

# Hyperstability 이론에 기초를 둔 이산기준모델적응제어

## (Discrete Model Reference Adaptive Control Based on Hyperstability Theory)

威 雲 哲\*, 崔 桂 根\*\*

(Woon Chul Ham and Keh Kun Choi)

### 要 約

본 논문에서는 V.M. Popov의 hyperstability 이론을 통하여, 단일 입, 출력 이산시스템에 적용 될 수 있는 일반화 된 기준모델적응제어이론을 소개한다. 또한 본 논문을, 통하여 Narendra에 의하여 제시 된 이산적응제어이론이 본 논문에서 제시 된 새로운 제어의 특별한 경우임을 밝히며, hyperstability 이론을 통한 제어기의 parameter adaptation의 방식들을 제시한다.

### Abstract

In this paper, we propose a generalized model reference adaptive control theory which can be applied to single-input single-output discrete system by using V. M. Popov's hyperstability theory. As the result of theoretical analysis, it is proved that the discrete adaptive control scheme proposed by Narendra is a special case of the adaptive control schemes proposed in this paper. Also we suggest a variety of parameter adaptations methods of controller through hyperstability theory.

### I. 서 론

1973년 Lindorff와 Carroll<sup>(1)</sup>에 의하여 적응관측기 이론이 소개된 이후, 적응제어 이론에 대하여 많은 연구가 행하여져 왔다. 최근에는 deterministic한 단일 입, 출력공정에 대하여 global stability를 갖는 적응제어 이론에 관한 논문들이 많이 발표되고 있으나, 대부분 안정도 분석에 있어서 매우 복잡한 면을 보이고 있다.

본 논문에서는 deterministic한 단일 입, 출력 공정에 적용 될 수 있는 기준모델 적응제어 이론을 hyperstability 이론<sup>(2,3)</sup>을 토대로 하여 구현하였다. 물론 적응제어이론에 있어서 global stability를 갖는 제어기의 구성에 대하여 Feuer과 Morse<sup>(4)</sup>가 제시한 바 있으나 그 제어기 구조가 매우 복잡하다는 단점을 갖고 있다. 그 후 Narendra<sup>(5-7)</sup>에 의해 augmented error를 이용하여 global stability 갖는 기준모델 적응제어이론이 positive real 연산자를 통하여 구현되었으며, 이 경우 제어기의 구조가 매우 간단하다는 장점을 갖고 있다. 그럼에도 불구하고 global stability의 분석이 매우 복잡하여 제어기의 구조에 다양성을 갖지 못하고 있는 실정이다. 그러나 Narendra가 제시한 제어기 구조를 hyperstability 이론을

\*正會員, 全北大學校 電子工學科  
(Dept. of Elec. Eng., Chonbuk Nat'l Univ.)

\*\*正會員, 서울大學校 電子工學科  
(Dept. of Elec. Eng., Seoul Nat'l Univ.)

接受日字: 1987年 9月 30日

통하여 고찰하여 보면 global stability 분석뿐 아니라, 제어기 구조의 다양한 형태도 쉽게 다루어 볼 수 있다. 따라서 본 논문은 Narendra가 제시한 제어기 구조를 근거로 하여 이론을 전개하여 나아가며 본 논문의 골자인 안정도 분석에 있어서는 hyperstability 이론을 도입하여 분석하며 아울러 기존에 Narendra에 의하여 보여진 Lyapunov 안정도 분석과 등가임을 밝히며 또한 제어기 구조에 있어서 다양한 형태를 살펴 본다.

## II. 수학적 기초

본 절에서는, 본 논문의 제어기구조에 대한 안정도 분석의 중요한 역할을 하는 hyperstability 이론을 소개한다. Hyperstability 이론은 루마니아의 수학자 V. M. Popov에 의하여 소개되었으며 그림 1과 같이 선형인 feedforward block과 비선형인 feedback block을 통하여 구현된 시스템에 대한 absolute stability를 다룬 내용이다.

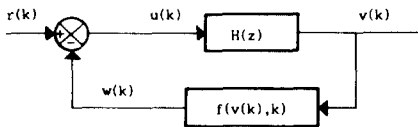


그림 1. 비선형 시변 케환 시스템

Fig. 1. Nonlinear time-varying feedback system.

다음과 같이 비선형시스템의 입, 출력이 아래와 같은 식을 만족하는 경우를 popov integral inequality라고 한다.

$$\eta(0, k) = \sum_{i=0}^k v(i) w(i) \geq -r_0, \quad \text{모든 } k > 0, \quad (1)$$

어떤 양의 상수  $r_0$

위 그림 1에서 선형시불변 feedforward 블록과 비선형 feedback 블록을 다음과 같이 표현한다.

$$x(k+1) = A x(k) + b u(k) = A x(k) - b w(k) \quad (2)$$

$$v(k) = c^T x(k) + d u(k) = c^T x(k) - d w(k) \quad (3)$$

$$w(k) = f(v(k), k) \quad (4)$$

이 경우 다음과 같은 정의들을 한다.

[정의 1]

식 (1)과 같은 popov integral inequality를 만족하는 어떠한 비선형 feedback 블록에 대하여서도, 식

(2), (3)의 모든 해가 만일 아래와 같은 식을 만족하도록 하는 양의 상수  $r_0, \delta$ 가 존재할 경우, 식 (2), (3), (4)로 구성된 시스템은 hyperstable 하다고 한다.

$$\|x(k)\| \leq \delta [\|x(0)\| + r_0], \quad \text{모든 } k \geq 0. \quad (5)$$

[정의 2]

식 (2), (3), (4)로 구성된 페루프 시스템이 다음 2가지 조건을 만족할 경우, asymptotically hyperstable 하다고 한다.

[조건 1] hyperstable 하다.

[조건 2] 식 (1)을 만족하는 모든 functional  $w(k) = f(v(k), k)$ 에 대하여  $\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = 0$ .

위와 같이 정의된 내용을 토대로 하여 hyperstability의 중요한 정리를 살펴보면 다음과 같다.

[정리 1]

식 (2), (3), (4)와 식 (1)을 만족하는 페루프 시스템이 asymptotically hyperstable 할 필요, 충분조건은 식 (2), (3)으로 표현되는 feedforward 블록의 전달함수  $H(z)$ 가 strictly positive real이면 된다. 단,

$$H(z) = d + c^T [zI - A]^{-1} b.$$

## III. 적응제어이론

### 1. 제어기 구조

제어하고자 하는 공정은 최소위상인 경우에 국한하며, 다음과 같은 시불변이산시스템으로 설정한다.

$$x_p(k+1) = A_p x_p(k) + b_p u_p(k) \quad (6)$$

$$y_p(k) = c_p^T x_p(k) \quad (7)$$

여기서  $A_p$ 는 미지의  $n \times n$  상수행렬,  $c_p, b_p$ 는 미지의  $n \times 1$  벡터이다. 따라서 공정의 전달함수는 다음과 같이 표현된다.

$$W_p(z) = c_p^T (zI - A_p)^{-1} b_p = \frac{k_p N_p(z)}{D_p(z)} \quad (8)$$

여기서  $N_p(z), D_p(z)$ 는 모두 monic 다항식으로 각각의 차수를  $m, n$  이라고 놓을 경우  $m$ 은  $n$ 보다 작다. 즉,  $W_p(z)$ 은 strictly proper 하다. 또한 공정이 쫓고자 하는 모델의 전달함수는 다음과 같다.

$$W_m(z) = \frac{k_m N_m(z)}{D_m(z)} \quad (9)$$

$N_m(z), D_m(z)$ 은 모두 monic 다항식으로  $D_m(z)$ 은 안정다항식으로 차수는  $n$ 이며  $N_m(z)$ 의 차수는  $m$ 이다.

공정을 제어하는 목적은 유한한 기준입력  $r(k)$  에 대하여 공정과 모델사이의 출력오차  $e_1(k) = y_p(k) - y_m(k)$  를 시간이 무한히 증가함에 따라 0으로 보내는데 있으며 동시에 각종 상태변수들을 유한하게 유지하는데 있다.

모델의 전달함수  $W_m(z)$ 가 일반적으로 strictly positive real 하지 않은 관계로 제어기의 구조에 있어서 모델의 입력에 여분의 신호를 케환하였으며, 4장에서 알 수 있듯이 global stability 를 위하여 중요한 역할을 함을 알 수 있다. 또한 제어기 구조에 있어서 그림 2에서와 같이 관측기를 사용하였다.

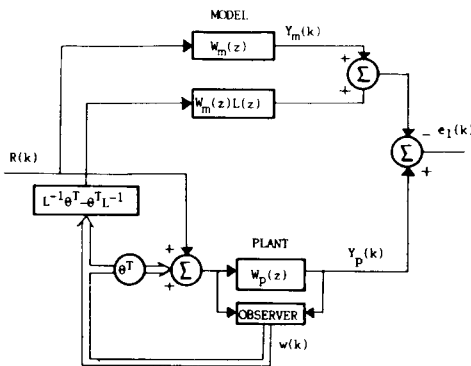


그림 2. 전체적인 시스템의 block diagram  
Fig. 2. Block diagram of overall system.

[관측기]

(관측기 1)

$$v_1(k+1) = F v_1(k) + b u_p(k) \tag{10}$$

$$w_1(k) = c_1^T v_1(k) \tag{11}$$

(관측기 2)

$$v_2(k+1) = F v_2(k) + b y_p(k) \tag{12}$$

$$w_2(k) = c_2^T v_2(k) + d y_p(k) \tag{13}$$

여기서  $F$  는  $(n-1) \times (n-1)$  안정행렬,  $b, c_1, c_2$  는  $(n-1) \times 1$  벡터,  $d$  는 스칼라로써  $(F, b)$  가 제어가능한 쌍이 되도록 설정하며 다음과 같다.

$$\begin{aligned} b &= [0, 0, \dots, 0, 1] \\ c_1^T &= [c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1n-1}] \\ c_2^T &= [c_{21}, c_{22}, \dots, c_{2n-1}] \end{aligned} \tag{14}$$

따라서 관측기 1, 2의 전달함수를 각각  $W_1(z), W_2(z)$  로 놓으면 다음과 같다.

$$W_1(z) = c_1^T (z I - F)^{-1} b = H_1(z) / N(z) \tag{15}$$

$$W_2(z) = d + c_2^T (z I - F)^{-1} b = H_2(z) / N(z) \tag{16}$$

따라서  $r(k)$  와  $y_p(k)$  사이의 전달함수  $W(z)$  는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{k_0 W_p(z)}{1 + W_1(z) + W_p(z) W_2(z)} \\ &= \frac{k_0 k_p N_p(z) N(z)}{[N(z) + H_1(z)] D_p(z) + k_p N_p(z) H_2(z)} \end{aligned} \tag{17}$$

이 경우  $D_p(z)$  와  $N_p(z)$  가 서로 소일 경우,  $N_m(z)$  를 인수로 갖도록  $N(z)$  를 설정하면  $W(z)$  를  $W_m(z)$  로 만드는  $H_1(z), k_0, H_2(z)$  는 항상 존재한다.<sup>[8]</sup> 단,  $k_0$  는  $k_m/k_p$  이다. 그림 2에서 보는 바와 같이 제어법칙은 다음과 같다. 단, 수학적 해석의 편의를 위하여  $k_p$  와  $k_m$  은 1로 가정한다.

$$\begin{aligned} u_p(k) &= r(k) - w_1(k) - w_2(k) \\ &= r(k) - c_1^T v_1(k) - c_2^T v_2(k) - d y_p(k) \end{aligned} \tag{18}$$

다음과 같이  $\theta^*, \theta(k), w(k)$  를 정의한다.

$$\begin{aligned} \theta^{*T} &= [-c_{11}, \dots, -c_{1n-1}, -c_{21}, \dots, -c_{2n-1}, -d] \\ \theta(k)^T &= [-c_{11}(k), \dots, -c_{1n-1}(k), -c_{21}(k), \dots, \\ &\quad -c_{2n-1}(k), -d(k)] \\ w(k)^T &= [v_1^T(k), v_2^T(k), y_p(k)] \\ \theta(k) &= \theta^* + \phi(k) \end{aligned} \tag{19}$$

이 경우 식 (17)에서 살펴보았듯이  $\theta(k) = \theta^*$  일 경우  $W(z)$  는  $W_m(z)$  와 같아짐을 알 수 있다. 그러나 제어기의 parameter 가 참값  $\theta^*$  로 식별되지 않을 경우, 모델과 공정사이의 출력오차가 발생하게 된다.

그림 2에서 알 수 있듯이 모델의 출력 및 공정의 출력은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} y_m(k) &= W_m(z) r(k) + W_m(z) w(k)^T \phi(k) \\ &\quad - W_m(z) L(z) \phi(k)^T L(z)^{-1} w(k) \end{aligned} \tag{20}$$

$$y_p(k) = W_m(z) r(k) + W_m(z) w(k)^T \phi(k) \tag{21}$$

오차분석의 편의를 위하여 그림 2와 등가인 시스템 구성도를 그림 3에 보였다.

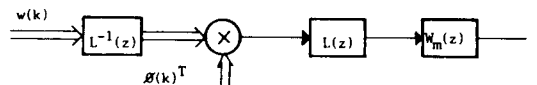


그림 3. 오차분석을 위한 등가적인 시스템 구성도  
Fig. 3. Equivalent system structure for error analysis.

따라서 모델과 공정 사이의 출력오차  $e_1(k)$  는 다음과 같이 표현된다.

$$e_1(k) = y_p(k) - y_m(k) = W_m(z) L(z) \phi(k)^T L(z)^{-1} w(k) \quad (22)$$

다음과 같이 새로운 신호  $s(k)$  를 정의한다.

$$s(k) = L(z)^{-1} w(k) \quad (23)$$

여기서  $L(z)$ 는 안정도 분석에 있어서 hyperstability 이론을 적용하기 위하여  $W_m(z)L(z)$ 가 strictly positive real 이 되도록 설정한다.

일반적으로  $L(z)$  는  $W_m(z)$  와 역의 관계를 갖도록 설정한다. 즉  $L(z)$  를  $W_m(z)^{-1}$ 로 설정하는 것이 상례이다.

2. 적응법칙

본 절에서는 기존에 Narendra 가 제시한 적응법칙을 수정한 새로운 적응법칙을 소개한다. 즉, 모델과 공정사이의 출력오차에 비례하는 항 및 이를 적분한 것에 비례하는 항 두가지를 고려하여 다음과 같은 적응알고리즘1을 제시한다.

적응알고리즘1.

$$\theta_p(k) = -\mu D s(k) e_1(k) \quad (24)$$

$$\theta_i(k) = \theta_i(k-1) - D s(k-1) e_1(k-1) \quad (25)$$

$$\theta(k) = \theta_p(k) + \theta_i(k) \quad (26)$$

단,  $D$  는  $(2n-1) \times (2n-1)$  symmetric positive definite 행렬이다.

다음과 같은 정의를 한다.

$$\begin{aligned} \phi(k) &= \theta(k) - \theta^* \\ \phi_i(k) &= \theta_i(k) - \theta_i^* \end{aligned} \quad (27)$$

따라서 다음과 같은 식이 성립한다.

$$\phi(k) = \theta_p(k) + \phi_i(k) = -\mu D s(k) e_1(k) + \phi_i(k) \quad (28)$$

또한 error 분석을 하기 위하여 적응알고리즘1을 사용한 전체적인 시스템을 다시 구현하여 보면 그림 4와 같다. 이 경우 4장 안정도 분석에서 알 수 있듯이 전체시스템이 안정함을 알 수 있다. 단, parameter 추정치  $\theta(k)$  의 유한함을 해석하기 어려운 면이 있다. 또 한가지의 단점은 P. V. Kokotovic<sup>[9,10]</sup> 이 지적한 바와 같이 모델이 match 가 되지 않거나 공정에 disturbance 가 발생할 경우  $\theta(k)$  가 무한히 증가하여 제어가 잘 되지 않는 점이다. 따라서 이러한 결점들을 보완하기 위하여 또 다른 적응알고리즘 2

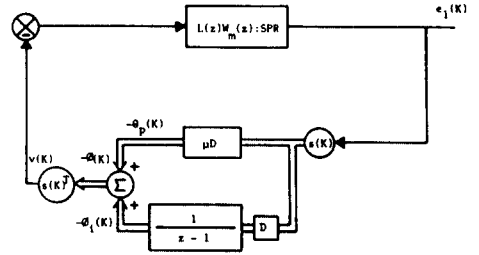


그림 4. 안정도 분석을 위한 제어기 구조 (알고리즘1의 경우)

Fig. 4. Controller structure for stability analysis. (for algorithm1).

를 소개한다.

적응알고리즘2를 고찰하여 보면 적응알고리즘 1 과 구조적인 면은 유사하나 적응법칙에 있어서 모델이 match 가 되지 않거나 공정에 disturbance 가 발생할 경우를 위하여 공정의 출력이 위에서 언급한 disturbance 의 정도를 미리 예측하여  $N_d$ 로 하여 모델과 공정의 출력오차가  $N_d$ 보다 작을 경우는 parameter adaptation 을 하지 않으며 동시에 과거 데이터 보다는 현재 부근의 데이터에 가중을 두어 parameter 를 찾고 있음을 알 수 있으며, 또한 P. V. Kokotovic 이 제기한 문제점도 해결할 수 있으므로 이 알고리즘은 현재 많은 연구가 되고 있는 적응제어에 있어서의 robustness 를 다룬 분야에도 활용될 수 있을 것이다. 또한 error 분석을 하기 위하여 적응알고리즘을 사용한 전체적인 시스템을 구현하여 보면 그림 5와 같다.

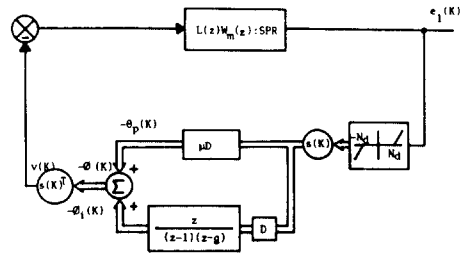


그림 5. 안정도 분석을 위한 제어기 구조 (알고리즘2의 경우)

Fig. 5. Controller structure for stability analysis. (for algorithm2).

적응알고리즘2.

$$e_c(k) = e_1(k) - N_d \quad \text{만일 } e_1(k) \geq N_d$$

$$= e_1(k) + N_d \quad \text{만일 } e_1(k) \leq -N_d$$

$$= 0 \quad \text{만일 } |e_1(k)| < N_d$$

$$\theta_p(k) = -\mu D s(k) e_c(k) \quad (29)$$

$$\theta_i(k) = (1+g) \theta_i(k-1) - g \theta_i(k-2) - D s(k-1) e_c(k-1) \quad (30)$$

$$\theta(k) = \theta_p(k) + \theta_i(k) \quad (31)$$

단,  $D$ 는  $(2n-1) \times (2n-1)$  symmetric positive definite 행렬이다.

이 경우 또한 4장에서 알 수 있듯이 전체시스템이 안정함을 알 수 있다.

3. 제어기 실현

2절에서 다룬 적응알고리즘 1 및 적응알고리즘 2를 살펴 볼 때 실제 공정에 적용하는 경우나 컴퓨터 시뮬레이션을 수행할 경우에는 causality가 문제가 된다. 따라서 적응알고리즘 1 및 적응알고리즘 2를 실제 시스템에 적용하거나 컴퓨터 시뮬레이션을 수행하기 위하여서는 3장 그림 2의 제어기 구조 및 2절에서 다룬 알고리즘들과 등가적인 제어기 구조 및 적응알고리즘을 구하여야 한다. 이러한 이유에서 그림 6과 같은 수정된 제어기 구조를 제안한다.

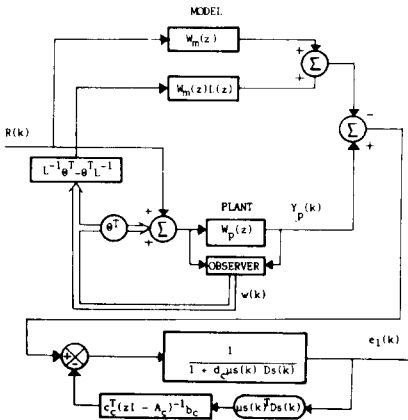


그림 6. 실구현을 위한 수정된 제어기 구조  
Fig. 6. Modified controller structure for realization.

단, 위 그림에서  $d_c + c_c^T(zI - A_c)^{-1} b_c$ 는  $L(z) W_m(z)$ 의 전달함수를 나타낸다.

따라서 위와 같은 제어기 구조를 사용할 경우 2절의 적응알고리즘 1 및 적응알고리즘 2는 다음과 같

이 수정되어야 한다.

[수정적응알고리즘 1]

$$\theta(k) = \theta(k-1) - D s(k-1) e_1(k-1) \quad (32)$$

[수정적응알고리즘 2]

$$\theta(k) = (1+g) \theta(k-1) - g \theta(k-2) - D s(k-1) e_c(k-1) \quad (33)$$

(예제)  $L(z) W_m(z) = 1$ 인 경우

앞에서 언급한 바와 같이 일반적으로  $L(z)$ 는  $W_m(z)^{-1}$ 로 설정하며, 이 경우에 대하여 제어기 구조에 들어가는 모든 신호들은 다음과 같이 나타난다.

$$y_m(k) = W_m(z) r(k) \quad s(k) = W_m(z) w(k)$$

$$e_1(k) = \frac{y_p(k) - y_m(k) - W_m(z) \theta(k)^T w(k) + \theta(k)^T W_m(z) w(k)}{1 + \mu s(k)^T D s(k)}$$

IV. 안정도 분석

1. Hyperstability 이론에 의거한 안정도 분석

이 절에서는 새로이 제안한 제어기 구조 및 적응법칙을 사용한 제어알고리즘들의 global 안정도를 2장에서 다룬 hyperstability 이론을 이용하여 분석한다. 그림 4, 그림 5에서 알 수 있듯이 전체적인 시스템은 strictly positive real 한 선형시불변 feed-forward 블록과 비선형 feedback 블록으로 구성되어 있으므로 hyperstability 이론을 통하여 다음과 같은 정리들을 얻을 수 있다.

[정리 1]

그림 4로 표시되는 전체적인 시스템은 기준입력  $r(k)$ 가 유한하고 식 (24)의  $\mu$ 가 0.5보다 큰 경우 항상 asymptotically stable 하다.

(증명)

Hyperstability 이론을 이용하면  $v(k)$ 와  $e_1(k)$  사이에 popov integral inequality가 성립함을 보이기만 하면 된다. 이를 위하여서는 그림 4에서 알 수 있듯이  $T_1(z)$ 이 strictly positive real 임을 보이면 된다. 단,  $T_1(z)$ 은 다음과 같다.

$$T_1(z) = \mu + \frac{1}{z-1} \quad (34)$$

따라서  $\mu$ 가 0.5보다 큰 경우,  $T_1(z)$ 이 strictly positive real 임을 알 수 있다. -증명끝-

[정리 2]

그림 5로 표시되는 전체시스템은 기준입력  $r(k)$ 가 유한하고 식 (29)의  $\mu$ 가 다음과 같은 조건을 만족할 경우 항상 asymptotically stable 하다.

$$\mu > \max_w \frac{(1+g)(\cos w - 1)}{[\cos 2w - (g+1)\cos w + g]^2 + [\sin 2w - (g+1)\sin w]^2}$$

(증명)

정리 1의 증명과 마찬가지로 방법으로 그림 5에서 알 수 있듯이  $T_2(z)$ 가 strictly positive real임을 보이면 된다. 단,  $T_2(z)$ 은 다음과 같다.

$$T_2(z) = \mu + \frac{z}{(z-1)(z-g)} \quad (35)$$

따라서  $\mu$ 가 정리 2에서의 조건을 만족한다면  $T_2(z)$ 는 strictly positive real임을 알 수 있다. -증명끝- 따라서 정리 2에 의하여 아래와 같은 표 1을 얻을 수 있다. 즉, 알고리즘 2를 사용할 경우 parameter adaptation의 가중치  $g$ 의 값에 따른  $\mu$ 의 최소값  $\mu_{\min}$  사이의 관계를 보여주고 있다.

표 1. 알고리즘 2에 있어서의 가중치  $g$ 와  $\mu_{\min}$  사이의 관계

Table 1. Relation between weighting factor  $g$  and  $\mu_{\min}$  for algorithm 2.

$g$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$\mu_{\min}$	0.68	0.94	1.40	2.00	3.00	5.00	9.50	22.5	95.0

2. Lyapunov 안정도 이론에 의거한 안정도 분석 본 절에서는 앞에서 언급한 Hyperstability 이론과는 다른 안정도 분석 방법으로 Lyapunov 안정도 이론을 근거로 하여 제시한 제어 알고리즘이 global 안정함을 보이며 이 경우 앞에서 서술한 hyperstability 이론을 이용한 안정도 분석에서의와 같은 결론을 갖음을 증명한다.

### 1) 알고리즘 1의 경우

알고리즘 1을 사용하였을 경우 그림 4에서 보는 바와 같이 제어기를 포함한 공정과 모델 사이의 오차는 다음과 같은 상태방정식으로 표현 될 수 있다.

$$e(k+1) = A_c e(k) + b_c \phi(k)^T s(k) \quad (36)$$

$$e_1(k) = c_c^T e(k) + d_c \phi(k)^T s(k) \quad (37)$$

여기서  $\phi(k)^T s(k)$ 와  $e_1(k)$ 사이의 전달함수  $d_c + c_c^T(zI - A_c)^{-1}b_c$ 은  $L(z)W_m(z)$ 로써 strictly positive real이다. 또한 적응알고리즘 1로부터 다음과 같은 식이 성립한다.

$$\phi_1(k+1) = \phi_1(k) - D s(k) e_1(k) \quad (38)$$

$$\phi(k) = \phi_1(k) - \mu D s(k) e_1(k) \quad (39)$$

따라서 오차의 안정도 분석을 위한 Lyapunov 함수  $V(k)$ 를 다음과 같이 설정한다.

$$V(k) = e(k)^T P e(k) + \phi_1(k)^T D^{-1} \phi_1(k) \quad (40)$$

전달함수  $L(z)W_m(z)$ 가 strictly positive real이므로 Kalman-Yacubovich lemma에 의하여 다음 식들이 성립한다.

$$A_c^T P A_c - P = -qq^T, \quad b_c^T P A_c = c_c^T - wq^T, \quad b_c^T P b_c = 2d_c - w^2$$

따라서  $\nabla V(k) = V(k+1) - V(k)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \nabla V(k) = & [e(k)^T \phi(k)^T s(k)] \begin{bmatrix} -qq^T - wq^T \\ -wq \quad -w^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(k) \\ \phi(k)^T s(k) \end{bmatrix} \\ & + 2\phi(k)^T s(k) (2d_c \phi(k)^T s(k) + c_c^T e(k)) \\ & - 2\phi_1(k)^T s(k) e_1(k) + s(k)^T D s(k) e_1(k)^2 \end{aligned} \quad (41)$$

식 (39)를 위 식에 적용할 경우  $\nabla V(k)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \nabla V(k) = & [e(k)^T \phi(k)^T s(k)] \begin{bmatrix} -qq^T - wq^T \\ -wq \quad -w^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(k) \\ \phi(k)^T s(k) \end{bmatrix} \\ & + (1-2\mu) s(k)^T D s(k) e_1(k)^2 < 0, \quad \text{단} \\ & \mu > 0.5 \end{aligned} \quad (42)$$

따라서  $\mu$ 가 0.5보다 큰 경우 전체시스템은 안정하며 또한 아래 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} s(k)^T D s(k) e_1(k)^2 = 0, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} e_1(k) = 0 \end{aligned}$$

### 2) 알고리즘 2의 경우

알고리즘 2를 사용하였을 경우에 대한 안정도를 Lyapunov 안정도 이론에 의거하여 분석하기 위하여서는 먼저 Lyapunov 함수를 찾아내야 한다. 그러나 이 경우 Lyapunov 함수를 찾는 것이 매우 어려운 관계로 Lyapunov 안정도에 의거하여 안정도를 분석한다는 것은 가능한 하겠지만은 상당히 어려운 문제가 된다. 따라서 이 경우에는 hyperstability 이론에 의거하여 안정도를 분석하는 것이 훨씬 쉽다는 것을 단적으로 보여준다고 하겠다.

## V. 컴퓨터시뮬레이션

본 논문에서의 컴퓨터시뮬레이션은 다음과 같은 두가지 경우의 공정에 대하여 수행하였다.

[공정 1]

$$y_p(k) = 1.2y_p(k-1) - 0.35y_p(k-2) + u_p(k-1) + 0.4u_p(k-2)$$

[공정 2]

$$y_p(k) = 1.4y_p(k-1) - 0.33y_p(k-2) + u_p(k-1) + 0.4u_p(k-2)$$

(모 델)

$$y_m(k) = 1.0y_m(k-1) - 0.24y_m(k-2) + r(k-1) + 0.5r(k-2)$$

위의 식으로부터 알 수 있듯이 공정 1은 극점이 0.5, 0.7로 안정하며, 공정 2는 극점이 1.1, 0.3으로 불안정하다. 또한 제어기 구조에서 관측기의 구성은 1차로 하였으며, 극점의 선정은 3장에서 다룬 이론을 토대로 하여 쫓고자 하는 모델의 영점과 같도록 0.5로 하였다. 제어기 parameter의 초기치는 아래와 같이 설정하였다.

$$\theta(0)^T = [0, 0, \dots, 0]$$

그림 7은 공정 1에 대하여, 알고리즘 1 및 알고리즘 2를 적용하여 기준 입력  $r(k)$ 가 10일 때의 공정의 출력  $y_p(k)$  및 모델의 출력  $y_m(k)$ 의 파형이다. 알고리즘 1에서의  $\mu$ 는 2.0, D는 0.1 I인 대각행렬로 하였으며, 알고리즘 2에 있어서의  $\mu$ 는 18, g는 0.7, D는 0.05 I인 대각행렬로 하였다. 그림에서 보듯이 두 알고리즘 모두 약 50 스텝만에 공정의 출력  $y_p(k)$ 가 ripple 없이 모델의 출력을 잘 쫓고있음을 알 수 있다. 또한 알고리즘 2의 경우가 알고리즘 1의 경우에 비교하여 좀 더 개선된 양상을 보여주고 있다. 그림 8은 공정 1에 대하여 기준 입력  $r(k)$ 가 -10, +10인 구형파 일때의 알고리즘 1 및 알고리즘 2를 적

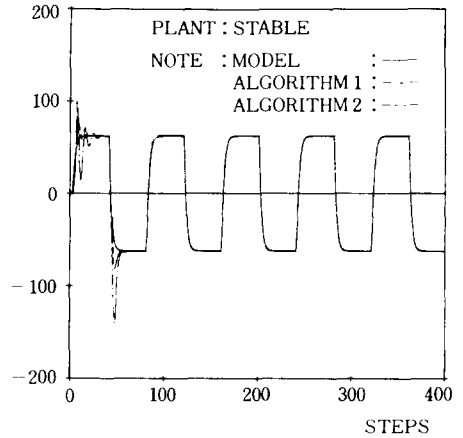


그림 8. 안정한 공정에 대한 구형파형 추종곡선  
Fig. 8. Square wave tracking curve for stable plant.

용한 경우에 대한 파형으로, 두 알고리즘 모두 스텝이 진행 됨에 따라 공정의 출력이 점차적으로 모델의 출력에 접근하여 감을 알 수 있다. 그림 9, 10은 공정 2에 대하여 그림 7, 8에서와 마찬가지로의 경우로  $r(k)$ 를 설정하였을 경우에 대한 파형으로 그림 7, 8에서와 마찬가지로 공정의 출력이 모델의 출력을 잘 쫓고 있음을 알 수 있다. 따라서 위의 컴퓨터시뮬레이션을 통하여 제시한 제어이론이 안정한 공정 및 불안정한 공정에 대하여 적용 될 수 있음을 알 수 있으며, 또한 알고리즘 2가 알고리즘 1에 비하여 개선된 특성을 갖고 있음을 알 수 있다.

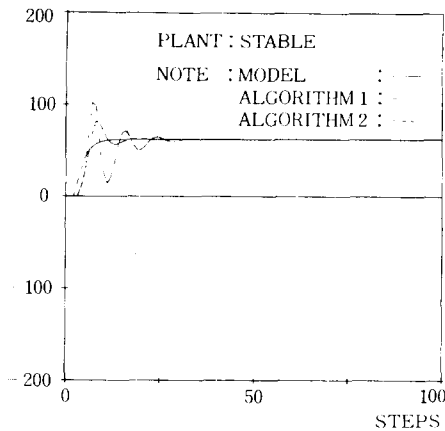


그림 7. 안정한 공정에 대한 D.C 파형 추종곡선  
Fig. 7. D.C tracking curve for stable plant.

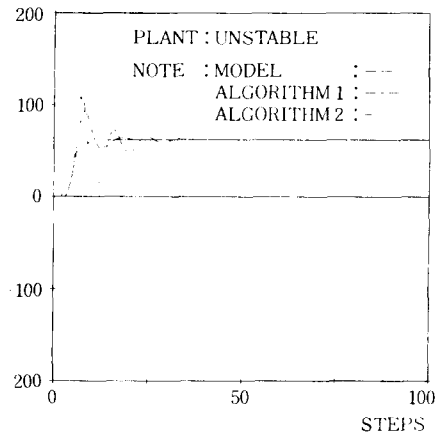


그림 9. 불안정한 공정에 대한 D.C 파형 추종곡선  
Fig. 9. D.C tracking curve for unstable plant.

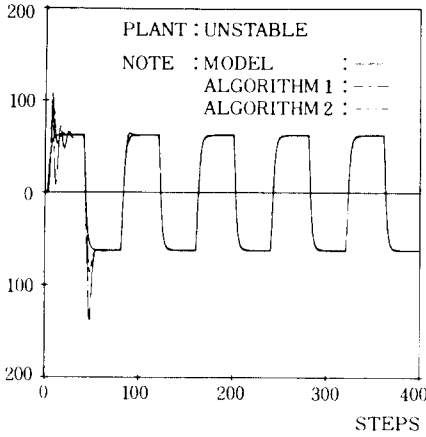


그림10. 불안정한 공정에 대한 구형파형 추종곡선  
 Fig. 10. Square wave tracking curve for unstable plant.

## VI. 결 론

본 논문에서는 Popov의 hyperstability 이론을 통하여, 기존에 Narendra에 의하여 제시된 적응제어기 구조를 다소 변형하여 새로운 기준모델적용제어이론을 제시하였다. 또한 hyperstability 이론을 토대로 하여 안정도 분석을 함으로써 기존의 안정도 분석에 있어서의 복잡한 면을 다소 해결할 수 있었으며, 따라서 제어기 구조에 있어서의 다양한 형태도 쉽게 다루어 볼 수 있었다. 새로운 제어알고리즘 2에 있어서는 간단하게나마 적응제어에 있어서의 robustness 문제도 다루어 보았다. 컴퓨터시뮬레이션을 통하여 제시한 적응제어 이론이 안정한 공정 및 불안정한 공정에 대하여 잘 적응 됨을 알 수 있었다. 앞으로의 연구는 본 논문의 이론을 좀 더 보강하여 robustness를 갖는 일반화 한 적응제어이론을 찾는 방향으로 진행할 계획이다.

## 參 考 文 獻

- [1] R. L. Carroll, D. P. Lindorff, "An adaptive observer for single-input single-output linear systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-18, pp. 428-434, Oct. 1973.
- [2] I. D. Landau, *Adaptive Control*, Dekker, New-york, 1979.
- [3] V. M. Popov, *Hyperstability of Control Systems*, Springer-Verlag, 1973.
- [4] A. Feuer and A. S. Morse, "Adaptive Control of single-input single-output linear systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-23, pp. 557-570, Aug. 1978.
- [5] K. S. Narendra and L. S. Valavani, "Direct and indirect adaptive control," *Automatica*, vol. 15, pp. 653-664, 1979.
- [6] K. S. Narendra and Y. H. Lin, "Stable discrete adaptive control," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-25, pp. 456-461, June 1980.
- [7] K. S. Narendra, Y. H. Lin, and L. S. Valavani, "Stable adaptive controller design Part II: Proof of stability," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-25, pp. 440-448, June 1980.
- [8] W. A. Wolovich, *Linear Multivariable Systems*, Springer-Verlag, pp. 235-237, 1974.
- [9] P. A. Ioannou and P. V. Kokotovic, "Instability analysis and improvement of robustness of adaptive control," *Automatica*, vol. 20, no. 5, pp. 583-594, 1984.
- [10] P. A. Ioannou and P. V. Kokotovic, "Decentralized adaptive control of interconnected system with reduced-order models," *Automatica*, vol. 21, no. 4, pp. 401-412, 1985.