', '목장적'(牧場的)이라는 대조적인 말로 표현되는 두 지역의 풍토조건(風土條件)의 이질성에 대해서이다.

중국 고대문명의 발상지에는 티그리스, 유프라테스강의 '도전'과는 비교가 안 되는 가혹한 자연의 도전이 있었다. 황하유역의 주민들은 홍수의 괴로운 시련 뿐만 아니라 극심한 여름의 무더위와 겨울의 추위 사이를 계절적으로 변동하는 기온의 시련을 견디면서 습지와 덤불을 개척하지 않으면 안 되었다.

황토(黃土)라는 특수한 자연은 다른 농경문화의 발생지의 흙과는 판이하게 다른 여러가지 많은 혜택을 인간에게 베풀었다. 그러나 이 기름진 토양은 극히 변덕스럽게 찾아오는 비와 가뭄 때문에 그 쓰임새를 충분히 발휘하지 못했다. 적당한 비만 내리면 풍요하기 이를 데 없는 곡창이지만 그렇지 않으면 절망적인 기근을 이 지역에 몰아온다. 반대로, 거의 대부분 여름철에 집중적으로 내리는 비가 호우성(豪雨性)의 강우량을 나타내면 참혹한 홍수가 된다. 고대 이집트의 번영을 낳은 나일강에도 홍수는 있었다. 그러나 황하의 홍수는 이것과는 전혀 양상이 다르다. 나일강처럼 조용히 흙을 실어나르는 것이 아니라 무서운 파괴력을 가지고 모든 것을 거칠게 휩쓸어 버린다. 이 폭력적인 홍수는 나일강과는 달라서 관개(灌漑)에 이용할 수 있는 물이 아니다.

이러한 특이한 자연조건에 대한 비상한 관심을 이론화한 것이 중국인의 철학적인 자연해석(自然解釋), 즉 중국의 전통적인 자연학(自然學)이다. 중국계의 자연학에서는 끊임없이 삼라만상이 펼쳐지는 상황, 즉 '화생'(化生)의 조화(造化)작용을 기(氣)의 본질로서 원리적으로 규정한다.

『천지의 기(氣)가 서로 어울려서 비로소 만물이 형태를 이룬다.』

기상조건에 대한 관심이 중심을 이룬 이 자연학은 저 유명한 이기이원(理氣二元)의 인간학으로까지 발전한다. 형이상학적인 '이'(理)에 대해서 형이하(形而下)의 존재인 '기'(氣)는 자연계를 구성하는 일종의 기체이며, 이 기가 농축되면 형체를 갖게 되고 희박해지면 또다시 무형의 기가 된다. 이러한 기(氣)의 이론이 한마디로 기상학적인 지식을 바탕으로 삼은 것임은 말할 나위가 없다.

그리스반도, 그 중에서도 특히 옛 그리스 문화의 무대였던 에게해 연안은, 한편에서는 산맥의 변풍으로 서쪽이 가로막혀 있고, 또 다른 한편에서는 길쭉한 크레타섬에 의하여 남쪽 바다로부터 차단된 지역이다. 강우량은 이탤리의 반 쯤 정도밖에 안 되며, 따라서 공기는 이탤리 보다 한결 맑다. 우

기(雨期)인 겨울날에도 '해맑은 하늘, 빛나는 태양'은 여전하다. 그리스가 흔히 '대낮'이라는 표현으로 특징지어지고, 또 「그리스에는 그늘이 없다」고 일컬어지는 까닭은 공기에 습기가 없는 탓이다. 이 때문에 그리스에서는 구름・산・흙・바위 등의 색채가 아주 선명하게 나타난다. 바다물은 '투명'하기 이를 데 없으며, 숲이나 풀의 색깔도 온통 선명한 초록으로 덮혀 있다. '명랑'을 특징삼은 이탤리의 자연도 이 점에서는 그리스에 훨씬 미치지 못한다. 또 이곳에서는 바람이 약하게 분다는 것은 마치 식물학의 표본처럼 단정하게 규칙적으로 뻗은 나무들의 모양에서 곧 알 수 있다. 이러한 나무의 형태는 우리 동양인의 눈에는 '인공적'인 것으로 비친다. 게다가, 규칙정연한 모습들은 그 때문에 '합리적'이라는 느낌마저 준다. 그러나 여기서는 이것이 지극히 자연스러운 형태이며, 오히려 불규칙적인 모습이야말로 부자연스러운 것이다. 동양에서의 '인공적'='합리적'이라는 도식이 여기서는 '자연적'='합리적'으로 바뀌어진다. 이 점에서는 그리스 뿐만아니라 서 유럽 전체가 공통적이다.

자연이 '폭력,을 휘두르지 않는 곳에서는 자연은 합리적인 모습으로 나타나기 마련이다. 자연이 유순할수록, 자연은 '합리적'인 것이 된다. 이러한 자연 속에서 쉽게 규칙성을 찾을 수 있고, 이 '규칙'에 따라 자연을 대하면, 자연은 더욱 더 유순해 진다. 그러므로써 인간은 더욱 자연 속에서 규칙성을 찾게 되고, ……. 이러한 자연과 인간 사이의 상호작용이 유럽인의 철학과 과학의 배경에 깔려 있음을 잊어서는 안된다. 적어도 유럽의 자연과학이 바로 '목장적' 풍토의 산물이라는 것만은 아무도 부정 못한다.

거듭 말하자면, 그리스적 풍토(風土) 속에서는 '보이지 않는 것', '신비적인 것', '비합리적인 것'을 섬기는 심성은 가꾸어지지 않는다. 역으로 명랑한 자연으로부터 그리스인은, '본다'('idein')는 것을 배웠다. 그리스의 밝은 햇빛과 맑은 공기는 온갖 사물의 윤곽을 구석구석까지 뚜렷이 들추어 보인다. 이 때문에 그들은, 자연의 모습에 대해서는, '원경(遠景)・중경(中景)・근경(近景)'보다도 낱낱의 사물의 형태를 문제삼았다. 이렇게 해서, 그들은 사물을 보는 눈이 세련되어간 것이다.

그리스의 자연은 모든 것을 들추어 보이고 있으며, 아무것도 숨기지 않는다고 하였다. 이것은 자연 속에 보이는 것(=형태)이 그대로 그 실상(實相)이라는 생각을 낳는다 그래서, 그리스인들은 보이는 것(=형태)을 이상화시켜서 '형상'(形相)——'에이도스'(eidos)——이라고 불렀다. 실제로, '본다'(idein)라는 그리스어 동사에서 유래된 '에이도스'(eidos), 또는 '이데아'(idea)라는 낱말은, 본래는 '보이는 것'을 뜻하였지만, 나중에는 보이는 것의 '형태'='형상', '모습'을 뜻하게 되었다. 명확한 사물의 모습은 신비의 그들을 남기지 않을 뿐더러, 더 나가서는 모든 것이 확실히 들어나는 수학적인 단순함과 간결함을 일깨어 준다. 이토록 그리스의 자연은 '합리주의적'(合理主義的)이었다.

이쯤 이야기하면, 왜 그리스인이 온갖 존

재를 '형상'이나 '질서'로 생각하였는지 대강 짐작 할 수 있을 것이다. 그들이 온갖 삼라만상은 '형상'(=형태)에 의해서 한정지어지므로써 비로소 제 모습을 나타낼 수 있고, 알아 볼 수 있게 된다는 생각을 왜 갖게 되었는지를 말이다. 즉 무한은 '질료'(質料=소재(素材))에 지나지 않으며, 이 질료적(質料的)인 무한이 형상에 의해서 질서가 부여될 때, 사물은 진정한 존재가 될 수 있고, 따라서 세계는 '한계'('페라스'(peras)를 지니므로써 완전해지고 인간도 본질적으로 이러한 한정 속에서 존재한다는 것, 그리고 조화로운 것, 아름다운 것, 선한 것에는 늘 한계가 있으며, 따라서 무한은 이러한 한계를 벗어나는 것, 한계를 부정하는 반질서(反秩序)이자, 악(惡), 추(醜)이다 라는 사상을 그리스인들이 품게 되었는지를 짐작할 수 있을 것이다.

결론적으로 다음과 같이 말할 수 있다. 그리스의 '유순한' 풍토가 규칙성·합리성에 바탕을 둔 유한적인 질서세계(秩序世界) 즉, '코스모스'의 관념을 낳은 반면에 동양(중국이나 한국)의 은혜적(恩惠的)이면서 '위협적'인 풍토는 사람들로 하여금 자연을 외경(畏敬)하는 태도를 길렀고, 더 나가서는 인간이 감히 넘볼 수 없는 오묘한 본체(本體)를 간직하는 무한세계를 근원적인 것으로 섬기도록 하였다.

1. 無限이 지닌 問題性

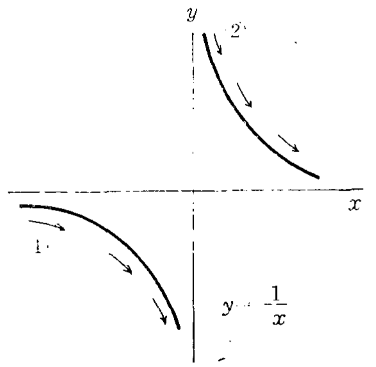
여기서 다음과 같은 의문이 제기될 수 있다. '無限'에 대해서 긍정적인 태도를 지닌 동양세계에서는 원초적인 발상만이 있고, 그 후에는 無限論이 전개되는 일이 없었고, 오히려, '無限'을 배척 내지는 회피하였던 그리스의 知性에서 출발한 유럽의 精神史속에서, 無限論의 系譜가 줄곧 이어지고 마침내는 現代數學의 기본사상으로까지 굳혀지게 되었는가 하는 의문이 그것이다. 그러나, 사실은 동양인의 無限의 '긍정'이 無限에 대한 소극적·수동적자세 였던데 비해, 無限을 의식적으로 피했던 그리스인의 심성은 그만큼 無限에 대해 적극적인 입장을 나타낸 것이였으며, 바꿔 말해 그들의 '有限主義'는 나중에 전개될 '無限主義'를 이미 내포하고 있었다고 보아야 한다.

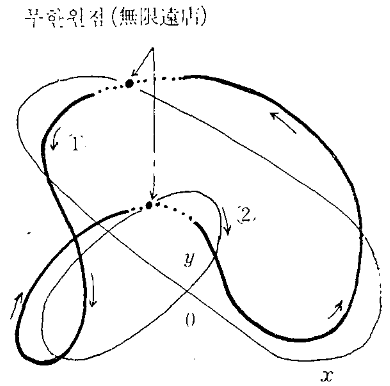
따라서, 本論에서 다루어질 無限論의 무대는 유럽에 한정될 수 밖에 없다.

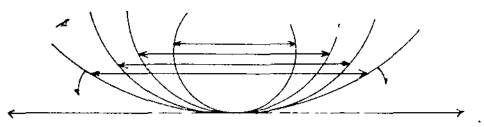
無限의 문제는, 고등학교 수학교재의 여러 곳에 고개를 내밀고 있다. 그 한 예로, $y=\frac{1}{x}$의 그래프가 있다. 이 역함수의 그래프인 곡선의 끝 쪽에 가로 놓인 '무한의 세계'가 바로 문제인 것이다. 이에 대해 다음과 같은 '해석'을 내릴 수도 있을 것이다.

『x를 마이너스 쪽으로부터 0에 접근시키면, 곡선은 아래쪽으로 한없이 멀어져 가고 …그런데, x가 0을 넘어선 순간에 곡선은 뒷쪽에 있는 무한히 먼 곳으로부터 다시 모습을 나타내고 가까이 다가온다. 이것은 곡선이 무한의 저 편에서 이어져 있기 때문이 아닐까?』하고 말이다.

이러한 생각은 결코 무의미한 것은 아니다. 아니, 이러한 생각을 수학 속에 적극적으로 반영시키므로써 사영기하학(射影幾何學)이 이루어진 것이다. 이와 비슷한 발상







은 이미 중세의 신학자 Nicolaus Cusanus (1401~1464년)의 사상속에서도 볼 수 있다. 원을 계속 확대하면 무한히 큰 원이 된다. 무한한 원에서는 弧의 길이와 弦의 길이는 일치한다. 그 결과,

『무한히 큰 원은 무한한 직선이 된다』는 것이 그의 생각이였다. 마찬가지로 삼각형은 직선과 일치한다. 그것은 다음과 같은 이유에서이다. 삼각형의 안각의 합은 2직각이다. 그 안각의 하나를 차츰 크게 하면 좀차로 밑변에 접근하고, 그것이 무한히 접근한 끝에 크기가 직각으로 될 때, 삼각형이 직선과 합쳐지기 때문이다. (이에 관해서는 뒤에서 다시 언급하겠다)

현대인은 무한에 대해서는 감각적으로 익숙해져 있기 때문에 '무한의 우주공간'과 같은 표현을 들어도 별로 놀라지 않는다. 어린이용의 텔래비 만화에도 한없이 별의 바다 속을 헤쳐 가는 우주선이 등장하는 것이 보통인 요즘 세상이다. 이처럼 '무한공간'에 일상적으로 젖어있는 감각으로도

0.3333…

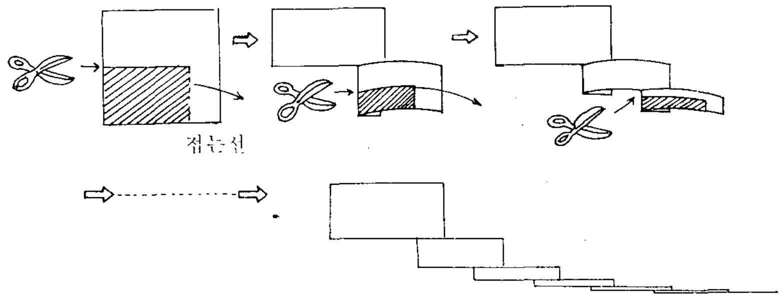
이라는 무한소수는 「아무리 자리수가 늘어나도 $\frac{1}{3}$은 되지 않는다」라는 '미신'을 고집하는 경우가 많다. 이 때문에,

$0.3333\cdots=\frac{1}{3}$

이라고 하면, 도저히 믿을 수 없다는 표정을 짓기 마련이다. 하물며, 이 식의 양변을 3배한 다음 식은, 무언가 잘못된 데가 있다고 생각하기 쉽다.

$0.9999\cdots=1$

무한대의 반대인 무한히 작은 극미(極微)의 세계에도 불가사의한 대목이 있다. 그 예로 다음과 같은 경우를 생각해 보자. 다음과 같이 색종이를 반으로 자르다 말고 접고, 또 그 반으로 자르다가 접고, …하면, 언제나 $\frac{1}{2}$이 남기 때문에 가위질은 한없이 되풀이 되어 끝이 나지 않는다. 그러나 실제로든 아무리 날카로운 면도칼을 써도 기껏 10번쯤 자르면, 그 이상은 벨 수 없게 된다. 특별히 고안한 고성능의 칼로 계속 자른다 하여도 마침내는 현미경으로 볼 수



없는 소립자(素粒子)의 상태에서는 멈출 수 밖에 없다. 그래도 '자르는' 작업을 계속한다면, 이미 물리적 세계를 넘어선 '상상'의 세계——엄격한 표현을 쓰면 '사유'(思惟)의 세계——에 들어서게 된다.

이처럼, '무한'이라는 개념은 극히 풀기 어려운 문제를 안고 있다. 논리성(論理性)을 어느 누구 보다도 날카롭게 추구하였던 고대 그리스인들은 무한 속에 깃든 모순을 예민하게 알아차리고, 그 위험에 빠지는 것을 조심스럽게 피하였던 것이다. 고대 그리스의 수학에서 '수'란, 유리수였으며, 이른바 '무리수'는 수로서 다루어지지 안했었던 것은 그래서 이다. 무리수로 나타낼 수 밖에 없는 양(量)은 수가 아닌 '길이의 비'로서 나타내어진 것이다. 고대 그리스인이 무리수를 다루지 안했던 것은, 그만큼 수학의 수준이 낮았던 탓이라기 보다, 지나치게 논리적으로 따져드는 그들이였기에 무리수 개념에 포함된 '극한' 개념에 극도로 신중할 수밖에 없었던 탓이라고 해야 옳다.

그리스의 철학자나 수학자들이 무한의 문제에 대해 비상한 관심을 나타냈었다는 것을 보여주는 예로, Zēnon(B.C. 490쯤~429년쯤)이 날카로운 변증법(辯證法)을 써서 무한의 '허구'(虛構)를 찌른 'Achiles와 거북의 문제'가 있다. 이것은, 물질이나 공간에는 그 이상 변할 할 수 없는 미립자(微粒子)가 존재한다는 원자론(原子論)에 대한 반론이였다고도 말할 수 있다.

다름질의 명수 Achiles와 느림보 거북이가 달리기 시합을 한다고 하자. 아킬레스보다 10m 앞의 지점을 거북이의 출발점으로 삼아 동시에 출발하기로 할 때, 아킬레스가 거북이 보다 10배 빠르면 단숨에 아킬레스는 거북이를 앞지르고 말 것이 틀림없다. 그러나, 아킬레스는 거북이를 따라 잡기 전에, 우선 거북의 최초의 위치 P_1을 통과해야 한다. 거북의 속도가 0이 아니라고 하면, 아킬레스가 얼마쯤 달리는 동안에 거북이도 짧은 거리나마 얼마쯤 앞으로 나가고 있다. 이런 식으로 거북이가 통과하는

$P_1, P_2, P_3, \cdots$

라는 지점이 정해진다. 아킬레스도 거북이를 따라 잡을 때까지 이 점들을 모두 통과해야 한다. 그러나, 이들 지점이 미립자라고 한다면, 무한개의 미립자를 통과하는데 무한의 거리를 달려야 하고, 그러기 위해서는 무한의 시간이 소비된다. 그래서 결국, 아킬레스는 거북이를 따라 잡을 수 없게 된다. 요컨데, 제논이 주장하고자 하는 것은 『출발점으로부터 거북이를 만나게 될 때

까지의 거리와 같은 유한의 구간이 무한개의 부분을 포함할 수 없다』

라는 것이다.

거북이의 10배의 속도로 달리는 아킬레스가 거북이를 따라 잡을 때까지 달린 거리는

$$10+1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\cdots(\mathrm{m})$$이다.

이 무한급수의 합은 $11\frac{1}{9}$이다.

그러나 이 사실을 확인 한다 하여도 문제가 끝난 것은 아니다. 그것은 위의 무한의 계열(=무한급수)이 실제로도 원리상으로도 종결되지 않는다는 심리에서 이 파라독스가 출발하고 있기 때문이다.

제논의 파라독스는 철학자들만을 괴롭힌 것은 아니다. 시인 P. Valéry(1871~1945년)는 이 파라독스가 무한에 관한 인간의 논리적 사고 그 자체의 한계를 보여준 것으로 생각하고 있다. 아름답기로 이름난 저 〈해변의 묘시〉라는 시 속에서, 그는 무한의 역리(逆理)를 제논과 연관시켜 이렇게 노래하고 있다.

제논이요, 가혹한 변증으로 나를 괴롭히는 엘레아파(派)의 제논이요,
그대는 날개 돋힌 화살로 나를 쏘았다,
시윗 소리를 올리며, 날면서 날지않는 화살로 나를 쏜 것이다.
화살의 시윗 소리는 나를 낳았으며, 또 나를 죽인 것이다.
아아, 태양은, …정말 영혼에게는
거북이의 그림자인가, 저 역주(力走)하는 부동(不動)의 아킬레스는.

위의 시귀 속의 '날면서 날지 않는 화살'은 제논이 제시한 역리(逆理) 중의 '날으는 화살'(제 3의 역리)의 내용에 관한 것이다. 이 역리를 아리스토텔레스는 다음과 같이 설명하고 있다.

『모든 것은 운동하고 있거나 정지하고 있거나 하는데 운동하는 것은 항상 지금이라는 시간에 존재하고 있다. 따라서 날으는 화살은 정지하고 있다』

즉 '날으는 화살'의 역리에서는 운동──또는, 시간·공간──에는 분할불능인 마지막 요소가 있다고 할 때 '운동'으로부터 어떤 모순이 나타나는가에 대해서 말하고 있는 것이다. (여기서는, '아킬레스와 거북이'의 역리와는 달리, 운동(=시간·공간)의 무한분할(無限分割)의 문제 그 자체에 관해서가 아니라, 분할을 무한히 계속한다는 뜻으로서의 '연속론'(連續論)과 분할불능인 최종원소가 있다는 뜻으로서의 '원자론'(原子論)의 대비(對比)가 중심이 되어있다.)

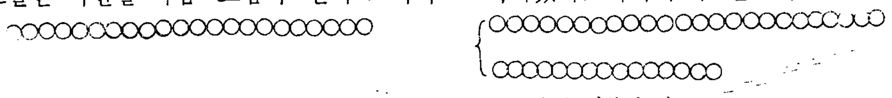
요컨데, 제논의 역리가 문제 삼는 것은, 실제로는 여러가지 구체적 제한이 있는 현실세계가 아니라, 이념적(理念的)인 사유(思惟)의 세계에서의(시공적(時空的)) 연속체(連續體)에 있어서의 연속적 위치이동에 관해서였다.

2. 無限의 出現

'무한'의 기괴한 모습을 처음으로 넘보았던 것은 아마도 피타고라스와 그 제자들이였을 것이다. 그러니까 지금으로부터 2,500년 쯤의 옛날에, 무한은 이미 그 모습을 들어내기 시작한 셈이다. 이 무한의 발견은 얄궂게도 그들이 무한을 배제한 유한의 우주상(宇宙像)을 이루어 놓으려다가 빚어진

결과였다.

그들은 직선을 다음 그림과 같이 크기가 있는 작은 입자형의 점으로 되어있다고 생각하였다. 따라서 두 선분의 비는



피타고라스(학파)가 생각한 선분

정수 : 정수

의 꼴의 나타내어져야만 하였다. 그러니까, 그들의 우주는 정수의 자(尺)로 재어지는 세계였다. 그들의 '유한적 세계,에 큰 파문을 던진 것은, 분수꼴로 나타낼 수 없는 비통약량(非通約量)의 발견이였다. 그리스에서는 최대공약수를 구하는 방법인 호제법(互除法)이 일적부터 알려저 있었다. 이 호제법은 (정수) : (정수)의 경우에는 유한번의 횟수로 끝난다. 예를 들어,

7973 : 2380

이면,

$$2380\overline{)7973}^{\,3},\quad 7973-7140=833$$

$$833\overline{)2380}^{\,2},\quad 2380-1666=714$$

$$714\overline{)833}^{\,1},\quad 833-714=119$$

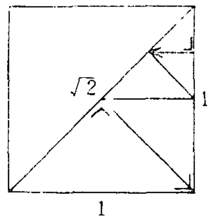
$$119\overline{)714}^{\,6},\quad 714-714=0$$

와 같이 네번의 호제법으로 나머지는 0이 된다.

그러나, 오른쪽 그림과 같이, 정사각형의 한 변과 대각선의 길이의 비

$\sqrt{2}:1$

은 호제법을 쓰면



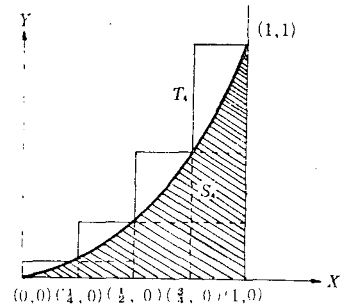
$$\frac{\sqrt{2}}{1}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}$$

와 같이, 한없이 계산이 이어진다. 여기에는, 한계가 없다는 뜻으로서의 무한이 그 모습을 비추어 보이고 있다.

두 개의 선분의 길이의 비가 유한번의 호제법으로는 끝낼 수 없을 때, 이 두 길이는 비통약적(非通約的)이라고 한다. 비통약적인 비(比)값을 현제 우리는 무리수(無理數)라는 말로 표현한다. 유리수(有理數)의 '유리'를 나타내는 'rational'은 '합리적', 그리고 무리수(無理數)의 무리를 뜻하는 'irrational'은 '비합리적'이라는 뜻도 있다. 그리스인에게는 유한적인 것이 합리적이고, 무한적인 것이 비합리적이였음을 생각한다면, 유리수·무리수를 이렇게 부른 것은 지극히 당연했다,

면적이나 체적의 계산문제와 관련해서 실제로 '무한'이 그리스수학에서 다루어진 예를 Archimedes(B. C. 287?~212)에게서 볼 수 있다.

아래 그림과 같이, 포물선 $y=x^2$과 두 선



본 [(0,0), (1,0)], [(1,0), (1,1)]에 의해서 둘러싸인 도형부분을 아트키메데스는 다음과 같이 셈하였다. 이 그림에서 외접다각형 T_4의 면적은

$$T_4=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{2}{4}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{4}{4}\right)^2$$

이고 내접다각형의 면적 S_4는

$$S_4=\frac{1}{4}\cdot 0^2+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{2}{4}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2$$

이다.

일반적으로, 외접다각형 T_n과 내접다각형 S_n의 넓이는, 각각

$$T_n=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2$$

$$S_n=\frac{1}{n}\left(\frac{0}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$$

과 같다. 따라서,

$$T_n-S_n=\frac{1}{n}. \qquad \cdots\cdots(1)$$

이것으로부터, 외접다각형의 면적 T_n과 내접다각형 S_n의 차는, n을 충분히 크게 하면 얼마든지 작아진다는 것을 알 수 있다. 그런데,

$$T_n=\frac{1}{n^3}(1^2+2^2+\cdots+n^2)$$
$$\cdots\cdots(2)$$
$$S_n=\frac{1}{n^3}\{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2\}$$

또,

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

따라서,

$$T_n=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3n}+\frac{1}{6n}+\frac{1}{6n^2}\right)$$

$$S_n=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{3n}+\frac{1}{6n}-\frac{1}{6n^2}\right) \qquad \cdots\cdots(3)$$

$6n<6n^2$이므로, 모든 n에 대하여

$$S_n<\frac{1}{3},\ T_n>\frac{1}{3},$$

즉,

$$S_n<\frac{1}{3}<T_n$$

그러므로, 구하는 도형의 면적은 $\frac{1}{3}$임을 알 수 있다. 이와 같이, 아르키메데스는 무한소를 매개로 삼고 계산하므로써 일정한 유한값에 도달할 수 있었다. 그리스가 3대난문(三大難問)의 하나인 '원과 같은 넓이를 갖는 정사각형'의 작도문제에 대해 수학자들이 그토록 열을 올렸던 것은 무한을 다룬 이 문제의 답이 $\frac{1}{3}$이라는 유리수로 나타난다는 사실과도 깊은 연관이 있었다.

그리스수학의 발 자취를 자세히 살펴보면 저 3대난문——'원과 같은 넓이를 갖는 정4각형', '임의의 각의 3등분', '입방체의 배의 넓이를 갖는 또 다른 입방체'의 작도——이 단적으로 말해 주듯, 무한의 문제가 수학의 가장 본질적인 문제였으며, 아무리 무한을 외면하고 유한만의 세계를 이룩해 보려고 애써도 어디엔가에 반드시 무한이 고개를 내밀고 있음을 볼 수 있다. 그러나 앞의 보기에서 알 수 있는 바와 같이 아르키메데스에 이르러서는 무한을 적극적으로 대하게 되었고, 무한소를 자유로이 다루므로써 17세기의 미적분학의 수준에까지 거의 접근할 수 있었다. 만일 그가 함수(函數)의 개념을 가졌었더라면, 미적분학 발견의 명예는 뉴튼이나 라이프니쯔가 아니고, 이들

보다 2천년이나 앞서 Archimedes 자신에게 돌아갔을 것이다.

그러나, 아르키메데스에게는 그의 연구를 이어받는 후계자가 없었다. 유럽의 수학은, 그 이후 줄곧 유한의 세계에 머문채 였다. 중세의 세계관이 그랬었다. 갈릴레이가 망원경으로 무한의 우주를 비출 때까지 우주는 공간적으로 유한하였고, 시간적으로도 천년으로 세상의 끝이 온다고 믿어졌었다. 이러한 중세적 세계관이 수학을 이토록 오랫동안 유한의 세계에 가두어 두었었다고도 할 수 있다.

3. 現實的無限과 可能的無限

무한을 두 종류로 구별한 것은 Aristoteles가 처음이였다. 앞에서도 잠깐 이야기 하였지만, 그는 무한이란 '완성된 형태로 존재하는 것', 즉 '현실적인 형태로 존재하는 것'이 아니라 '가능적(可能的)·잠제적으로 존재하는 것'이라고 주장하였다. 그는, 전자, 즉 완성된 형태인 무한을 '현실적무한'이라고 불렀다. 신의 무한성 같은 것은 그 예이다. 그리고 즉, 어디까지 가도 끝나지 않는——완성되지 않는!——무한을 '가능적 무한'으로 나누었다(명칭상의 구별은 중세 스콜라철학시대의 일이지만).

Aristoteles가 생각한 무한, 즉 가능적무한은 자연수열 1, 2, 3, … 에서와 같이 부분적으로만 현실화(現實化)되어 있는 무한이다. 즉, 이 무한은 한없이 '더할 수 있는' 가능성 또는 한없이 '나눌 수 있는' 가능성에 의해 뒷받침 되는 무한이다. 항상 '그보다 앞의 것'이 존재한다는 뜻으로 '잠재적'으로, '가능적'으로 무한인 것이다. 그러나 공간적인 양(量)으로서는, 최대자(最大者)——즉, 우주——가 있기 때문에 무한대(無限大)라는 것은 존재하지 않는다. 반대로 양(量)은 무한히 분할이 가능하므로 최소량(最小量)은 존재하지 않는다. 즉, 무한소(無限小)가 존재한다. 한편, 수(數)에는 최소의 수 1이 존재하지만, 최대의 수는 존재하지 않는다(즉, 무한대의 수가 존재한다). 어쨌든. 이들 '무한'은 '현실적'으로 무한인 것이 아니고, 단지 잠재적·가능적으로만 무한일 뿐이다. 이상이, 아리스토텔레스가 〈자연학〉 속에서 다룬 '무한'의 내용이다.

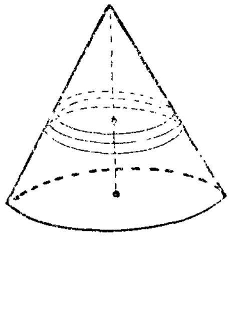
요컨데, 아리스토텔레스가 생각한 무한은 극한(極限)이나 '초한순서수'(超限順序數)——이에 대해서는 뒤에서 설명하겠다——등과 같이, 무한의 과정을 통과해서 존재하는 어떤 '전체적인 것'은 아니였다. 그에게 있어서 무한이란 '있는' 것이 아니라 '이루어져 가는'(=생성(生成)되는) 것이었다.

Aristoteles의 "Physica"는 운동의 문제를 중요한 내용으로 삼고 있는데, 그는 여기서 가능적무한을 구별하므로써 이 문제를 해결하려고 하였다. '무한가분성'(無限可分性, infinite divisibility)의 문제란 무한히 분할할 수 있는지, 또는 최후에는 그 이상 분할할 수 없는 '불가분자'(不可分子, indivisible)에 도달하는지 어떤지의 문제이다. 여기서, 불가분자란, 원자(原子)를 염두에 두고 있음은 말 할 나위가 없다. 운동가능성(運動可能性)과 무한가분성(無限可分性)은

논리적으로 밀접한 연관이 있다.

아리스토텔레스는 데모크리토스의 원자론(原子論)——즉, 불가분자(不可分子)의 존재을 부정하였으나, 그것은 그가 가능적무한(可能的無限)을 생각하였기 때문이다. 즉 현실적으로는 무한히 작은 불가분자라는 것은 존재할 수 없고, 오직 분할의 가능성이 있을 뿐이라고 그는 생각하였던 것이다. 여기에는, 이미 근대수학에 있어서의 가장 중요한 과제인 연속체(連續體)의 문제가 제기되어 있다. 연속체는 직관적으로는 너무도 분명하지만 이것을 논리적으로 정의하기는 극히 힘든 일이다. 아리스토텔레스는 이 연속체의 특징을 무한가분성이라는 관점에서 파악하였으나 그의 이러한 견해가 연속체에 관한 충분한 정의가 아니라는 것이 뚜렷이 인식된 것은 19세기에 들어서면서부터이다. 바꾸어 말하면, 그만큼 오렌 세월에 걸처, 연속체의 특징이 무한가분성으로 간주되어 왔던 것이다.

Aristoteles가 무한가분성, 즉 가능적무한을 내세운 중요한 이유는, 수학적인 '원자'를 가정하는 경우, 여러가지로 논리적인 모순이 빚어지기 때문이였다. 예를 들어 그리스시대에 널리 알려진 '데모크리토스의 파라독스'라는 다음과 같은 문제가 있다. 아래 그림에서와 같이 원뿔을 밑면에 평행한 평면으로 자른 절단 부분을 생각해 보면 원뿔은 절단 부분을 모두 합친 것이 된다. 이때, 서로 이웃한 두 개의 절단부분은 같다고도 할 수 있고, 같지 않다고도 할 수 있다. 같지 않다고 하면, 원뿔에는 '단계'가 있는 셈이 된다. 또 같다고 하면 원뿔은 원기둥이 된다.



이 밖에도 비슷한 모순은 얼마든지 생각해 낼 수 있다. 하기야, '무한히 작은 상태로 존재하는' 무한소(無限小)라는 개념부터가 모순적이다. 그것은 존재하는 이상, 일정한 크기를 지녀야 하고, 일정한 크기를 지닌다면 무한소가 아니고 유한(有限)이 되기 때문이다. 그러나, 이처럼 불가분자(不可分子)나 무한소의 개념은 모순을 내포하고 있음에도 불구하고 수학에서는 아주 쓰임세가 많다. 실제로 고대 그리스의 수학에서 이 개념이 쓰인 것은 방금 보기로 든 원뿔의 불가분자로서 절단면을 생각한 것처럼 도형의 체적이나 면적 계산에 크게 도움이 되기 때문이다. 데모크리토스 이래, 무한소 또는 원자의 개념이 줄곧 다루어져 온 이유는 바로 여기에 있었다.

이 무한소의 개념은 앞서의 아리스토텔레스에 의한 두 개의 '무한' 중에서 현실적무한(現實的無限)에 해당한다. 완성된 형태로 현실적으로 존재하는 것으로 생각할 수 있기 때문이다. 그러나, 이미 몇 차례 이야기한 바와 같이 아리스토텔레스 자신은, 이러한 현실적무한을 부정하고 가능적무한(可能的無限)만을 인정하였다. 무한소(無限小)이건 무한대(無限大)이건, 언제나 그 '앞'이고, 부정(不定)——즉, 불확정(不確定)——

인 것이 무한이어서, 완성된 것은 무한이 아니기 때문이라는 것이다. 이아리스토텔레스의 무한론(無限論)은 그리스 철학에서의 가장 대표적인 무한론이다. 앞에서 보기로 든 제논의 파라독스——'아킬레스와 거북이의 문제——는, 현실적무한을 허용하는 수학에서는 성립하지 않는다.

'Archimedes의 공리', 즉,

『두 개의 양(量) a, b 사이에 $a<b$인 관계가 있을 때,

$$na>b, \text{ 또는 } a>\frac{b}{n}$$

를 만족하는 자연수 n이 존재한다』

라는 명제는, 무한분할가능성(無限分割可能性)에 관한 또 다른 표현이다. 아리스토텔레스는, 연속체의 특징을 무한분할가능성이라는 개념과 연관지었다고 앞에서 말한 바가 있으나, 아르키메데스의 공리는 이것을 수학적으로 표현한 것이라 할 수 있다.

4. 神學과 數學-現實的 無限의 paradox—

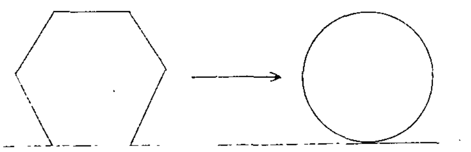
중세(中世)는 흔히 수학의 암흑시대로 일컬어진다. 그러나, 사실은 반드시 그렇지는 안했으며, 오히려 여러가지 면에서 근대수학을 탄생시키는 선구적인 역할을 한 것이 중세였다고 할 수 있다. 이 준비작업은 특히 철학적·사상적 측면에서 무한의 문제와 관련해서 이루어졌다. 바로 이 점에서 중세는 고대의 수학과는 전혀 다른 근대수학 탄생의 준비단계로서의 역할을 다한 것이다.

처음에는 중세의 그리스트교적 세계관에서도 동양의 불교적 세계관에서와 같이 이 우주는 유한의 크기를 가지고 있으며, 그 속에서는 하늘은 윗쪽에 땅은 아래쪽에 자리잡고, 일정한 계층적질서(階層的秩序)를 이룬다고 생각되어 있었다. 유한의 우주 속에서는 위는 신(神), 아래로는 인간이나 동물에 이르기까지, 또는 하늘에 떠 있는 태양·달·별들로부터 땅 위의 온갖 것들에 이르기까지, 저마다 그 가치에 따라서 차지할 자리가 정해져 있었다. 역으로 말한다면 우주의 각 자리마다 고유의 성질이 있으며, 또 그 곳에 알맞는 것들이 정해져 있었다. 이 '장소(위치)의 논리'는 우주의 유한성(有限性)으로부터 이끌어진다. 즉, 우주가 유한이면 그 속에는 '중심'과 '끝'이 있는 것이 당연하고, 또 이러한 우주는 일정한 형태를 지니고 있기 때문에, '위와 아래', '우(右)와 좌'가 정해진다. …는 등 말이다

'완성된 형태로서의 무한' 즉, 현실적무한이 사람들의 관심을 끈 것은 중세 말기부터서이다. 그리스시대의 무한은 가능적인 형태로서만이 학문적 의미를 지녔으나, 중세에는 신학(神學)의 영향 때문에 현실적무한에 주목하게 된 것이다. 이 현실적무한을 문제로 삼을 때, 곧 부딪히게 되는 문제는 그 모순적 성격이다. 가능적무한에서는 늘 '앞'이 있고 줄곧 진행이 있을 뿐이므로 거기에는 모순은 나타나지 않는다. 그러나 현실적무한에는 언제나 모순이 따른다. 앞에서 말했듯이 일종의 현실적무한인 무한소(無限小)는 모순을 지닌 개념이다.

근대수학은 운동의 수학으로서 현실적무한을 필요로 하였으며, 따라서 이 역설적(逆說的)인 현실적무한을 어떻게 해야 할러

적으로 다룰 수 있는가를 중심과제로 삼게 되었다. 현실적무한에 필연적으로 따를 수 밖에 없는 이 역설적인 성격을 처음으로 체계적으로 다룬 사람은 앞에서 잠깐 소개한 독일 태생의 카톨릭교 추기경 Cusanus였다. 그 무한사상은 '반대의 일치'라는 명제로 유명하다. 신은 최대자(最大者)임과 동시에 최소자(最小者)이며, 최대자와 최소자의 통일이다 라는 사상이 그것이다. 예를 들어, 정 4 각형과 원은 서로 대립하는 도형이며, 서로 일치할 수는 없다. 지금, 정 4 각형의 변 수를 차례로 늘이게 하여, 정 5 각형, 정 6 각형, …, 정 n 각형을 만들어도, 이러한 다각형은 원과는 결코 일치하지 않는다. 그러나, 변의 수를 무한이 많이 늘어나게 하면, 다각형과 원은 일치하게 된다. 즉, 무한의 세계에서는 다각형과 원은 일치한다.



Cusanus는 절대자(=신)를, 무한의 길이를 가진 구로 나타내었다. 그렇다면, 무한의 반지름을 가진 구란 어떤 것인가, 또 중심은 어디에 있는 것일까? 이 '구'의 지름은 무한이기 때문에, 공간상의 임의의 점이 중심이 된다. 무한인 구에 대해서는, 두 점 사이의 유한의 거리는 무시할 수 있기 때문이다. 중심이 모든 곳에 있기 때문에, 지름도 모든 곳에 있다. 또, 구면상의 점은 공간 속에 있는 점이기 때문에 중심과 일치한다. 그래서, 중심·지름·구면 등은 동일한 것이 되고, 더 나가서는「중심이 구 자체와 일치한다!」……. 그가 펼쳐낸 이러한 역설적(逆說的)인 세계는, 그리스의 '유한주의'(有限主義)적인 세계관과는 너무도 동떨어져 있다. 이 차이는 결국, 대담하게 무한을 가정하고, 현실적무한에 관해서 꺼림낌없이 따져드는지 아닌지의 차이에서 비롯된다.

원과 직선 사이의 '대립'을 해소시키는 도형의 무한성에 의하여 Cusanus는 신의 무한성을 비유적으로 표현하고 있다. 즉, 수학에 있어서의(다각형과 원, 원의 지름과 원주, 호와 현의 관계 등) 무한의 접근은 무한의 신성(神性)을 유한적인 사물로부터 인식하게 되는 과정을 상징한다고 그는 본 것이다. 크자누스의 말을 직접 들어보자.

『인간의 지식 가운데서 수학적 지식만큼 확실한 것은 없다. …이 유일하게 정확한 인식인 수학적인식(數學的認識)을 통하여, 정신은 자기자신과 자신의 능력을 인식한다 그리고, 이 정신 속에서만이 신(=신성(神性)은 스스로를 들어낸다.』*

Cusanus의 이 '무한의 논리'는,

「전체는 부분과 같다」

「최대와 최소는 일치한다」

「원은 직선이다」

「원은 삼각형이다」

……

등의 '반대(개념)의 일체'가 성립하는 역설적(逆說的)인 논리학이다. 뒤집어 말하면, 유한의 세계에서 길들여진 감각으로는 역설

* N. Cusanus, "De docta ignorantia" (1440育)

적으로 받아들여진 것이 바로 무한의 본질인 것이다. 무한과 유한은 직접으로 비교할 수 없다는 것, 무한은 유한의 연장이 아니라는 것을 깨달았던 Cusanus는 이 점에서 확실히 무한을 인식하는 첫 관문을 통과한 셈이다. 유한량(有限量)에서는, 아무리 큰 것일지라도 그 보다 더 큰 것이 항상 있으며, 마찬가지로, 아무리 작은 것에 대해서도 항상 그보다 더 작은 것이 있을 수 있다. 이에 비해서, 보다 큰 것이 존재하지 않을 때 무한대를 마찬가지로 보다 작은 것이 있을 수 없을 때 무한소를 생각할 수 있는 것이다. 이 뜻으로 유한과 무한 사이는 '단절되어 있으며, 따라서 이 둘을 비교할 수 없는 것이다.

Cusanus의 무한론은 신학(神學)상의 문제가 주제를 이루고 있었다. 즉, '무한자'(無限者)로서의 신(神)에 대해서는 보다 큰 것도, 보다 작은 것도 있을 수 없기 때문에, 신은 무한대이자 동시에 무한소이다. 이 뜻으로 무한자인 신은 '반대의 일치', '대립의 일치', 즉 모든 대립을 넘어선 존재이며, 따라서 신을 인식한다는 것은 '무지(無知)의 지(知)'——무지를 통해서 얻은 앎(知)——이라는 것이었다.

흔히, 유럽의 문화는 그리스 이래의 합리적정신과 그리스트교의 윤리관(倫理觀)에 의해서 이루어졌다고 한다. 이것을 'Hellenism(그리스문화)과 Hebraism(그리스트교의 정신)을 두 기둥으로 삼는 문화'라고도 바꾸어 표현하기도 한다. 실제로, 그리스적인 사고의 특징인 '유한주의'가 고대 말기로부터 중세, 그리고 근대에 이르는 과정에서 크게 변질하는 것은 Hebraism과의 복잡한 융합의 결과이기도 하였다. 신의 문제는 물론 그리스사상에서도 찾을 수 있지만, 그들이 관심있게 다룬 주제(主題)는 늘 코스모스(우주)에 관해서였다. 그러나 고대 말기 이후, 사색의 중심은 신의 문제로 바뀌어졌다. 이에 따라 신과 그 피창조물인 세계와의 관계에 대해서도 주목하게 되었다. 그 결과, 신=무한, 세계=유한이라는 도식(圖式)의 중세 말까지의 유럽을 지배하였다 이것은, 해브라이즘의 중심적인 사상인 '세계창조'(='무로 부터의 창조'(creatio ex nihilo)와 관련해서 초월적인 신의 관념이 사람들의 마음속에 확고하게 뿌리를 내리게 된 결과이기도 하였다.

신의 속성인 무한에는 '전지(全知)', '전능'(全能)과 같은 정신적인 완전함과 관련이 있는 '질적'(質的)인 무한의 뜻이 다분히 품겨져 있지만, 창조설이 말해 주듯, 시간적·공간적으로도 관계가 있는 '양적'(量的)인 무한이 포함되어 있다. 이 초월자인 신의 무한성(無限性)은, '최대의 교부'(敎父)'로 일컬어지다 Augustinus(354~430년) 이후에는 의심의 여지가 없는 것으로 받아들여지게 되었다.

5. 스콜라哲學과 無限論

그리스정신과 그 후의 서구정신(西歐精神)의 차이는 고대와 근대의 무한개념에 잘 나타나 있다. 그리스인들의 엄숙한 도덕적 계율은 「그대 자신을 알라!」였다. 이것은 인간이 스스로의 유한성·한계성을 깨닫고 오

만을 부리지 말 것을 경고한 말이다. 그리스인들의 덕(德)은 중용(中庸)에 있었으며, 그들은 언제 어디서나 극단적인 것을 거부한다. 이미 이야기한 바와 같이 플라톤, 아리스토텔레스가 선(善)이란 항상 질서를 유지하고 한계를 지녀야 한다고 주장한 것은, 그 대표적인 예이다. 물론, 미(美)도 조화와 균형을 그 바탕으로 삼는다. 즉, 그들은 무릇 선(善)한 것, 아름다운 것일수록 한계를 지녀야 한다는 '유한주의'(有限主義)의 입장을 철저히 지켰다. 이와는 반대로 무한은 한계가 없는 것, 질서를 갖추지 못한 것 중용을 지키지 않는 것이며, 따라서, 추악한 것으로서 마땅히 배척당해야 할 대상이었다.

이러한 무한에 대한 입장의 전환, 즉, 새로운 무한관(無限觀)이 성립하게 된 배경에는, 그리스트교의 사상이 있었음은 말할 나위가 없다. 무한이 유한 이상이라는 것, 존재적(存在的)으로나 가치적(價値的)으로나 유한 이상인 것으로 간주되는 그리스트교적 입장에서는, 유한은 오히려 무한을 통해서 이해된다. 그러니까 근세의 서구정신은 유한이 무한에 의해서 한정된다는 '무한주의'(無限主義)의 입장이다. 실제로 근세유럽에서는 무한개념은 단순히 신비적·종교적인 면에서가 아니라, 온갖 영역에 걸친 보편적인 개념이 된 것이다. 무한이 적극적인 성격을 갖고 있을 뿐더러 유한 이상의 것으로서 유한의 근거가 된다는 생각은 근세에서 비로소 굳혀진 것이다. 한 마디로 말해, 무한개념은 근세의 기초개념이다. 이 때문에 근세의 학문은 근본적으로는 무한개념을 그 전제로 삼고 있으며, 유한도 무한성을 간직한다. 수학을 예로 든다면, 1은 무한급수의 합$\left(1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\right)$, 원은 무한다변형(無限多邊形), 그리고 '극한'(極限)이 무한과정(無限過程)을 나타내는 등 말이다.

그러나, 근세 특히 근세의 무한관을 생각할 때에는, 중세(中世)의 그것을 빼놓을 수 없다. 흔히 중세는 '암흑시대'로 여겨지기 쉽다. 고대 그리스문화에 대한 크리스트교 신앙의 '승리'는 미모의 여성철학자이자 수학자로서 명성이 높았던 Hupatia(?~415년)의 저 참혹한 죽음이 상징하듯이, 승리라기보다 이성이 광신(狂信) 앞에 굴복한 비극적인 사건으로 보통 알려지고 있다. 기원 415년, 크리스트교의 광신도들이 알렉산드리아의 대주교(大主敎) 키릴의 선동으로 고대문화의 최후의 대표자였던 휴파디아를 참살하고, 고대문화의 보고(寶庫)였던 알렉산드리아의 도서관을 불태워 없에버린 저 끔찍한 사건 말이다.

실제로, 이 사건 이후 수백년간 '이성(理性)의 학문'인 철학은 '신앙의 학문'인 신학(神學)의 시녀로서 스스로의 위치를 낮추었으며, 무한——이것은 신의 속성(屬性, 고유의 특성)이다!——의 문제도 신학의 세계에서 다루어지게 되었다. 그러나, 시간이 흐름에 따라 신학의 교리(敎理)와 플라톤, 아리스토텔레스 등의 고대(그리스)철학을 결합시키는 어려운 작업이 시작되었다. 아무리, 「부조리(不條理)한 것이기 때문에 (오히려) 믿는다!」라는 신앙고백을 뭇토(표어)로 내세운 크리스토교 교리 일지라도 '학'(學)인 이상, 신학은 학문의 체계를 갖

출 수 밖에 없었고, 따라서 대표적인 학문의 체계였던, 플라톤·아리스토텔레스를 그 모델로 채택할 수 밖에 없었던 것이다.

유럽중세의 세계관은 인간이 몸담고 있는 자연계(自然界) 위에, 또 초자연계(超自然界)라는 것이 있어서 이것들이 혼연일치하여 하나의 계층적(階層的)인 질서세계(秩序世界)를 이룬다는 것이였다. 이러한 세계를 창조하고, 또 지금도 이것을 다스리는 것이 신이며, 신이야말로 만물의 궁극적인 '원인이자 최고의 권위를 지닌 존재로 섬겨졌었다. 이러한 시대에 있어서는 신에 관한 학문, 즉 '신학'이 최고의 학문으로 간주된 것은 지극히 당연한 결과였다. 일찌기 그리스에서는 인간이야말로 세계에서 최고의 위치에 있었다. 따라서 궁극적으로 인간의 문제로 귀착되는 철학은 최고의 학문이였다. 이제, 그 위치가 신으로 바뀐 이상, 철학은 신학에 '최고'의 자리를 내어줄 수 밖에 없었다.

신학에 비하면 수학, 자연과학 등의 학문이 거의 불모(不毛)의 상태에 있었던 것은 사실이다. 그리스문명의 커다란 유산인 이들 과학은 당시 이방인인 아라비아인들에 의해 계승되어 있고, 유럽에서는 아라비아인들의 저서를 통하여 그리스철학자의 학설을 겨우 알게 되는 형편이어서, 그 이상 적극적인 과학적연구란, 도저히 바랄 수 없었다. 그렇다고, 크리스트교회가 일부러 사람들로 하여금 과학을 외면하고 오직 신학에 대해서만 관심을 쏟도록 하였다고 생각한다면, 지나친 편견이며, 피상적인 판단이다.

유럽중세가 '암흑'의 시대였다고 한 마디로 잘라 말할 수 없는 중요한 반증(反證)으로 당시에 '스콜라철학', 또는 '스콜라학'(學)이라고 불리어지는 학문 연구체제가 있었다는 사실을 머리에 떠올리면 충분하다. '스콜라'schola)는 본래 교회 또는 수도원에 부속되는 학교를 뜻하였으며, 따라서 이 학문의 기본목적이 크리스트교의 교리에 대한 학문적인 근거를 굳건히 하고 교회의 권위를 높이는 일에 있었음은 물론이였다. 그러나, 철학·신학 뿐 만 아니라 더 나가서는 온갖 학술분야를 연구대상으로 삼았다고 한 점에 이 학문의 특색이 있었다. 이러한 왕성한 연구활동은 무엇보다도 자유로운 정신 없이는 이루어지지 않는다. 이 스콜라학자들에게 우리가 특히 주목하는 이유는 그들이 무한의 문제를 적극적으로 다루었다는 것 때문인데, 실제로 앞에서 이미 이야기하였던 '스콜라학의 왕' 토마스·아퀴나스라든지, 그의 스승인 중세 최대의 자연과학자 A. Magnus(1193~1280년)의 저서에서는 문한소·무한대의 문제가 적극적으로 다루어지고 있다. '가능적무한', '현실적무한'이라는 명칭을 지어낸 것은 사실은 이들 스콜라학자들이었다.

스콜라철학이 철학의 입장에서는 결코 소홀히 보아넘길 수 없음은 물론이지만, 이에 못지 않게 수학에서도 적어도 무한의 문제에 관한 한, 이 학파는 중요한 위치를 차지한다. 이에 관한 F. Klein(1849~1925년)의 다음 말은 충분히 귀기울릴만 하다.

『얼핏 보면, 순전히 신학적인 궤변으로 여겨지기 쉬운 스콜라적사변(思辯)을 깊이 살펴볼 때, 오늘날 우리가 집합론이라고 부

르고 있는 이론의 중요한 발판을 찾아낼 수 있다. 예를 들어 신이 겨우 한 시간내에 이 무한한 세계를 어떻게 창조할 수 있었는가라는 의문은 현대의 수학자가 단위선분(單位線分)상의 무한개의 점집합에 대해 갖는 문제와 동일한 것이다.』*

이 스콜라학의 무한론을 '연속'에 관한 이론을 중심으로 더 자세히 살펴보기로 하자.

'연속'(連續)에 대한 스콜라학자들의 견해 스콜라철학이 수학상의 무한론에 얼마나 큰 영향을 미쳤는지는 중세로부터 르네상스 종교개혁을 거쳐서 17세기의 미분적분학의 발견에 이르기까지, 구적문제(求積問題)에 관한 연구에 참가한 사람들 중의 대부분이 스콜라학(學)적인 교양을 지닌 신학자였다는 사실에서 충분히 짐작할 수 있다.

본래, 두 도형의 크기가 같다는 것을 증명하기 위해서는 서로 합동인 '유한개의 도형의 합'으로 분해하여 이것을 확인하는 방법이 원리적으로 쓰이고 왔다. 따라서, 두 개의 기하학적인 양(量)(=도형의 크기)이 같다는 것을 증명하는데, 이 원리가 적용할 수 없는 경우에는 필연적으로 이 원리의 확장이 시도되지만, 이 확장이 가능하기 위해서는 적분학(積分學)의 확립이 전제가 되어야 한다. 물론, 그러기 위해서는 많은 벽을 극복해야 한다.

오늘날 '극한'(極限)의 개념에 의해 이 '원리의 확장'을 치르고 있지만, 이전에는 '미분소적양'(微分小的量)이라는 부정확한 개념을 써왔다. 또 그보다 앞선 미적분 발견 이전에는 '불가분량'(不可分量)이라는 개념이 쓰였었는데, 이 개념을 이해하기 위해서는 스콜라학자들의 연속체(連續體)에 대한 견해가 무엇이였는지에 대해 알아볼 필요가 있다.

일찌기 그리스의 원자론자들은 연속체의 본질에 관해서 물체는 그 이상 분할할 수 없는 '최소미립자'(最小微粒子)로부터 구성되어 있으며, 그 미립자는 물체가 지닌 모든 성질을 갖는다고 생각했었다. 스콜라학자들은 이러한 견해에 반대하여 연속체를 다음 두 가지로 나누었다.

첫째는 평면(또는 공간) 도형과 같이 각 부분이 연결되어 있으며, 게다가 이것들이 동시에 존재하고 있는 불변적연속체(不變的連續體), 그리고 둘째는 시간과 같이 각 부분이 서로 다른 부분과 앞·뒤의 관계에 있는 계속적연속체(繼續的連續體)이다.

연속체의 구성에 관한 스콜라철학의 기본적원리는 '무한분할의 가능성'에 있었다. 예를 들어, 선분과 같은 연속체는 현실적으로 무한히 분할을 계속할 수는 없지만, 그 '가능성'은 있다는 것이다. 이러한 이유에서 '최소의 선'(線)이라는 것은 존재할 수 없고(이 점에 관해서는 지금의 수학도 마찬가지이다), 따라서 점은 선의 구성분자가 될 수 없다. 왜냐하면 선(線)은 불변적연속체'이고, 그 각 부분은 모두 동일한 순간에 존재하지만——물론, 그 이후에도 계속 존재한다!——점은 그 이상 분할이 불가능한

* F. Klein, "Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19 Jahrhundert(1926~1927)» Bd. I, S.56.

고립된 존재인데도 이것들이 동시에 불변연속체(不變連續體)의 서로 다른 자리에 위치한다는 것은 모순이 되기 때문이라는 것이었다.

따라서 점은 선(線)의 구성원소는 아니지만, 점이 운동하면 선을 만들 수 있다. 이 뜻으로,

'점(點)은 선(線)의 불가분분자(不可分分子)'

'선은 면(面)의 불가분분자'

'면은 입체(立體)의 불가분분자'

로 불리어졌다. 연속체(連續體)에서는 마지막이 될 '최소미립자'(最小微粒子)란 존재할 수 없고, 따라서 '불가분량'(不可分量)은 항상 '1차원 낮은 이질(異質)의 것'이어야 하였다.

이 불가분량이라는 개념은 이미 크자누스 등에 의해 쓰여졌으나 이것을 체계적인 이론으로 기하학에 도입한 사람은 신학자(神學者)인 B. Cavalieri(1598~1648년)였다. 스승 갈릴레이로부터 '제 2 의 Archimedes'로 불리어진 Cavalieri는 그의 저서 〈불가분량(不可分量)에 의한 연속체(連續體)의 기하학〉(1635년)에서 불가분량의 개념에 관해서 설명하고 있다.

스콜라철학의 입장에서는 '불가분'(不可分)의 분자인 평면·직선 등이 운동하므로써 입체·면 등이 이루어지는 것으로 간주한다는 이야기는 앞에서 이미 하였지만 Cavalieri는 한 걸음 더 나가서 불가분량을 다음과 같은 것으로 생각하였었다. 예를 들어 원기둥을 그 밑면에 평행인 평면으로 절단하는 경우, 이 평면을 밑면에 평행하게 움직이면 그 때마다(밑면에) 평행한 절단면이 생긴다. 이 낱낱의 절단면을 그는 원기둥의 불가분량(不可分量)으로 생각했다.

이러한 관점에서 그는 「연속체가 불가분량에 의해 구성된다」라는 생각, 즉 연속체가 단지 그 불가분의 분자(分子)를 모은 것에 지나지 않는다 라는 생각에는 명확히 반대하고 있다. 그의 견해는 현대수학의 입장에서 보아도 긍정적인 면을 지니고 있다. 지금의 우리 역시 직선을 점의 집합으로 간주하지만, 단순히 점이 모은 것만으로는 직선은 이루어지지 않는다. 이 점집합이 직선이 되기 위해서는 이들 점 사이의 관계, 더 정확히 말한다면, 점 사이의 연결상태, 즉 '위상'(位相)이 정의되어 있어야 하는 것이다.

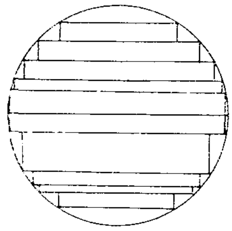
Cavalieri의 연구 중에서, 특히 주목을 끄는 것은 그가 단지 낱낱의 불가분량 뿐만아니라, 더 나가서 불가분량의 집합을 다루었었다는 점이다. 예를 들면 평면은 직선이라는 불가분분자(不可分分子)의 운동에 의해서 이루어지지만, 그 전체는 이들 직선이 치는 그물과 같은 것이며, 또 입체의 경우는 그 불가분분자인 평면이 책의 페이지처럼 쌓아진 상태라고 그는 생각했다.

Cavalieri는 불가분량(不可分量)에 의한 방법을 써서 각뿔의 부피가 '이것과 높이·밑면이 같은 각기둥의 부피의 $\frac{1}{3}$'이 된다는 사실을 증명하였다. 이것은 결과적으로 따져 이미 그리스인이 기하학적인 방법을 써서 얻은 바도 있었지만, 정답임에는 틀림없다. 그러나, 카발리에리의 방법에는 모순된 점이 있었다.

그가 스스로「입체란, 면의 운동에 의해 이루어진 것」이라 하면서도 막상 각뿔(角錐의 부피를 셈할 때에는 입체를 '면이 쌓인 것'(集積)으로 간주하고 있다는 점이 그것이다. 점이 운동한 결과 선이 되고, 선이 운동한 결과 면을 이루고, 또 면이 운동하므로써 입체가 된다고 한 것은 옳다. 그러나 크기가 없는 점을 아무리 이어보아도 선은 될 수 없으며, 폭이 없는 선을 아무리 늘어놓아도 면이 될 수 없고, 마찬가지로 두께 없는 면을 아무리 쌓아도 입체는 만들 수 없다. 카발리에리가 공격 받은 것은 바로 이 점에서였으며, 사실 이에 관해서는 그의 구적집(求積法)은 잘못이었다.

Cavalieri 이후, 불가분량의 개념을 사용한 수학자로서 주목 받을만한 사람은 프랑스의 기사(技師) G. P. Reberval(1602~1675년)이다. 그는 〈극미(極微)의 이론〉(1634년) 속에서 카발리에리 보다 한 걸음 더 나가서 선은 무한히 많은 선으로 이루어져 있고, 면・입체・각(角) 등도 각각 무한이 많은 면・입체・각으로 되어있다는 생각을 내 놓았다. 요컨데, 그는 카발리에리와는 달리 '불가분'의 합을 같은 종류의 불가분량의 전체, 예를 들어 직선은 그 불가분량인 점의 전체로 간주하는 태도를 취했다.

그러나, 이것을 명확히 주장한 것은 그의 제자 Pascal 이었다. 파스칼의 생각에 의하면, 예를 들어 어떤 도형에 몇개의 직사각형을 내접시켰을때, 이들 직사각형의 합의 면적과 처음의 도형의 면적의 차가 주어진 어떤 작은 양(量) 보다도 작을 때 이 두 면적은 '실용적'인 면에서 따진다면, '같은'



것으로 간주하여도 된다.

따라서 평면상의 어떤 도형도 '무한히 작은'——사실은 충분히 작은——직사각형의 합으로 바꾸어 놓을 수 있다는 것이다.

그런데, 면적의 차가 점차로 줄어들어서, 마침내 두 면적이 일치하게 된다는 생각에는 극한(極限)의 개념이 깔려있지만 Pascal의 입장은 그것이 아니고 차가 작기 때문에 '이것을 무시한다'라는 태도를 취했던 것이다. 이것이 무한소셈(無限小算)의 초기에 일반적으로 통용된 무한소의 개념이었다.

불가분량에 관한 파스칼과 카발리에리의 차이는 다음과 같았다. 파스칼은 어떤 평면도형을 무한히 작은 직사각형의 합으로 볼 때 이것을 처음의 도형의 불가분량(=직선) 의합과 동일한 것으로 간주한다. 따라서 원을 평행인 직선군(直線群)으로 절단하였을 때 그 하나 하나를 원의 '세로좌표'라고 부르기로 한다면, 그가 말하는 '원의 세로좌표의 합(='불가분'의 전체)은 극히 엷은 직사각형 전체의 합을 뜻하고 있는 것이다.

Pascal에 의한 이 무한소의 개념은 나중에 Leibniz의 미분개념에 큰 영향을 미쳤다. 그러니까, 스콜라哲學의 無限論이 직접으로는 Pascal, 간접으로는 Leibniz에게까지 영향을 미치고 있는 셈이다.

6. 數學的無限論(=集合論)의 萠芽

유한의 구(球)가 전지전능(全知全能)인 신의 창조물이라는 것은 모순이므로, 우주는 무한히 큰 구이어야 한다고 크자누스가 주장한 것은 Copernicus(1473~1543년)의 〈천구(天球)의 회전에 관하여〉가 출판되기 100년도 전의 일이었다. 그의 이러한 주장은 무한히 뻗은 공간 속에서 지구가 위치할 '중심점'을 생각해야 하는 모순의 제거와 깊은 관련이 있었다. 이 파라독스를 해결하기 위해서는,

『신은, 그 중심 모든 곳에 있고, 또 그 원주를 아무 곳에서 찾을 수 없는 무한의 구』이어야 하였다.

그러나, 이 단계에서는 Cusanus의 생각은 우주론에 별다른 영향을 미치지 못하였으며 Giordano Bruno(1548~1600년)가 코페르니쿠스적 관점에서 무한우주론을 주장하기 전까지는 세상의 주목을 받지 못하였었다. 브루노의 주장은 태양・지구・혹성(惑星)들로 이루어진 코페르니크스의 태양계는 무한우주(無限宇宙)의 중심에 자리 잡고 있다고 말할 수 없으며, 오히려 실제로는 무한히 뻗은 공간의 곳곳에 이러한 혹성계(惑星系)가 분포되어 있다는 것이다. 이 때문에 그는 이단(異端)의 낙인이 찍혀서 화형(火刑)에 처해졌으나(1600년) 그가 죽은지 반세기도 지나기 전에 그 동안 유럽세계를 지배해온 Aristoteles의 자연학(自然學)과 천문학 이론은 완전히 무너지고 말았다.

이보다 100여년 후의 일이기는 하지만 동북아시아의 변방(邊方)인 한반도에서도 Bruno의 무한 우주론과 꼭 닮은 견해가 사대부 출신의 실학자(實學者) 洪大容(1731~1783년)의 자연학(自然學)에서 소개되었다. 그의 〈담헌서〉(湛軒書) 중에는 다음과 같은 귀절이 보인다.

『하늘에 가득한 별치고 세계로 되지 않은 것이 없으니, 성계(星界)로부터 본다면 지계(地界)도 또한 한 개의 별이다. 한량 없는 세계가 공계(空界)에 흩어져 있는데 오직 이 지계만이 바로 중심에 있다는 말은 있을 수 없는 것이다.

……

"은하란 여러 세계를 묶은 한 세계로, 공계에 두루 돌아 한 큰 테두리를 이룬 것이다. 이 큰 테두리 가운데 많은 세계의 수효가 몇 천 몇 만이나 되는 바, 해와 지구 등의 세계도 그 중의 하나일 뿐, 이 은하는 하늘에 한 큰 세계이다. .

그러나 지구에서 볼 때 이와 같을 뿐, 지구에서 보이는 외에도 은하 세계와 같은 것은 몇 천 몇 만 몇 억이나 되는 줄을 알 수 없으니, 나의 자그마한 눈에 의하여, 갑자기 은하가 가장 큰 세계라 할 수도 없을 것이다.』*

그러나 이 한국인의 무한관은 유감스럽게도 무한론(無限論)의 계보에는 속하지 않는다. 홍대용의 '대담'한 주장을 '이단'(異端)으로 규탄하는 권위적인 우주관이 이 땅에서는 존재하지 않았고, 그의 주장 자체도 어떤 선행적인 우주관을 발전시킨 것도, 그

* 洪大容, 〈湛軒書〉, 豎山問答

렇다고 실증적인 천체 관찰에 근거를 둔 것도 아닌, 다분히 사변적(思辯的)인 발상이었다. 당연하게도 그의 무한우주관은 후계자를 얻지 못한 채 '단발(單發)로 끝났다. 실제로 한국인의 의식속에서 '유한과 무한'의 문제가 중요한 위치를 차지한 적이 한번도 없었으며, 이 점은 지금도 마찬가지이다 한국인은 적어도 우주론에 관한 한 경험을 초월하는 문제를 거부하는 불가지론자(不可知論者)이다. 따라서 무한론적인 발상을 심성(心性)적으로 한낮 '기설'(奇說)로 받아들이는 태도는 예나 지금이나 마찬가지인 것이다.

시선을 다시 유럽쪽으로 돌려서 생각해 보자.

크자누스가 다루었던 무한은 다분히 철학적인 내용의 것이였지만, 이것은 신학자(神學者)인 그로서는 어쩔 수 없는 한계였다. 이 크자누스 보다 훨씬 수학적으로 깊이 현실적무한을 다루었던 사람은 Galileo Galilei (1564~1642년)이다. 갈릴레이는 크자누스와는 달리 유한과 무한의 차이에 주목하였다.

그는 공간은 이상 더 쪼갤 수 없는 '불가분자(不可分者)인 무한소로부터 이루어졌다고 주장하므로써 현실적무한을 대담하게 긍정한다. 이 점에서 그는 고대의 원자론을 부활시킨 셈이다. 실제로, 데모크리토스의 원자론이 수학적으로도 물리학적으로도 의미를 지니게 된 것은 갈릴레이부터이다. 그는 무한소 뿐만 아니라 무한대에 대해서도 아주 대담하게 다루었으나, 유한에 관한 개념을 그대로 써 무한을 이야기해서는 안된다고 경고하는 것을 잊지 않았다.

갈릴레의 〈신 과학대화〉(新科學對話, 1638년)의 '첫째 날'은 무한, 연속 등이 그 내용으로 되어있는데, 여기서 그는 유한이 지닌 개념이 무한의 경우에는 통하지 않는다는 것을 다음과 같은 실예를 들어 설명하고 있다. 자연수와 제곱수의 대응

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & \cdots \end{array}$$

은 자연수의 집합 $\{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$과 제곱수의 집합 $\{1, 4, \cdots, n^2, \cdots\}$이 1대 1로 대응한다는 것, 따라서 자연수 전체와 그 일부인 제곱수 전체의 갯수가 같다는 것을 보여준다. 제곱수는 커질수록 자연수 속에서의 분포상태가 희박해진다. 그런데도 부분과 전체는 갯수가 같은 것이다.

① 2 3 ④ 5 6 7 8 ⑨ 10 11 12 13 14 15 ⑯ 17 18 19 20 21 22 23 24 ㉕ 26…

제곱수의 분포상태

이 사실로부터, 자연수 전체의 갯수와 제곱수 전체의 갯수는 어느 쪽이 더 많다, 또는 더 적다라고 말할 수 없다는 결론이 내려진다. 요컨데, '같다', '크다', '작다' 등의 성질은 유한(有限)의 세계에서만 의미를 지닐뿐, 무한의 세계에는 통용이 되지 않는다. 만일 이러한 성질을 무한의 세계에 억지로 적용시키려고 하면, 아주 기묘한 일이 벌어지고 만다는 것이 갈릴레이가 내린 결론이다. 알고 보면 무한은 유한을 넘어선 것이기 때문에 유한에 관한 성질이 무한의 세계에서 성립하지 않는다 하여도 조금도 이상한 일이 아닐 것이다.

이 제곱수에 관한 '무한의 파라독스(?)'

는 역사적으로 많은 흥미를 끈다. 엄격한 의미의 무한수(無限數)의 이론인 초한수(超限數)의 이론이 건설된 것은 19세기의 일이지만 Dedekind(1831~1916년) 〈수란 무엇이며, 무엇이어야 하는가〉(1888년), 이 때 무한의 정의로서 쓰인 것은 바로 이것이였다. 즉, 『무한집합이란 부분과 전체의 '크기'가 같은 집합』이라고 정의되었다. 위의 갈릴레이의 보기에서 말한다면, 제곱수 전체는 자연수 전체의 부분이지만, 이 두 집합은 '1대1 대응'을 하고, 따라서 '크기'가 같은 것이다. 이 무한의 성질은 무한론(無限論), 즉 무한수학의 이론이 완전히 확립되는 19세기 이전에는 '무한의 파라독스'중의 대표적인 보기로 꼽히고 있었다. 이 파라독스가 특히 문제시 되었던 것은 그리스 이래 유럽수학의 기본적인 '틀'로서 받아들여진 유클레이데스 〈원론〉에 실린 공리(公理) 『전체는 부분보다 크다』와 모순되기 때문이었다. 크자누스도 이와 비슷한 생각을 품었으나, 현실적무한(現實的無限)이 지난 이 성질을 처음으로 분명히 밝힌 것은 갈릴레이였다.

이 기묘한 파라독스는 그리스시대였다면 현실적 무한을 부정하는 좋은 보기가 되었을 것이다. 그러나 갈릴레이의 시대에는 이미 이러한 소극적인 태도로 무한을 대할 수 없을만큼 상황이 크게 변해 있었다. 물리학이나 역학(力學)에서는 운동의 개념이 중요시되지만, 갈릴레이가 연구한 것은 역학 중에서도 동력학(動力學)에 관해서였다. 운동의 문제에는 일종의 현실적무한이 따르기 마련이다. 이 때문에 갈릴레이 자신도 현실적무한에 관해 적극적인 관심을 기울였던 것이다. 그러나, 갈릴레이는 현실적무한을 합리적으로 체계화하는 단계에는 이르지 못하였다. 무한론이 체계적으로 다루어지기 위해서는 유한집합 사이에서 처럼 무한집합 사이의 비교가 가능해야 한다. 이것은 칸톨의 집합론(集合論)의 탄생까지를 기다려야 하지만, 여기서는 우선 B. Bolzano(1781~1848년)의 '무한의 파라독스'에 대해 알아보기로 하자.

다음과 같은 꼴의 무한급수가 있다고 하자.

$$S=a-a+a-a+\cdots \qquad (1)$$

이 급수의 합을 구하기 위하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$S=(a-a)+(a-a)+\cdots=0+0+0+\cdots \qquad (1)'$$

이것으로부터 S=0이라는 결과를 얻는다. 또 (1)은,

$$S=a-(a-a)-(a-a)\cdots=a-0=a \qquad (1)''$$

이 (1)″에 (1)′의 결과를 대입하면

$$S=a-S,\ \text{즉},\ S=a/2 \qquad (1)'''$$

이다.

결국 식 (1)로부터는 서로 모순된 세가지 답을 얻을 수 있다. 요컨데, 이 급수는 수학적으로 의미가 없는 것이다. 왜?

당연한 이야기이지만, 아무도 한 없이 덧셈을 계속할 수는 없다. 예를 들어 우리가 식

$$S=\sum_{i=1}^{\infty}a_i=a_1+a_2+a_3+\cdots$$

을 생각할 때, 수열

a_1

a_1+a_2

$a_1+a_2+a_3$

……

……

즉, 수열

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}a_i$$

가 수렴을 하고, 극한값 'S'를 갖는다는 것을 전제로 삼는다.

그러나,

a

$a-a$

$a-a+a$

……

즉,

$a, 0, a, 0, a, 0, \cdots$

과 같은 수열은 수렴하지 않는다(수렴하지 않는 수열을 수렴하는 것으로 간주했다는 점이 혼란의 원인이다!). 따라서 식(1)은 무의미하다.*

이 예는 무한급수에 산수의 덧셈의 규칙을 무턱대고 적용하면 모순이 생긴다는 것, 즉, 유한개의 합에 관한 산수의 법칙을 형식적으로 나타내어진 무한급수에 그대로 옮길 수 없음을 논리적으로 설명하였다는 점에서 주목을 끈다.

중세와 근세의 세계관 사이의 가장 큰 차이는 우주관·세계관의 일대전환이였다. 그 중에서도, 중세의 지배적인 우주관, 즉 지구를 중심으로 하여 그 둘레를 몇 개의 천구(天球)가 돌고 있다고 하는 유한적인 우주관이 근대적인 무한우주관으로 바뀌어졌다는 것은 아주 중대한 의미를 지닌다. 이것이야말로 중세의 사상을 밑뿌리부터 뒤흔든 '태풍의 눈'이였으며, 이 문제는 단순히 지동설(地動說)대 천동설(天動說)이라는 정도의 한낱 천문학상의 견해의 차이에서 빚어지는 논쟁거리로 그치는 것은 아니였다. 이 엄청난 '사건'이 사람들의 마음을 얼마나 큰 혼란속에 빠져들게 하였는지에 대해 문학자 A. France는 다음과 같이 묘사하고 있다.

『지구는 세계의 중심이고, 모든 천체가 그 주위를 회전하고 있다. 사람들은 하늘을 우러러 보면서 조용히 저 십이천(十二天)에 눈길을 보내고 있었다. ……

옛 사람들은, 이러한 십이천이나 혹성(惑星) 아래에 태어나서 행복한 또는 불행한, 쾌활한 또는 우울한 생활을 보냈었지만, 그러한 십이천이나 혹성은 이제 사라지고 없다. 창공(蒼空)의 튼튼한 원천정(圓天井)은 무너지고 말았다. 지금은 사람들의 눈길과 상념(想念)은 창공의 무한의 심연속으로 한없이 빠져들어갈 뿐이다. 그리고 혹성의 저편에 보이는 것은 선택 받은 자들이나 천사들이 노니는 밝은 하늘이 아니고 우리의 눈에는 비치지 않는 몽롱한 위성(衛星)의 행렬을 이끌고 회전하고 있는 무수한 태양들이다. 이 무한대의 우주공간 속에서는 우리의 태양은 우리에게 있어서 한 번 품어내는 개스의 포말(泡沫)에 지나지 않고, 지구는 한 방울의 진흙에 지나지 않다……』(〈에피쿨의 화원〉.

위의 A. France의 표현을 빌어서 말한다

* B. Balzano, "Paradoxien des Unendlichen"(1851년) S. 58.

면, 우주의 유일한 중심이였던 지구가 '무수한 태양'으로 바뀌어지고, '튼튼한 원천정' 아닌 무한의 우주공간을 우리의 것으로 받아들이기까지 사람들은 망설이고, 두려워하였으며 싸워서 피를 흘렸다.

요컨데, 무한이 사람들의 마음속에 자리잡게 되기까지에는 고산에 찬 아주 긴 세월이 흘러가야 하였지만, 이 무한 없이는 근세에 있어서의 천체운동에 관한 이론도, 수학적자연과학(數學的自然科學)도 심지어는 아마 미적분학(微積分學) 조차도 탄생하지 안했을 것이다. 여기서 분명히 할 것은 무한의 등장은 이것들이 스스로 찾아온 결과가 아니라 우주나 무한을 스스로 자신의 것으로 삼으려는 '인간'의 적극적인 자각의 결과였다는 점이다. 너무도 유명한 다음의 Pascal의 말은 이 사실을 상징적인 표현이나마 잘 전해 주고 있다.

『인간은 한 개의 갈대에 지나지 않는다. 자연 가운데서 가장 허약한 갈대에 지나지 않는다. 그러나 그것은 생각하는 갈대이다. 이것을 짓밟아 뭉게버리기 위해서 우주 전체가 무장할 필요는 없다. 한 줌의 독기(毒氣), 한 방울의 물로도 충분히 그를 죽일 수 있다. 그러나 우주가 그를 으깨어 버린다 하여도 인간은 그를 죽이는 자 보다 고귀한 존재이다. 왜냐 하면, 인간은 자신이 죽는다는 것도 우주가 힘에 있어서 자신보다 우월하다는 사실을 알고 있기 때문이다. 우주는 그것을 모르고 있다』(〈빵세〉).

그는 이 책의 또 다른 자리에서, 신의 초월성(超越性)을 '증명하기 위해서였지만 무한과 유한의 차이를 다음과 같이 지적하고 있다.

『하나가 무한에 가해졌다고 해서 그것을 조금도 증가시키지 못하는 것은, 무한한 길이에 한 자(尺)를 가했다 해서 이것을 증가시키지 못하는 것이나 마찬가지다. 유한한 것은 무한한 것 앞에서는 없어져서 순전한 허무가 되고 만다. ──우리의 정신이 신앞에서 그렇고, 우리의 정의(正義)가 신의 정의 앞에서 이렇게 된다──우리의 정의와 신의 정의 사이에는 한 단위와 무한 사이에 있는 것처럼 그렇게 큰 불균형은 없다.

……

우리는 무한이라는 것이 있음은 알지만 그 성질을 모른다. 수가 한이 있다는 것이 거짓임을 우리가 알고 있으니, 그러면 수에는 무한이 있는 것이다. 그러나 우리는 그 수가 어떤 것인지를 모른다. 그것이 짝수라고 하는 것도 거짓이요, 그것이 홀수라고 하는 것도 거짓이다. 왜냐하면 한 단위를 더 보탰다고 해서 수의 성질이 변하는 것은 아니기 때문이다. 그러나 그것은 하나의 수요, 수는 어떤 것이든지 짝수거나 홀수다. 이것이 모든 유한한 수에 대해서는 분명한 것이다.』*

이 〈빵세〉의 저자는 '수학적귀납법'(數學的歸納法)이라는 방법을 처음으로 사용한 수학자이기도 하였다. 이 수학적귀납법이야말로, 무한의 개념을 정면에서 다룬 수학적인 방법인 것이다. 수학적귀납법이란 한 마디로 말해서 '어떤 사실이, 모든 자연수에 관해서 성립한다'는 것을 증명하는데 쓰이

* Pascal/安應列譯(學園社(p. 163.

는 방법이지만, 사실은 이것은 단순히 하나의 증명법에 끝나지 않는다. 여기에는 '자연수 전체'란 무엇인가에 대한 뚜렷한 생각이 전제가 되어있다는 사실을 보아넘겨서는 않된다.

자연수는 1로부터 시작하여 차례 차례 나아감으로써 비로소 그 전체를 파악할 수 있다. 바로 이 사실 때문에 어떤 성질 $p(n)$이 모든 자연수에 대해서도 성립한다는 것을 밝히기 위해서는 먼저 $n=1$일 때를 따져보고 이어서 $n=k$일 때 성립한다고 할 때 $n=k+1$일 때에도 성립한다는 것을 따지는 두 단계의 증명법이 힘을 발휘한다. 거듭 강조하지만, 자연수 1, 2, 3, …은 오래 전부터 알려져 있었으나, 이것을

「n 다음에는 $n+1$이 이어진다」

라는 규칙(='생성규칙(生成規則))을 지닌 '한 없이 계속하는 수열'로 보고, 그 전체를 하나로 묶어서 생각하게 된 것은 그렇게 오래 된 일은 아니다.

'자연수 전체'를 '무한'으로 파악하기 위해서는 '수학적귀납법'(數學的歸納法)이라고 부르는 방법을 사용해야 한다. 즉 수학적 귀납법이 확립되었을 때, 비로소 자연수 전체라고 하는 '무한'이 수학에 등장하게 된 것이다. 이 수학적귀납법을 파스칼이 발견한 것은 1654년 이였다고 하다.

보통 '귀납법'이라고 할 때, 특수한 사실로부터 출발하여 일반적인 성질을 알아내는 방법을 말한다. 수학적귀납법은 이것과 비슷한 점이 있다. 그러나 수학적귀납법을 단순한 귀납법이 아니다. 이 방법은 실험이나 관찰을 일삼는 자연과학에서 쓰이는 귀납법처럼 불확실한 데가 없고 항상 바른 결론을 이끈다. 이 때문에 수학적귀납법을 '완전귀납법'이라고도 부르고 있다.

이 원리는 하나의 명제가 자연수열(自然數列)

$1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$

의 모든 항에 대해서 성립함을 증명하기 위하여 다음 두 가지를 밝히는 것이다.

i. 이 명제가 첫번째 항(1)에 대해서 성립하다.

ii. 이 명제가 어떤 함 k에 대해서 성립하다고 가정하면 그 다음이 항 $k+1$에 대해서도 성립한다.

이 수학적귀납법이야말로 자연수 전체라는 '무한자'(無限者)를 수학의 대상으로 삼는 적극적인 방법의 출현을 알리는 것이였다.

무한이면서 현실적인 의미를 지닌 것의 예로 가우스평면(복소평면(複素平面))상의 무한원점(無限遠點)을 들 수 있다. 즉, 이 평면의 무한원(無限遠)에 한 '점' '∞'를 덧붙이고, $|z|\to\infty$인 z의 극한은 모두 이 '점' ∞에 수렴하다고 보는 것이다. 사영평면(射影平面)에서는 각 직선은 닫혀 있어서 무한원점에서 이어져있을 뿐더러, 각 직선상의 무한원점은 하나의 무한원직선(無限遠直線)상에 있다고 간주하다. 그러나 이 복소평면에서는 무한원은 오직 한 점 ∞가 있을 뿐이다. 즉, $|z|>M$인 점 z들은 점 ∞의 한 근방을 이룬다.

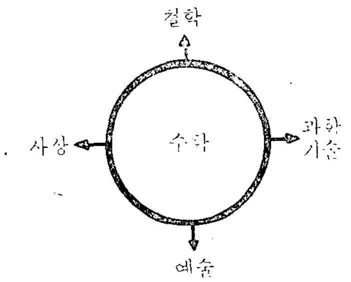
이렇게 한 '점' ∞를 정하면 복소평면은 하나의 구면과 '동상'(同相), 즉 위상적(位相的)으로 '같은' 도형이 된다. 왜냐하면

$x^2+y^2+z^2=1$이라는 구면과 xy평면에서 구면의 북극점(北極點) N과 '평면'상의 점 z을 맺고, 이 직선이 구면과 만나는 점을 Z으로 라면, 이 대응 즉,

점$z \longleftrightarrow$점 Z

에 의하여 구면상의 점과 '평면'상의 대응이 '1대1'이 된다. 이 때, ∞에 대응하는 구면상의 점은 N이다. 즉,

점∞$\longleftrightarrow$점 N

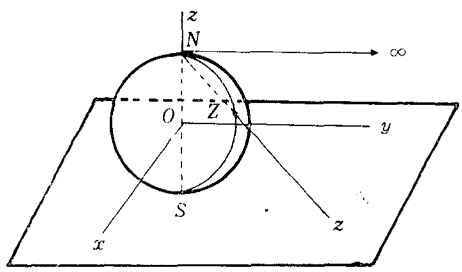


복소수함수(複素數函數)를 고찰할 때에는 이 무한원점 ∞의 근방에 있어서의 함수의 상태를 생각할 필요가 있으며, 이 때, 무한원점(無限遠點)과 임의의 유한원점(有限遠點)의 근방의 상태가 동일한 것으로 간주되기 때문에 결과적으로 무한을 '확정된 점'으로 파악한 셈이다. 실제로 무한(=현실적 무한)을 완결(完結)된 '존재하는' 무한으로 다룰 수 있게 하 것은 복소수함수론의 획기적인 성과였다.

結　語

——數學은 단순한 道具가 아니다——

수학은 흔히 계산이나 증명 등을 주로 일삼는 학문으로 여겨지고 있다. 물론 수학에는 이러한 면이 있는 것이 사실이고, 현재 국민학교·중·고등학교, 그리고 대학에서 배운 수학의 내용도 모두 이런 것들이다. 여기서 말하는 '수학'이란 과거의 중국이나 한국의 수학은 물론 아니고, 유럽으로부터 근대에 받아드린 수학이다. 이 수학은 알고 보면 계산이나 증명만을 다루는데 그치지 않고, 놀랄 정도로 넓고 깊은 영역을 지니고 있다. 즉, 과학기술과의 연관은 말할 나위가 없고, 철학이나 사상 심지어는 예술 등과도 깊은 관계가 있는 인류문화 속에 깊이 뿌리를 내린 거창한 학문인 것이다.



그렇다면 수학은 애당초부터 이렇게 폭넓은 내용을 간직하고 있었던 것일까? 바꾸어 말하면, 이 학문은 그 긴 세월 동안 '수학'이라고 한 마디로 부를 수 있는 일관된 성격을 그대로 줄곧 지탱해 온 것일까?

수학을 영어로 mathematics라고 부르지만 이 낱말의 어원은 그리스말의 '마테마타(mathemata, $\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha\tau\alpha$)이면, 원래는 '배워야 할 것', 즉 학문의 복수형을 나타내었었다. 일반적인 학문을 뜻하였던 낱말이 오늘날 '수학'이라는 특정하 학문을 가리키게 된 연유를 알아보는 것은 흥미 있는 일이다 이제부터 그 역사에 관해서 살펴보기로 하자.

피타고라스의 정리'로 잘 알려진 Pythag·

oras(B.C. 6세기쯤)가 남·이탤리의 크로톤 이라는 도시에 세운 학교에서는, 영혼을 정화(淨化)하는 방법으로 음악·천문학·기하학·수론(數論)의 네가지 '마테마타'(=학문)를 학생들에게 가르쳤는데, 여기서는 특히 「만물은 수(數)이다」라는 신조가 섬겨지고 있었다고 한다. 그 사실 여부를 확인할 수는 없지만, 어쨌든 당시에는 수나 도형에 관한 연구가 아마도 종교적인 이유 때문에 행해지고 있었던 것은 틀림없다. 그 후, 약 2백년이 지나서 Platon이 아테네시의 교외 아카데미아의 숲속에 세운 학교('아카데미아', B.C.368년) 입구에, 「기하학을 모르는 자는 이 문을 들어서지 말라」라는 표말이 걸려있었다는 전설은 유명하다. 또, 플라톤은 「신은 기하학자이다」라는 말을 남기기도 하였는데, 실제로 피타고라스학파(學派) 이래의 네개의 'mathemata'(학문), 특히 기하학이나 수론은 Platon의 철학과 깊은 연관이 있다.

'mathemata'라는 낱말이 앞서 말했던 음악·천문학·기하학·수론 등을 주로 나타내고 이 '사과'(四科)를 연구하는 사람을 'mathematicos'(數學者)라고 부르게 된 것은 Platon의 아카데미아에서였으며, 그의 제자 Aristoteles의 학교에서 그 위치를 굳혔다. 우주는 본래 수학적인 질서를 지니고 있으며, 따라서 참다운 학문은 모두 언제나 수학적인 짜임세를 갖는다고 하는 플라톤의 수리사상(數理思想)은 Pythagoras학파의 저 종교적 마테마타(학문)의 영향임이 틀림없다. 이 경향은 그 후의 유럽에 있어서의 학문적전통의 중요한 특징이 하나가 되었다.

Pythagoras 이래의 네 개의 마테마타(학문)가 '四科', 즉 '콰드리비움'(quadrivium)으로 불리어지고 문법·수사학(修辨學) 논리학으로된 '三科'('트리비움', trivium)와 더불어 '자유학예'(自由學藝, artes liberales)를 이루게 된 것은 6세기 중세의 수도원에서이다. 그러나 피타고라스—플라톤에서 유럽 중재에 걸친 '마테마타,가 모두 현제의 '마테마티크스(數學)의 바탕이 된 것은 아니였다. 현재의 'mathematics'는 실제로는 기껏 점수술(占數術)이나 점성술(占星術), 또는 '수의 철학' 정도의 내용에 지나지 않는 '四科' 중의 수론이나 천문학 등의 'mathemata'를 부정하고 그것들을 넘어설 수 있게 되면서 태어난 것이다. 수학으로서의 mathemata, 즉 그리스의 기하학을 현제의 우리에게 전해주었던 것은 실은, 유럽인들이 아니고 7세기에 갑자기 문명의 꽃을 피우게 한 아라비아인들이였다. 즉 우리가 지금 그 전통을 이어받고 있는 Platon 이래의 그리스적수학은 아라비아문화라는 용광로 속에서 다시 다듬어졌다. 이에 이은 르네상스로부터 17세기에 걸친 시대에 또 다시 이 수학은 새로운 환경의 '도전'에 대응하면서 전에 볼 수 없는 학문의 형태를 갖추게 되었다. 이것이 오늘날의 mathematics의 직접의 조상인 것이다.

13세기는 흔히 '중세의 르넷상스'로 불리어질 만큼 학문의 역사상 극히 중요한 의의를 지닌 시대이다. 이 시대는 그리스트교의 신앙과 그리스의 학문을 통합시킨 이른바 스콜라철학이 확립된 시대였다. 여기서 말하는 그리스의 학문이란 주로 Aristoteles의

자연학(自然學, 자연에 대한 철학적 고찰). 이 중심을 이룬 것이지만. 고대·중세를 통하여 그리스적 학문의 전통은 대체로 플라톤의 사상이 중심이였으나, 이 시대 이후로는 아라비아를 거쳐 옮겨진 Aristoteles의 反宗敎的인 자연학이 그리스트교의 윤리관과 결합하여 조화있는 체계를 이루게 되었다. 중세 이후의 수도원·학교가 대학의 모습을 갖추기 시작한 것도 이 무렵의 일이였으며, 파리대학은 1200년, 옥스포드대학은 1214년에 창설되었다. 이러한 대학의 바깥에서도 새로운 학문의 싹이 여기 저기서 뜨기 시작하였다. 한편, '四科'에 속해 있으면서도 음악이나 천문학은 15,16세기에는 이미 mathematics(數學)로는 간주되지 않았고, 그대신 그리스와 인도의 양쪽으로부터 전통을 이어받은 삼각법이 새로이 마테마티크스의 멤버로 끼어든다. 프랑스의 수학자 F. Viète(1540~1603년)가 쓴 〈수학요람(數學要覽)〉(Canon mathematicus, 1579)이라는 이름의 삼각법의 책은 그 사실을 단적으로 말해주고 있다. 이제 '마테마티크스'라는 낱말이 책의 표제로서 쓰이기까지 할 정도로 그 '시민권'을 당당히 획득하게 된 것이다.

'mathematics'의 어원이 'mathemata'라는 것, 따라서 이 낱말에는 '논증체계(論證體系)를 지닌 통일적학문(統一的學問)'이라는 본래의 뜻이 다소나마 담겨져 있는 것은 당연하지만, 특히 르네상스 이후 부활하였던 저 플라톤적수리사상(數理思想)의 영향때문에 마테마티크스는 이 경향을 두드러지게 풍겼다. 그러나, '통일적학문'으로서의 마테마티크스를 실제로 내세운 것은 Descartes(1596~1650년)와 Leibniz(1466~1716년였다.

Descartes의 유명한 저서 〈방법서설〉(方法序說, 1637년)은 정확하게는

『이성(理性)을 바르게 이끌고, 온갖 학문에 있어서 진리를 찾기 위한 방법 및 이 방법의 시도(試圖)로서의 광학(光學)·기상학(氣象學)·기하학』

이라는 이름이었다. 그러니까, Descartes의 해석기하학(解析幾何學)이 태어나기 까지에는, 「(그의) 이성을 바르게 이끌고 온갖 학문의 진리를 찾기 위한」 노력이 여러가지로 베풀어졌었음을 알 수 있다. 비록 실현은 되지 안했으나 데카르트가 구상하였던 통일적학문으로서의 수학, 즉 '마테시스·유니버살리스'(mathesis universalis, '보편(수)학')에로의 꿈은 Leibniz에 의해서 더욱 강하게 추진되었다.

Leibniz야말로 아마도 인간의 사고 자체를 기호적수학(記號的數學)의 형태로 재현하려고 하였던 최초의 사람이였을 것이다. 미적분학(微積分學)은 뉴턴과 라이프니쯔에 의해 거의 동시에 발견되었지만, 오늘날 사용되고있는 기호가 모두 라이프니쯔의 것이라는 사실에서도 알 수 있는 바와 같이, 라이프니쯔의 기호법은 아주 뛰어난 것이었다 그러나 이 미적분학은 그가 목표로 삼은 기호적수학(='보편(수)학')의 한 보기에 지나지 안않다. 수학이야말로 라이프니쯔에게는 인간의 사고의 세계를 가장 깊숙히 파고드는 학문——즉, '보편학,——이었던 것이다.

김 용 운

Platon, Aristoteles, Pascal, Descartes, Leibniz 등은 보통 철학자로서만 알려져 있으나 이 사람들은 수학의 역사상 빠뜨릴 수 없는 '수학자'이기도 한 것이다. 한편, 이미 앞에서도 이야기한 바와 같이 수학과 종교도 사상면에서 의외로 깊은 인연이 있다. 다음 인용문은 13세기의 신학자 Thomas Aquinas(1225~1274년)의 종교관에 관한 해설인데, 여기에는 그리스인의 수학적정신(數學的精神)이 뚜렷이 반영되어 있다.

『그리스트교의 교리(敎理) 속에는 여러 종류의 진리가 포함되어 있으나, 이것들이 모두 똑 같은 중요성을 지닌 것은 아니다. 즉, 자세히 살펴보면 어떤 진리는 다른 진리의 근거 내지는 바탕을 이루는 것처럼 보이는 것이다. 이 때문에 이들 여러 진리의 원인과 결과 중심적인 성질과 특수한 성질, 원칙과 귀결(歸結) 등에 초점을 맞추어 이들 진리 사이에 존재하는 명확한 관계를 사고를 통해 부각시킬 수 있다. 이렇게 하므로써 귀결로서의 진리와 원칙으로서의 진리를 구별할 수 있으며, 또 후자(즉, 원칙으로서의 진리)를 이보다 더 근원적인 진리와 연관 지울 수 있음을 알 수 있을 것이다. 이와 같이 연관의 '실'을 따라가면 마침내는 그 이상 거슬러 올라갈 수 없는 몇 개의 지상(至上)의 진리에 도달한다. 종래, 아리스토텔레스철학이 '학문'에 부여하였던 도식(圖式) 속에서 '인식의 기초를 이루는 근원'이 맡았던 역할을, 신학(神學) 속에서는 이들 진리가 떠맡게 된 것이다』(P. Adonese <카톨릭신학>).

이미 짐작할 수 있는 바와 같이 위의 글 가운데에서 '진리' 대신에 '정리'를, 그리고 '지상의 진리' 대신에 '공리'를 바꾸어 놓으면 그대로 그리스 이래의 공리적수학체계(公理的數學體系)에 관한 설명이 된다. 이처럼 신학(神學)이 시간적으로 따져 3백년이나 앞선 유클레이데스의 공리적인 수학체계로부터 영향을 받고 있는 것이다. 역으로 따진다면, 애당초 '대화의 전제'로서의 의미 밖에 지니지 않았었던 '공리'라는 낱말이 '지상의 진리'라는 뉴앙스까지를 풍기게 된 것은 분명코 그리스트교의 영향 탓이다. 어쨌든 수학이라는 학문의 역사는 유럽에서는 사상이 엮어지는 역사(=思想史)와 깊은 연관이 있음을 알 수 있다. 즉, 유럽인들에게는 수학은 적어도 한 낱 '도구' 이상의 것이었다.

마지막으로 다시 강조해 두고 싶은 것은 '수학적무한론'(數學的無限論), 즉 집합론(集合論)은 종교적·철학적 무한관(無限觀)을 배경으로 삼은 학문('mathemata')으로서 그 체계를 이루었다는 사실이다. 이것은 집합론이 단순히 '집합의 수학'이나 '집합의 이론'에 그치지 않음을 뜻한다. 종교니 사상이니 하는 수학 이전의 영역을 여기 저기 헤쳐본 이유는 바로 이 때문이였다. 실제로 집합론에 대한 진정한 이해는 이 학문이 탄생하기까지의 사상적배경에 대한 파악 없이는 이루어질 수 없는 것이다.

B. Bolzano, Paradoxien des Unendlichen 1851.
S. Bochner, The Role of mathematics in the rise of science, 1966.
Aristoteles, Physica.
Aristoteles, Methaphysica

T. Heath, Mathematics in Aristoteles, 1949.

N. Cusanus, De docta ignorantia, 1440.

J. W. Dauben, Georg Cantor, His mathematics and philosophy of the infinite, 1979.

C. Hempel, On the Nature of Mathematical Truth, 1964.

A. Heyting, Intuitionistie Views on the nature of Mathmatics, 1974.

M. Steiner, Mathematical Knowledge, 1975.

F. Waismann, Introduction to mathematical Thinking, 1959.

F. Klein, Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19 Jahrhundert(1926~1927).