多部品시스템의 最適壽命交換方針

—Optimal Age Replacement Policy of Multi-Component System—

鄭 永 培*

Abstract

In general, the characteristics of components which consist of multi-component system can not be the same.

This paper proposes a maintenance model of multi-component system according to the characteristics of each component.

In this paper, multi-component system is divided into three components-critical component, major component and minor component, respectively. Then we determine the optimal age replacement time of the system which minimizes total maintenance cost.

Numerical examples are shown to illustrate the result.

1. 序　論

최근 생산의 機械化 및 自動化가 이루어짐에 따라 生産裝備의 부분적인 고장은 전체 생산공장의 操業中斷을 초래하게 됨으로써 고도의 信賴度를 갖는 시스템(system)이나 部品의 중요성이 큰 문제로 대두되고 있다. 그러나 최근의 裝備들은 구조가 복잡할 뿐만 아니라 그 運用條件이 매우 까다로와지고 있으며, 그 시스템이 갖추어야 할 효과에 대한 要求條件도 점점 더 높아지고 있다. 따라서 이러한 요구조건을 만족시키기가 힘들어 지고, 장비의 整備維持費도 급격히 커짐에 따라 신뢰도를 높이기 위한 하나의 방편으로 整備(maintenance)에 대한 관심이 높아지고 있다.

일반적으로 정비는 시스템의 運用費用과 可用度(availability)에 직결되는 문제이므로 시스템의 가보와 정비에 따르는 비용이 클 경우 整備方法을 개선함으로써 상당한 정도의 整備費用의 절감효과를 보면서 시스템의 可用度를 높일 수 있다.

그러나 효과적인 정비를 하기 위해서는 장비의 고장이 발생한 時點에서 장비를 交換하는 故障交換(failure replacement)으로 인해 야기되는 비용과 장비의 고장이 발생하기 前의 임의의 時點에서 장비를 교환하는 豫防交換(preventive replacement)으로 인한 비용을 고려하여 시스템의 總整備費用을 最小로 하는 最適交換壽命을 결정해야 한다. 이와같은 시스템의 最適交換壽命을 구하는 문제에 대해 지금까지 많은 연구가 있었으나 대부분 單一部品으로 구성된 시스템에 대한 交換方針(replacement policy)이었으며, 여러개의 부품으로 구성된 시스템에 대해서도 각 부품의 고장이 確率的, 經濟的으로 獨立이라는 가정하에 이루어졌기 때문에 각 部品에 대한 교환방침의 결정도 모두 독립이 되어 단일부품의 교환방침의 결정방법과 일치하게 된다.

그러나 裝備는 대부분 여러개의 부품들로 구성되어 있고 또 構成部品의 特性도 모두 똑같을 수가 없기 때문에 각 부품의 특성을 고려한 整備方法을 적용하여 시스템의 總整備費用을 最小로 하는 最適交換壽命을 구하는 것이 현실적이라 할 수 있다.

本研究에서는 시스템을 구성하고 있는 부품을 특성에 따라 致命部品(critical component), 重部品(major component), 輕部品(minor component)으로 분류하여 각각의 部品特性에 적합한 서로 다른 정비방법에 따른 시스템의 最適壽命交換方針(optimal age replacement

---

*仁川大學校 產業工學科
접수 : 1988. 11. 5.

policy)을 결정한다.

2. 模型의 設定및 用語說明

2·1 模型의 設定

시스템을 구성하는 部品을 特性에 따라 다음 세가지로 분류한다.

2·1·1 致命部品

시스템 전체의 性能에 치명적인 영향을 주는 매우 중요한 부품이며, 이러한 부품의 고장은 시스템 전체의 고장과 같다고 할 수 있다. 따라서 이러한 부품에 고장이 발생하면 시스템 전체를 交換한다.

2·1·2 重部品

시스템 전체의 性能에는 치명적인 영향을 미치지는 않지만 이러한 部品에 고장이 발생하면 시스템의 運用上에 문제점이 발생하며, 修理가 가능하고 價格도 비교적 비싼 부품이다. 따라서 이러한 부품이 고장나면 應急修理(minimal repair)를 한다.

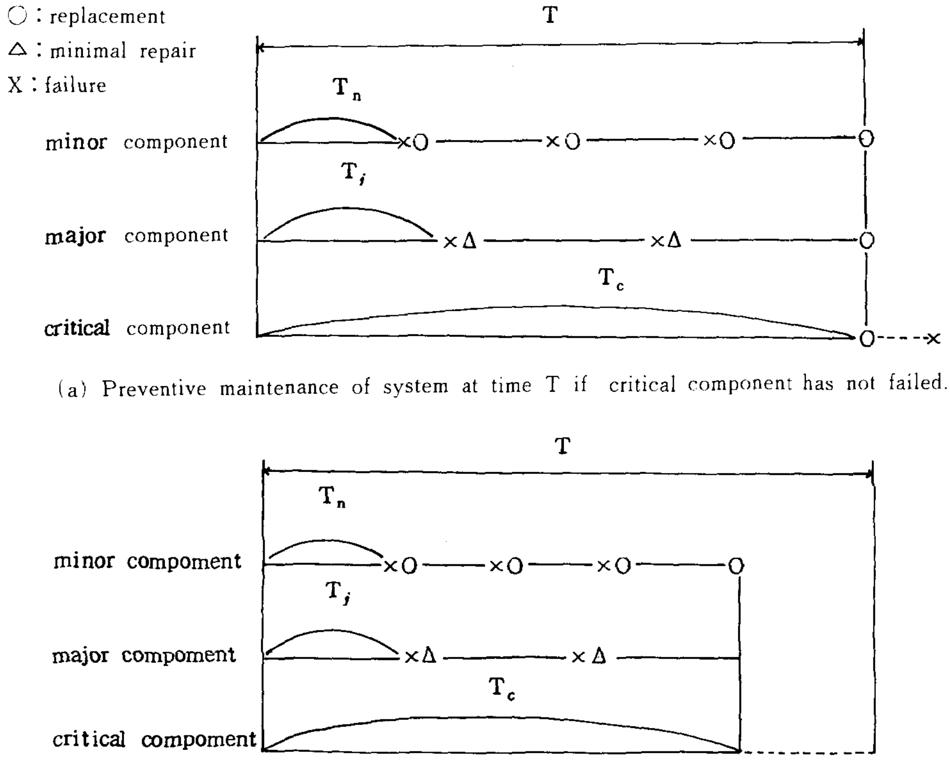
2·1·3 輕部品

시스템 전체의 性能에 거의 영향을 주지 않을 뿐만 아니라, 價格도 저렴해서 修理를 하는 것 보다는 고장이 발생할 때마다 部品을 交換한다.

위의 세가지 部品特性에 따른 시스템의 整備模型으로서, 本硏究에서는 시스템이 壽命交換方針을 따를 경우 다음과 같은 模型을 제시한다.

模型 : 시스템의 壽命交換時點 이전에 致命部品에 고장이 발생하면 시스템을 교환해 주고, 이 時點까지 致命部品의 고장이 없으면 시스템을 壽命交換時點에서 豫防交換을 해준다. 重部品은 시스템의 運用期間내에서 고장이 발생하면 應急修理를 해주고 輕部品은 시스템의 운용기간내에서 고장이 발생할 때마다 교환해 준다.

위 整備模型을 그림으로 나타내면 Fig.1과 같다.



(a) Preventive maintenance of system at time T if critical component has not failed.

(b) Corrective maintenance of system if critical component fails before time T.

Fig. 1. Age Replacement Model of Multi-Component system.

2・2 假定 및 用語說明

2・2・1 假定

① 시스템의 計劃期間은 무한으로 한다.

② 각 部品의 고장은 確率的으로 독립이다.

③ 정비는 고장발생 즉시 이루어지고, 정비시간은 무시할 수 있을 만큼 작다.

④ 각 부품의 交換은 新品으로 이루어진다.

⑤ 應急修理는 고장발생 직전의 故障率만큼만 회복된다.

⑥ 순간고장률 함수는 單調增加하고 연속이다.

2・2・2 用語說明

i : 部品의 종류($i=1$: 致命部品, $i=2$: 重部品, $i=3$: 輕部品)

$F_i(t)$: 部品i의 고장시간의 분포함수

$f_i(t)$: 部品i의 고장밀도함수

$h_i(t)$: 部品i의 순간고장률

$H_i(t)$: 部品i의 누적순간고장률함수

$N_i(t)$: (o, t)사이에서 발생한 部品i의 고장회수

$M_i(t)$: 部品i의 평균재생회수, $E[N_i(t)]$

$m_i(t)$: 部品i의 재생밀도함수

T : 시스템의 교환수명

T^* : 시스템의 最適交換壽命

μ_i : 部品i의 平均壽命

c_1 : 致命部品의 고장으로 인한 시스템의 고장교환비용

c_2 : 시스템의 예방교환비용, $c_1 < c_2$

c_3 : 重部品의 單位當 응급수리비용

c_4 : 輕部品의 單位當 교환비용

$C_i(T)$: 部品i로 인한 [0, T]사이의 期待費用

$C_s(T)$: [0, T]사이의 시스템의 期待費用

$\bar{\mu}(T)$: 교환수명이 T인 시스템의 平均壽命

$\bar{C}_s(T)$: 1회의 整備週期가 T인 시스템을 무한시간동안 사용할 때의 단위시간당 평균비용

3. 시스템의 最適交換壽命의 決定

1회의 整備週期가 T인 시스템의 期待費用은 致命部品으로 인한 期待費用, 重部品으로 인한 期待費用, 輕部品으로 인한 期待費用의 合으로 구할 수 있다.

致命部品으로 인한 期待費用은 致命部品의 고장으로 인한 시스템의 故障交換費用과 시스템의 豫防交換時點까지 致命部品의 고장이 발생하지 않았을 때의 시스템의 豫防交換費用의 合으로써

$$C_1(T) = c_1 F_1(T) + c_2 \bar{F}_1(T),$$

$$\bar{F}_1(T) = 1 - F_1(T) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3.1)$$

이고, 重部品으로 인한 期待費用은 (0, T) 사이의 重部品의 期待應急修理費用으로서

$$\begin{aligned} C_2(T) &= c_3 \left\{ \int_0^T H_2(t) f_1(t)\,dt + H_2(T) \int_T^\infty f_1(t)\,dt \right\} \\ &= c_3 \int_0^T \bar{F}_1(T)\,dH_2(t) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3.2) \end{aligned}$$

이다. 輕部品으로 인한 期待費用은 (0, T)사이의 輕部品의 期待故障交換費用으로서

$$\begin{aligned} C_3(T) &= c_4 \left\{ \int_0^T M_3(t) f_1(t)\,dt + M_3(T) \int_T^\infty f_1(t)\,dt \right\} \\ &= c_4 \int_0^T \bar{F}_1(t)\,dM_3(t) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3.3) \end{aligned}$$

이므로 시스템의 期待費用은 式(3.1), (3.2), (3.3)의 合으로써

$$\begin{aligned} C_s(T) &= c_1 F_1(T) + c_2 \bar{F}_1(T) \\ &+ c_3 \int_0^T \bar{F}_1(t)\,dH_2(t) \\ &+ c_4 \int_0^T \bar{F}_1(t)\,dM_3(t) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3.4) \end{aligned}$$

이다. 또 시스템의 平均壽命은

$$\begin{aligned} \bar{\mu}(T) &= \int_0^T t\,dF_1(t) + T \int_T^\infty f_1(t)\,dt \\ &= \int_0^T \bar{F}_1(t)\,dt \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3.5) \end{aligned}$$

이다.

따라서 1회의 整備週期가 T인 시스템의 單位時間當 平均費用은

$$\begin{aligned} \bar{C}_s(T) &= \lim_{t\to\infty} C_s(t)/t \\ &= \{c_1 F_1(T) + c_2 \bar{F}_1(T) \\ &+ c_3 \int_0^T \bar{F}_1(t)\,dH_2(t) \\ &+ c_4 \int_0^T \bar{F}_1(t)\,dM_3(t)\} / \int_0^T \bar{F}_1(t)\,dt \quad (3.6) \end{aligned}$$

이고 시스템의 1회의 정비주기가 무한일 때 즉, 豫防交換을 하지 않을 때의 單位時間當 平均費用은

$$\begin{aligned} \bar{C}_s(\infty) &= \{c_1 F_1(\infty) + c_2 \bar{F}_1(\infty) + \\ &+ c_3 \int_0^\infty \bar{F}_1(t)\,dH_2(t) \\ &+ c_4 \int_0^\infty \bar{F}_1(t)\,dM_3(t)\} / \int_0^\infty \bar{F}_1(t)\,dt \\ &= \{c_1 + c_3 \int_0^\infty \bar{F}_1(t)\,dH_2(t) \\ &+ c_4 \int_0^\infty \bar{F}_1(t)\,dM_3(t)\} / \mu_1 \quad \cdots\cdots (3.7) \end{aligned}$$

이다.

시스템의 最適交換壽命 T^*을 구하기 위해 單位時間當 平均費用 $\bar{C}_s(T)$를 T로 미분하여 $d\bar{C}_s(T)/dT = D(T) = 0$으로 놓으면

$$d\bar{C}_s(T)/dT = [\{c_1 f_1(T) - c_2 f_1(T) + c_3 \bar{F}_1(T) h_2(T) + c_4 \bar{F}_1(T) m_3(T)\} \int_0^T \bar{F}_1(t)dt - \{c_1 F_1(T) + c_2 \bar{F}_1(T) + c_3 \int_0^T \bar{F}_1(t) dH_2(t) + c_4 \int_0^T \bar{F}_1(t) dM_3(t)\} \bar{F}_1(T)] / (\int_0^T \bar{F}_1(t)dt)^2 \quad \cdots\cdots\cdots (3.8)$$

이고

$$D(T) = \{(c_1 - c_2) h_1(T) + c_3 h_2(T) + c_4 m_3(T)\} \int_0^T \bar{F}_1(t)dt - \{(c_1 - c_2) F_1(T) + c_3 \int_0^T \bar{F}_1(t) dH_2(t) + c_4 \int_0^T \bar{F}_1(t) dM_3(t)\} = c_2 \quad \cdots\cdots\cdots (3.9)$$

이다. 式 (3.9)를 만족하는 有限하고 唯一한 最適交換壽命 T^*가 존재함을 보이기 위해 $D'(T)>0$임을 증명한다.

$D(T)$를 T에 대해 미분하면

$$D'(T) = \{(c_1 - c_2) h_1'(T) + c_3 h_2'(T) + c_5 m_3'(T)\} \int_0^T \bar{F}_1(t)dt \quad \cdots\cdots\cdots (3.10)$$

이다.

각 部品의 순간고장률함수 $h_1(t)$, $h_2(t)$, $h_3(t)$가 단조증가하고 연속이므로 $h_1'(t)>0$, $h_2'(t)>0$ 이고 밀도함수 $f_3(t)$는 미분가능하고 $f_3(0)=0$이다. 따라서 $f_3(t)$는 PF_2(Pólya freguency function order 2)이다. 또 $f_3(t)$가 PF_2이면 $f_3(t)$는 unimodal 이므로 $f_3'(x_0)=0$일 때 $x_0<t<\infty$에 대해 $f_3'(t)<0$이고, $0<t<x_0$에 대해 $f_3'(t)>0$이다. [2]

이제 기본적인 再生函數에서

$$M_3(t) = F_3(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t F_3^{(n)}(t-x) dF_3(x) = F_3(t) + \int_0^t M_3(t-x) dF_3(x) \quad (3.11)$$

이고 $F_3(t)$가 밀도함수 $f_3(t)$를 갖는다면

$$m_3(t) = dM_3(t)/dt = f_3(t) + \int_0^t m_3(t-x) f_3(x) dx \quad \cdots \quad (3.12)$$

이고, $f_3(t)$, $f_3(0)=0$가 미분가능하므로 $m_3(t)$를 t로 미분하여

$$m_3'(t) = f_3'(t) + \int_0^t m_3(t-x) f_3'(x) dx \quad (3.13)$$

이다. 따라서 $0<t\leq x_0$에 대해 $m_3'(t)>0$이다. 그러므로 다음과 같이 시스템의 最適交換壽命을 구할 수 있다.

$c_1>c_2>0$, $c_3>0$, $c_4>0$일 때 $0<t<\infty$에 대해서 $h_1(t)$, $h_2(t)$가 연속이며 單調增加하는 순간고장률이며 $m_3'(t)>0$라 하자.

(1) 만약 $h_1(\infty)>N$,

$$N = \{c_1 + c_3 \int_0^\infty \bar{F}_1(t) dH_2(t) - c_3 \mu_1 h_2(\infty) + c_4 \int_0^\infty \bar{F}_1(t) dM_3(t) - c_4 \mu_1 m_3(\infty)\} / (c_1 - c_2) \mu_1 \quad \cdots\cdots\cdots (3.14)$$

이면 式 (3.9)를 만족하는 有限하고 唯一한 最適交換壽命 T^*가 존재하며 이때의 最適單位時間當 平均費用은

$$\bar{C}_s(T^*) = (c_1 - c_2) h_1(T^*) + c_3 h_2(T^*) + c_4 m_3(T^*) \quad \cdots\cdots (3.15)$$

이다.

(2) 만약 $h_1(\infty)\leq N$이면 $T^*\to\infty$이다. 즉, 最適交換壽命은 致命部品이 고장날 때만 시스템을 交換하는 것이다.

4. 數値例

本硏究에서 제시한 시스템의 最適交換壽命을 구하는 數値例를 보이기 위해 다음과 같은 部品의 故障時間의 分布函數를 가정한다.

감마분포(gamma distribution)의 밀도함수가

$$f(t) = \lambda \exp(-\lambda t)(\lambda t)^{\alpha-1} / \Gamma(\alpha)$$
$$\alpha>0, \ \lambda>0, \ 0<t\leq\infty \quad \cdots\cdots\cdots (4.1)$$

일 때 致命部品 : $\alpha=2$, $\lambda=1$, 重部品 : $\alpha=2$, $\lambda=$

Table 1. Optimum Age Replacement Tmes and Optimum Cost Rates

c_1	T^*	$\bar{C}_s(T^*)$	Gain*(%)
5	1.23	2.689	5.8
6	1.03	3.014	10.1
7	0.89	3.296	14.5
8	0.79	3.555	18.4
9	0.72	3.810	21.5
10	0.67	4.068	24.0
20	0.41	5.951	42.5
30	0.32	7.438	51.6
40	0.27	8.685	57.3
50	0.24	9.867	61.1
100	0.16	13.997	72.2

$* \text{Gain} = \{(\bar{C}_s(\infty) - \bar{C}_s(T^*)/\bar{C}_s(\infty)\} \times 100(\%)$

8, 輕部品 : $\alpha=2$, $\lambda=12$인 경우에서 $c_2=1.0$, $c_3=0.05$, $c_4=0.02$에 대해 $c_1=5$, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50, 100으로 증가시켜 가면서 각각의 C_1에 대해 最適交換壽命, 最適單位時間當 平均費用, 豫防整備效果를 구하면 Table 1과 같다.

5. 結 論

本研究에서는 시스템을 구성하고 있는 部品들이 그 特性에 적합한 각기 다른 整備方法을 가지고 있을 때 總整備費用을 最小로 하는 多部品시스템의 最適交換壽命을 구하였다.

현재까지의 시스템의 壽命交換方針에 대한 연구는 주로 單一시스템에 대해 정비비용을 최소로 하는 交換壽命을 결정하였고, 多部品시스템에 대한 壽命交換方針도 각 部品의 故障이 確率的으로 독립이고 경제적으로도 관련이 없다는 가정하에 이루어졌기 때문에 單一部品에 대한 壽命交換方針의 결정과 일치했다.

그러나 本 研究에서는 多部品시스템을 구성하고 있는 部品들을 致命部品, 重部品, 輕部品으로 나누어 각 部品의 特性에 맞게 致命部品은 壽命交換方針을 따르고, 重部品은 시스템을 교환할 때까지 應急修理만 하는 方針을, 輕部品은 시스템의 交換壽命내에서 고장이 날 때마다 교환해 주는 故障交換方針을 따를 때 시스템의 總整備費用을 最小로 하는 시스템의 最適交換壽命을 구함으로써 보다 현실적인 多部品시스템의 整備模型을 제시하였다.

本研究에서는 部品의 交換에 필요한 시간과 部品의 修理時間을 무시한다고 가정하였으나 交換時間과 修理時間을 고려한 多部品시스템의 整備模型에 대한 研究도 앞으로의 研究과제라 생각한다.

參 考 文 獻

1. Barow, R.E., Hunter, L.C., "Optimal Preventive Maintenance Policies," *Operations Research, 8*, pp. 90−100, 1960.
2. ______, Proschan, F., *Mathematical Theory of Reliability*, John Wiley and Sons, Inc., 1965.
3. Beichelt, F., Fischer, K., "General Failure Model Applied to Preventive Maintenance Policies," *IEEE Trans. Reliability, R-29(1)*, pp. 39−41, April, 1980.
4. Duncan, A.J., *Quality control and Industrial Statistics*, Richard D. Irwin, Inc., 1974.
5. Muth, E.J., "An Optimal Decision Rule for Repair Vs Replacement," *IEEE Trans. Reliability, R-26(3)*, pp. 179−181, August, 1977.
6. Murthy, D.N.P., Nguyen, D.G., "Optimal Age-Policy with Imperfect Preventive Maintenance," *IEEE Trans. Reliability, R-30(1)*, pp. 80−81, April, 1981.
7. Nakagawa, T., Kowada, M., "Analysis of a System with Minimal Repair and Its Application to Replacement Policy," *European Journal of Operations Research, 12*, pp. 176−182, 1983.
8. Phelps, R.I., "Optimal Policy for Minimal Repair," *Journal of the Operational Research society, 34(5)*, pp. 425−427, 1983.