

補償器를 이용한 強靱한 離散 時間 適應 制御

(A Robust Discrete-Time Adaptive Control with a Compensator)

李 鎬 振*, 崔 桂 根*

(Ho Jin Lee and Keh Kun Choi)

要 約

本 論文에서는 補償器를 導入하여 單一入出力 離散 時間 工程에 대한 強靱한 離散 時間 適應 制御器를 構成하였다. 補償器를 適當히 選擇하면 非모델化 運動이 있는 工程에 대해서도 定規化 常數 利得 파라미터 適應 알고리즘을 使用할 境遇 코닉섹터 安定度 理論에 의하여 安定한 適應 制御가 可能함을 보였다. 또한 이러한 補償으로 파라미터 適應 速度를 增加시킬 수 있음을 例를 通하여 보였다. 그리고 適應 觀測器를 使用한 補償器 構成에 대해서도 考察하였다.

Abstract

In this paper, a robust discrete-time adaptive control with compensation is proposed for single-input single-output discrete-time plants which have unmodeled dynamics. The stability of the overall system is studied using the conic sector stability theorems when a normalized constant gain parameter adaptation algorithm and a properly chosen compensation are used. An illustrative example shows that this compensation can also increase the parameter adaptation speed. And a method of compensation using the adaptive observation is also discussed.

I. 序 論

適應 制御의 基本的인 假定은 制御하고자 하는 工程이 어떤 數學的 모델로 完全하게 表示된다고 하는 것이다. 이러한 假定下에서 最近 20年 동안 MRAC 나 STR의 制御 構造와 定해진 次數의 파라미터의 推定으로 여러 가지의 適應 制御器가 構成되었으며, 또한 이들 制御器의 安定성은 이러한 數學的 모델을 基礎로 하여 이루어져 왔다.

그러나 實際 狀況에서 工程은 正確히 數學的 모델로 表示할 수 없는 境遇가 大部分이어서 이들에 대해서 近似的인 모델이 使用되게 되는데, 이때의 適應 制御는 어떤 條件下에서는 不安定性을 나타내 願하는 制御 目的을 達成할 수 없는 境遇가 많다. 따라서 工程의 非모델化(unmodeled)運動(dynamics)에 대해서 適應 制御를 適用하는 研究가 80年初盤부터 始作되었다. 이와 더불어 크기가 制限된 外亂의 影響下에서 制御 目的 達成을 위한 適應 制御도 研究되었는데, 綜合적으로는 不確實性(uncertainty)이 있는 工程에서의 制御 目的 維持 및 制御 시스템의 安定性 保障이라는 強靱性(robustness)問題로 提起되어

*正會員, 서울大學校 電子工學科
(Dept. of Elec. Eng., Seoul Nat'l Univ.)
接受日字: 1988年 6月 24日

連續 時間 및 離散 時間 시스템에 대해서 研究가 進行되었다.^{[1], [2]}

크기가 制限된 外亂下에서의 強韌한 適應 制御 方法으로 주로 3 가지 方法이 使用되었는데, 파라미터 推定을 하지 않는 區間을 갖는 死區間(dead zone) 方法,^[3] 推定되는 파라미터의 크기를 限定시키는 推定 制限(constrained estimation) 方法^[4], 그리고 파라미터의 推定에서 漏泄(leakage)을 使用하는 σ -變形(σ -modification) 方法^[5]이 그것이다. 이들은 非모델化 運動이 있는 境遇에도 適用되었는데, 工程의 不確實性을 Doyle이 提案한 非構造化(unstructured) 不確實性으로 看做하여, 非모델化 運動이 작아 普通의 線形 適應 制御 制御器로 安定化 시킬 수 있다는 假定下에, 實際 工程에서의 페루프 特性 多項式이 安定한 多項式이 되도록 工程의 모델化 次數로 制御器를 構成하고 파라미터 適應 速度를 늦추는 方法들이었다. 또한 定規化(normalization) 方法^[2]과 前述된 여러 方法이 結合되어 使用되기도 하였다.^[6]

그리고 工程 및 制御器의 入出力을 函數 解析學의 으로 表示하여, 시스템의 誤差 모델에 根據한 入出力 安定度 理論으로 安定度を 解析하는 方法이 最近 들어 化用되고 있는데, 이는 코닉 섹터(conic sector) 理論^{[7], [8]}을 使用하여 誤差 모델의 傳達 函數와 파라미터 推定の 演算子가 각각 어떤 섹터 條件을 滿足 하도록 하여 安定度を 追求하는 方法으로, 普通의 適應 制御에서 必要로 하는 誤差 모델 傳達 函數의 SPR(strictly positive real) 條件 滿足도 包含하는 것이다.

本 論文에서는 이러한 背景에서 非모델化 運動이 있는 工程의 安定的 適應 制御를 위하여, 定規化 파라미터 適應 法則과 코닉 섹터 理論을 使用하여, 誤差 모델 傳達 函數가 SPR 條件을 滿足하도록 補償 하는, 또한 이로써 파라미터 推定 알고리즘의 섹터 條件을 緩和시키는 補償器(compensator)를 導入하여 安定度 餘裕를 擴大시킨다. 이에 대해 Rohrs^[9]가 使用한 例를 利用하여 安定度 分析을 함으로써 補償器 導入의 效果를 보인다. 또한 同調 모델을 適應 觀測器로 구하여 이에 의해 補償器를 構成하는 方法에 대해서도 考察한다.

II. 制御器構造

모델化되지 않는 運動을 包含하는 實際 工程이 線形 時不變 單一 入出力 離散 時間 工程으로 다음과 같이 表示된다고 하자.

$$A(q^{-1})y(k) = q^{-d}B(q^{-1})[1+G(q^{-1})]u(k) \quad (1)$$

여기서 $A(q^{-1})$ 와 $B(q^{-1})$ 는 逆方向 移動 演算子 q^{-1} 에 의해 表示되는 多項式으로 서로 素(coprime)이고, 工程의 推定에 의해 低周波에서 同調되어 模型化된 파라미터로 表示된 式이다. $G(q^{-1})$ 는 模型化 되지 않은 不確實性을 나타내는 有離函數 이다. 이는 冪생型 不確實性으로, 名目上으로 模型化된 $A(q^{-1}), B(q^{-1})$ 의 次數에 따라 決定되는 函數로서, 線形 이고 時不變이며 安定하다고 假定한다. 또한 遲延 次數 d 는 알고 있고 $A(q^{-1}), B(q^{-1})$ 의 最高 次數 $n(\geq m+d+1)$ m 은 알고 있다고 假定하며, $A(q^{-1})$ 는 monic이고 $B(q^{-1})$ 는 安定된 多項式으로 假定한다. 이러한 工程에 대해서 願하는 閉루프 極點이 次數 n_c 인 安定한 多項式 $C(q^{-1})$ 의 根이 되도록 하는 極配置(pole-placement) 適應 레귤레이터(regulator)를 使用하여 레귤레이션하고자 한다. 이 多項式 $C(q^{-1})$ 에 의해 濾波(filtering)된 追從 誤差를 다음과 같이 定義한다.

$$e(k) = C(q^{-1})y(k) - B_r(q^{-1})r(k) \quad (2)$$

여기서 $r(k)$ 는 基準 入力信號이고 次數 $r(\leq n_c)$ 인 $B_r(q^{-1})$ 은 基準 入力信號에 作用하는 零點을 包含하는 安定된 多項式이다. 制御의 目的은 이 誤差 $e(k)$ 가 時間이 經過함에 따라 漸的으로 0이 되도록 하는 것으로, 이를 위하여 豫測 制御法則(predictive control law)을 使用하여 다음과 같은 適應 制御器를 構成한다. 즉 基準 入力信號의 d 段階 以後의 값을 알 수 있다고 하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$B_r(q^{-1})r(k+d) = S(q^{-1})u(k) + R(q^{-1})y(k) \quad (3)$$

여기서 $S(q^{-1})$ 와 $R(q^{-1})$ 은 그 係數가 每 段階마다 變化하는 q^{-1} 의 多項式이다. 이러한 全體 시스템을 安定하게 하도록 하고 次數 n_s, n_r 로 (4)式을 滿足하는 多項式 $S_o(q^{-1})$ 와 $R_o(q^{-1})$ 이 存在한다고 假定한다. 이러한 假定은 Kosut^[10]의 同調 시스템(tuned system)存在의 假定과 Ortega^[2]의 安定可能化(stabilizability) 假定과 同一한 意味이다.

$$C(q^{-1})B(q^{-1}) = S_o(q^{-1}) + q^{-d}R_o(q^{-1})B(q^{-1}) \quad (4)$$

여기서 工程의 不確實性이 없는 境遇 次數 n_s 는 $m+d-1$, 次數 n_r 은 $\max(n-1, n_c-d)$ 로 (4)式을 滿足하게 된다. 따라서 (4)式에 의한 閉루프 傳達 函數는 다음과 같이 表示된다.

$$y(k) = \frac{B_r(q^{-1})}{C(q^{-1})} H_2(q^{-1}) r(k) \quad (5)$$

$$H_2(q^{-1}) = \frac{1+G(q^{-1})}{1+T(q^{-1})G(q^{-1})}, \quad T(q^{-1}) = \frac{q^{-d}R_o(q^{-1})}{C(q^{-1})} \quad (6)$$

(6)式에서 不確實性이 없는 境遇에는 $G(q^{-1}) = 0$ 이므로 $H_2(q^{-1}) = 1$ 이 되어 願하는 制御 目的을 完全하게 達成할 수 있다. 따라서 모델化되지 않은 運動이 있는 境遇에서의 制御의 強韌性을 위해서는 $H_2(q^{-1})$ 의 效果가 安定度에 影響을 미치지 않도록 하는 것이 重要하고, 또한 性能 低下를 最少로 하기 위해서는 $H_2(q^{-1})$ 에서 $G(q^{-1})$ 의 效果를 줄이는 것이 重要하다. 이 $H_2(q^{-1})$ 는 誤差 모델의 安定度 分析에서 重要한 力割을 하는데, 一般的으로 低周波 領域에서는 $G(q^{-1})$ 의 效果가 작아 $H_2(q^{-1})$ 가 1에 가까우나, 어떤 周波數 以上에서는 $G(q^{-1})$ 의 效果가 커져 $H_2(q^{-1})$ 의 Nyquist 軌跡이 左半 平面上으로 넘어갈 수 있다. 따라서 이러한 $G(q^{-1})$ 高周波 成分을 減殺시키기 위하여 低周波 濾波器(補償器)를 連結하는 方法을 생각할 수 있다. 그러나 이 補償器를 誤差 成分이나 出力 部分에 直接 連結하면 그 效果를 얻을 수 없음이 알려져 있다.¹¹⁾

III. 補償器를 利用한 制御器 構成

高周波 領域에서의 $G(q^{-1})$ 의 影響을 줄이는 方法으로 Donati¹⁰⁾가 提案한 補償器를 導入한다. 低周波 濾波器的 周波數 特性을 갖는 安定한 多項式으로 傳達函數 $W(q^{-1})$ 인 補償器를 連結할 때, 이 $W(q^{-1})$ 가 $G(q^{-1})$ 에만 作用하여 $H_2(q^{-1})$ 가 다음과 같이 되도록 하면,

$$H_2(q^{-1}) = \frac{1 + W(q^{-1})G(q^{-1})}{1 + W(q^{-1})G(q^{-1})T(q^{-1})} \quad (7)$$

즉 $H_2(q^{-1})$ 가 補償器를 連結한 시스템의 誤差 모델의 傳達 函數가 되도록 하면 $G(q^{-1})$ 의 效果를 減少시킬 수 있음을 알 수 있다. 그런데(6)式的 $H_2(q^{-1})$ 를 살펴보면 相對 次數(relative degree)가 0 이므로 모든 最小 位相 시스템에 대하여 $G(q^{-1})$ 의 位相 變化 寄與는 0 이 된다. 따라서 Nyquist 軌跡은 右半 平面에서 시작하여 다시 그 平面에서 끝나므로, 이 軌跡이 恒常 右半 平面에만 있도록 하는 그러한 $W(q^{-1})$ 가 存在함을 알 수 있다. 이러한 補償器를 連結한 構造는 그림 1 과 같다.

여기서의 適應 制御 構造는 實際 工程에 대해 同調된 適應 制御器 $S_o(q^{-1})$ 와 $R_o(q^{-1})$ 를 on-line 으로 구하기 위한 것이고, 同調 모델은 低周波 領域에서의 모델化된 工程의 傳達 函數로서 (1)式에서 보는 바와 같이 工程의 名目上의 傳達 函數이다. 이때 off-line으로 工程에 대해서 파라미터 推定을 實施하여 同調 모델을 구한다고 하자. 段階 k에서의 $S(q^{-1})$ 와 $R(q^{-1})$ 의 係數들로 이루어지는 파라미터 벡터를

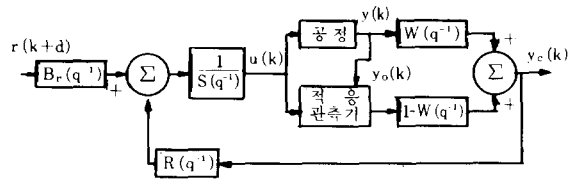


그림 1. 補償器를 利用한 適應 制御 構造
Fig. 1. An adaptive control structure with a compensator.

$\hat{\theta}(k)$ 라고 하면

$$S(q^{-1})u(k) + R(q^{-1})y_c(k) = \hat{\theta}(k)^T \phi(k) \quad (8)$$

$$\phi(k)^T = [u(k), u(k-1), \dots, u(k-n_s), y_c(k), y_c(k-1), \dots, y_c(k-n_r)] \quad (9)$$

이므로 制御 法則을 合成 出力 $y_c(k)$ 에 대한 파라미터 形態로 表示하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\hat{\theta}(k)^T \phi(k) = B_r(q^{-1})r(k+d) \quad (10)$$

이러한 制御 시스템에서의 誤差 모델을 구하기로 한다. 파라미터 推定에 의해 구해지는 同調 모델이 $q^{-d}B(q^{-1})/A(q^{-1})$ 이므로 合成 出力 $y_c(k)$ 는 어떤 線形 時不變 連續 函數 $W(q^{-1})$ 에 대해

$$\begin{aligned} y_c(k) &= W(q^{-1}) \frac{q^{-d}B(q^{-1})}{A(q^{-1})} [1 + G(q^{-1})]u(k) + \\ &\quad [1 - W(q^{-1})] \frac{q^{-d}B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k) \\ &= \frac{q^{-d}B(q^{-1})}{A(q^{-1})} [1 + W(q^{-1})G(q^{-1})] u(k) \end{aligned} \quad (11)$$

로 주어진다. 따라서 補償을 할 境遇 非모델化 部分이 $W(q^{-1})$ 에 의하여 濾波되는 效果를 갖는 것을 알 수 있다. 同調 시스템 存在 假定에 의해 同調된 파라미터 集合 θ^* 에 대해서 濾波된 出力 誤差 $e(k)$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} e(k) &= C(q^{-1})y_c(k) - B_r(q^{-1})r(k) \\ &= \frac{A(q^{-1})S_o(q^{-1})}{B(q^{-1})} y_c(k) + q^{-d}R_o(q^{-1})y_c(k) \\ &\quad - B_r(q^{-1})r(k) \\ &= S_o(q^{-1})u(k-d) + S_o(q^{-1})W(q^{-1})u(k-d) \\ &\quad + R_o(q^{-1})y_c(k-d) - B_r(q^{-1})r(k) \end{aligned} \quad (12)$$

여기서 $S_o(q^{-1})u(k-d) + R_o(q^{-1})y_c(k-d) = \theta^{*T} \phi(k-d)$ 이므로

$$e(k) = \left[1 + \frac{S_o(q^{-1})W(q^{-1})G(q^{-1})u(k-d)}{S_o(q^{-1})u(k-d) + R_o(q^{-1})y_c(k-d)} \right] \{ \theta^{*T} \phi(k-d) \} - B_r(q^{-1})r(k) \quad (13)$$

여기서 (11)식을 利用하여 다시 쓰면 $C(q^{-1})B(q^{-1})$ 이 安定한 多項式이므로

$$e(k) = \left[1 + \frac{A(q^{-1})S_o(q^{-1})W(q^{-1})G(q^{-1})}{A(q^{-1})S_o(q^{-1}) + q^{-d}R_o(q^{-1})B(q^{-1})} \right] \frac{\{ \theta^{*T} \phi(k-d) \}}{\{ 1 + W(q^{-1})G(q^{-1}) \}} - B_r(q^{-1})r(k) \\ = \frac{1 + W(q^{-1})G(q^{-1})}{1 + W(q^{-1})G(q^{-1})T(q^{-1})} \{ \theta^{*T} \phi(k-d) \} - B_r(q^{-1})r(k) \\ = H_2(q^{-1}) \{ \theta^{*T} \phi(k-d) \} - B_r(q^{-1})r(k) \quad (14)$$

$$H_2(q^{-1}) = \frac{1 + W(q^{-1})G(q^{-1})}{1 + W(q^{-1})G(q^{-1})T(q^{-1})}, \\ T(q^{-1}) = \frac{q^{-d}R_o(q^{-1})}{C(q^{-1})} \quad (15)$$

이 때 파라미터 誤差가 다음과 같이 定義되면

$$\tilde{\theta}(k-d) = \hat{\theta}(k-d) - \theta^* \quad (16)$$

(14)式은

$$e(k) = H_2(q^{-1}) [\hat{\theta}(k-d) - \tilde{\theta}(k-d)]^T \phi(k-d) - B_r(q^{-1})r(k) \\ = -H_2(q^{-1}) \tilde{\theta}(k-d)^T \phi(k-d) + H_2(q^{-1}) \hat{\theta}(k-d)^T \phi(k-d) - B_r(q^{-1})r(k) \quad (17)$$

이므로 (10)式에 의해서

$$e(k) = -H_2(q^{-1}) \tilde{\theta}(k-d)^T \phi(k-d) + [H_2(q^{-1}) - 1] B_r(q^{-1})r(k) \\ = -H_2(q^{-1})v(k) + e^*(k) \quad (18)$$

가 된다. 여기서 $v(k) = \tilde{\theta}(k-d)^T \phi(k-d)$ 이고, $e^*(k) = [H_2(q^{-1}) - 1] B_r(q^{-1})r(k)$ 로 $G(q^{-1})$ 의 影響이 사라져서 $H_2(q^{-1}) = 1$ 로 同調된 境遇에서는 0 이 되는 項이다. 不確實性이 없는 境遇에는 $H_2(q^{-1})$ 가 1 이 되어 正確한 極配置가 일어나고 strictly positive real 條件을 滿足함을 알 수 있다. 이 $v(k)$ 를 誤差 $e(k)$ 에 의하여 入出力 關係(relation)로 表示하면

$$V(k) = H_1(q^{-1})e(k) \quad (19)$$

으로 $H_1(q^{-1})$ 은 파라미터 適應 알고리즘으로 정해지는 關係가 된다. 式(18), (19)로 주어지는 誤差 모

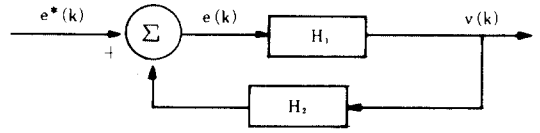


그림 2. 誤差 모델의 歸還 相互 接續 構成
Fig. 2. The feedback interconnection of the error model.

델에 대한 歸還 相互 接續(feedback interconnection) 은 그림 2 와 같다.

코닉 섹터 安定度 理論(conic sector stability theory)을 使用하여 安定度を 確保하기 위해서는 關係 H_1 과 H_2 의 섹터 條件이 滿足되도록 파라미터 適應 알고리즘을 使用하여야 한다. 따라서 다음과 같은 定規化 常數 利得 適應 알고리즘을 使用한다.

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-d) + \frac{g \phi(k-d)e(k)}{m(k)}, \quad g > 0, \text{ 常數} \quad (20)$$

$$m(k) = \mu m(k-1) + \max(1, \phi(k-d)^T \phi(k-d)), \\ 0 < \mu < 1 \quad (21)$$

그러나 이 때에는 $H_1(\cdot)$, $H_2(\cdot)$ 의 섹터 條件 대신, 定規化를 使用함으로써 생기는 새로운 關係

$$H_{n1}(\cdot) = m(k)^{-1/2} H_1(m(k)^{1/2} \cdot) \quad (22)$$

$$H_{n2}(\cdot) = m(k)^{-1/2} H_2(m(k)^{1/2} \cdot) \quad (23)$$

에서 섹터 條件을 구해야 한다. (20), (21)式을 使用하면 $H_{n1}(\cdot) + g/2$ 가 양의 섹터 條件(passivity)을 滿足하게 되므로 시스템이 安定하려면 $H_{n2}(\cdot)$ 가 섹터 $[0, 2/g]$ 내에 있어야 한다. 즉 $H_{n2}(\cdot)$ 는 CONE(1/g, 1/g) 内部에 있어야 한다.¹⁸⁾ 그런데 定規化를 使用하지 않을 때의 演算子 H_2 의 섹터 條件은 定規化 時 定數 μ 에 의하여 다음과 같은 關係가 있다.¹²⁾ 즉 (20), (21) 式과 같은 定規化 파라미터 適應 알고리즘을 使用하였을 때, 定規化 時 定數 μ 에 대해 $H_2\{(\mu^{1/2}q^{-1})\}$ 가 섹터 條件 $[0, g/2]$ 를 滿足하면 $H_{n2}(\cdot)$ 도 섹터 條件 $[0, g/2]$ 를 滿足한다. 이러한 關係에 따라 다음과 같은 安定度 條件 定理을 쓸 수 있다.

(定理)

適應 制御 레귤레이터 (3), (4)에 의해 制御되는 工程(1)에 대해서 그림 1 과 같이 補償器를 連結하여 制御器를 構成 했을 때, 파라미터 適應 알고리즘(20), (21)을 使用하면, 誤差 모델(18)의 傳達 函數 $H_2(\mu^{1/2}q^{-1})$ 가 安定하고 섹터 條件 $[0, g/2]$ 를 滿足하며, $e^*(k)$ 가

L_2 에 속하도록 基準 信號 $r(k)$ 의 크기가 制限될 때, (18)의 信號 $v(k)$, $e(k)$ 는 L_2 에 속하고 regressor 벡터 $\phi(k)$ 의 크기는 制限된다.

(證明) (11)式에서 모두가 補償器의 效果가 $G(q^{-1})$ 에만 미치므로 非모델화 運動있는 工程에 대한¹²⁾의 定理 5.2를 그대로 適用할 수 있다.

위의 定理에서 알 수 있듯이 이러한 補償器의 導入은 주어진 工程의 不確實性에 대해서 安定度에 餘裕를 擴大하는 데 있으므로 시스템의 安定性뿐만 아니라 빠른 適應 알고리즘을 쓸 수 있음을 意味한다. 定規化 時定數 μ 는 파라미터 適應의 速度를 나타내는 指標로서 μ 가 커지면 파라미터의 補定 (adjustment) 速度가 緩和되므로 補償器 導入의 效果는 間接적으로 μ 의 減少에 있음을 알 수 있다. 그러나 이러한 補償器는 工程의 不確實性에 대한 下限 周波數 등의 事前 情報가 없는 境遇에는 一般의인 低周波 濾波器만으로도 쓸 수밖에 없으므로 正確히 定量的으로 그 補償 效果를 表示할 수 없는 어려움이 있다. 合成 出力 $y_c(k)$ 와 $y(k)$ 의 關係는

$$y(k) - y_c(k) = \frac{[1 - W(q^{-1})]G(q^{-1})}{1 + W(q^{-1})G(q^{-1})} y_c(k) \quad (24)$$

이므로 $|W(q^{-1})G(q^{-1})| < 1$ 되는 條件을 滿足하도록 하는 $W(q^{-1})$ 에 대해서, $y_c(k)$ 가 制限되면 $y(k)$ 가 制限됨을 알 수 있다. 또한 $W(q^{-1})$ 가 1이되는 周波數 近方(주로 低周波 領域)에서는 $y_c(k)$ 가 制限되면 $y(k)$ 가 $y_c(k)$ 와 같아짐을 알 수 있다.

IV. 適應 觀測器를 利用한 同調 모델의 構成

III章에서는 制御 하고자 하는 工程의 同調 모델을 미리 알고 있거나 off-line으로 미리 同調 모델을 구하는 境遇에 대해서 考察해 보았다. 많은 適應 制御의 境遇, 工程의 파라미터들은 알려져 있지 않다고 假定하므로, 본 章에서는 適應 觀測器로 工程의 同調 모델을 間接 適應 制御 方式으로 推定하면서 全體적으로는 適應 레귤레이터 制御를 遂行하는 複合 方式을 考察해 본다.

그림 3의 適應 觀測器는 그림 4와 같은 Narendra¹¹⁾ 構造를 使用하여 構成한다. 觀測器 多項式 (observer polynomial)으로 次數가 $n-m-d-1$ 이고 安定한 monic 多項式인 $L(q^{-1})$, 次數가 $n-1$ 인 補助 信號 發生器의 分子 多項式을 각각 $F(q^{-1})$, $D(q^{-1})$ 라고 하자. 그리고 安定한 多項式들로 이루어지는 基準 모델은 $q^{-d}B_m(q^{-1})/A_m(q^{-1})$ 으로 次數가 n 이고 monic인 $A_m(q^{-1})$ 과 次數 m 인 $B_m(q^{-1})$ 으로 이루어진다고 하자.

이 適應 觀測器의 出力 $y_o(k)$ 는 다음과 같이 表示

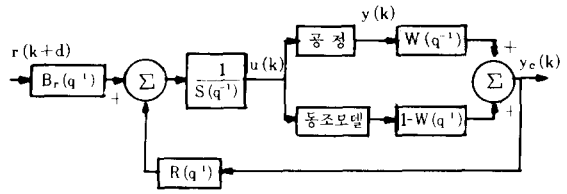


그림 3. 適應 觀測器와 補償器를 利用한 適應 制御 構造

Fig. 3. An adaptive control with a compensator and an adaptive observer.

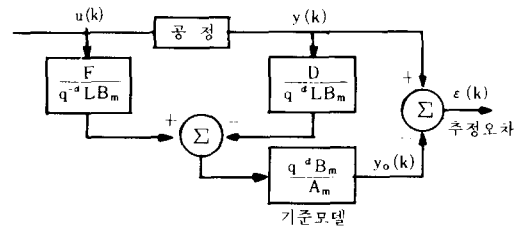


그림 4. 適應 觀測器의 構造

Fig. 4. The structure of the employed adaptive observer.

될 수 있다.

$$y_o(k) = \frac{q^{-d}B_m(q^{-1})}{A_m(q^{-1})} \left(\frac{F(q^{-1})}{q^{-d}L(q^{-1})B_m(q^{-1})} u(k) - \frac{D(q^{-1})}{q^{-d}L(q^{-1})B_m(q^{-1})} y(k) \right) = \frac{1}{L(q^{-1})A_m(q^{-1})} \left[F(q^{-1}) - D(q^{-1}) \frac{q^{-d}B(q^{-1})}{A(q^{-1})} \{1 + G(q^{-1})\} \right] u(k) \quad (25)$$

推定 誤差를 $\epsilon(k) = y(k) - y_o(k)$ 라고 하면 이 시스템의 合成 出力 $y_c(k)$ 는

$$y_c(k) = W(q^{-1})y(k) + [1 - W(q^{-1})]y_o(k) = y_o(k) + W(q^{-1})\epsilon(k) = (1 - W(q^{-1})) \left[\frac{F(q^{-1})}{L(q^{-1})A_m(q^{-1})} - \frac{q^{-d}B(q^{-1})}{A(q^{-1})} \left(1 + \frac{D(q^{-1})}{L(q^{-1})A_m(q^{-1})} \right) \right] u(k) + \frac{q^{-d}B(q^{-1})}{A(q^{-1})} \left[1 - \frac{D(q^{-1})G(q^{-1})}{L(q^{-1})A_m(q^{-1})} + W(q^{-1})G(q^{-1}) \left(1 + \frac{D(q^{-1})}{L(q^{-1})A_m(q^{-1})} \right) \right] u(k) \quad (26)$$

이므로 $W(q^{-1})$ 는 推定 誤差 $\varepsilon(k)$ 에 대한 濾波器로 作用하여 非모델化에 의한 推定 誤差의 高周波 成分을 除去하는 效果를 준다. 適應 레귤레이터에 의한 制御 入力 $u(k)$ 와 이에 대한 工程의 出力 $y(k)$ 가 주어질 때, 이 適應 觀測器의 適應 法則에 의해 $F(q^{-1})$ 과 $D(q^{-1})$ 의 係數를 測定할 수 있다. 주어진 多項式 $L(q^{-1})A_m(q^{-1})$ 에 대해서 다음의 關係를 滿足하도록 $F^*(q^{-1})$ 와 $D^*(q^{-1})$ 로 適應된다고 하자.¹¹⁾

$$\frac{q^{-d}B(q^{-1})}{A(q^{-1})} = \frac{F^*(q^{-1})}{L(q^{-1})A_m(q^{-1}) + D^*(q^{-1})} \quad (27)$$

그러면 (26)식의 마지막 줄 右弁 첫째項이 0이 되므로 이의 合成 出力은

$$\begin{aligned} y_c^*(k) &= \frac{q^{-d}B(q^{-1})}{A(q^{-1})} \left[1 - \frac{D^*(q^{-1})G(q^{-1})}{L(q^{-1})A_m(q^{-1})} \right. \\ &\quad \left. + W(q^{-1})G(q^{-1}) \left(1 + \frac{D^*(q^{-1})}{L(q^{-1})A_m(q^{-1})} \right) \right] u(k) \\ &= \frac{q^{-d}B(q^{-1})}{A(q^{-1})} \left[1 + W(q^{-1})G(q^{-1}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{(1-W(q^{-1}))D^*(q^{-1})}{L(q^{-1})A_m(q^{-1})} G(q^{-1}) \right] u(k) \\ &= \frac{q^{-d}B(q^{-1})}{A(q^{-1})} [1 + W_1(q^{-1})G(q^{-1})] u(k) \end{aligned} \quad (28)$$

$$\text{단 } W_1(q^{-1}) = W(q^{-1}) - \frac{(1-W(q^{-1}))D^*(q^{-1})}{L(q^{-1})A_m(q^{-1})} \quad (29)$$

로 된다. (29)식에서 보면 실질적인 濾波器 效果는 事前에 同調 모델을 알고 구한 境遇보다는 약간 減少될 수 있다. 이는 適應 觀測器를 使用함에 따라 追加된 模型 誤差에 의한 것이다. 低周波 近方에서는 $W(q^{-1})$ 가 1에 가까우므로 $W_1 \approx W$ 이고 高周波 近方에서는 $W(q^{-1})$ 이 0이므로, $D^*(q^{-1})/L(q^{-1})A_m(q^{-1})$ 이 低周波 濾波器 效果를 갖도록 $L(q^{-1})A_m(q^{-1})$ 를 構成하면 $W_1(q^{-1})$ 은 $W(q^{-1})$ 에 近似시킬 수 있다.

V. 例를 통한 安定度 分析 및 檢討

IV章에서 言及된 補償器 構造에 대해서 Rohrs¹²⁾가 例로 使用한 工程에 대해서 安定도와 이를 위한 定規化 時定數 μ 의 範圍를 調査하여 본다. 이 工程은 相對 次數가 3이고 2次的 高周波 運動을 包含하는 3次 工程이다.

$$y(t) = \frac{2}{s+1} \cdot \frac{229}{s^2+30s+229} u(t)$$

이 工程에 대해 0.04초로 標本化 하여 얻은 離散 時間 工程에 대해 適用한다. 먼저 IBM PC의 "Program CC" package를 利用하여 0.04초로 標本化하여 구한 工程은 (30)식과 같이 表示된다. 이때의 標本化는 zero-order-hold에 의해 遂行하고 z-transform은 impulse invariant 方法을 使用하였다.

$$\frac{y(k)}{u(k)} = \frac{0.00361q^{-1}(1+0.196q^{-1})(1+2.763q^{-1})}{(1-0.961q^{-1})\{(1-0.547q^{-1})^2+(0.044q^{-1})^2\}} \quad (30)$$

Rohrs는 이러한 工程에 대해서 1次 모델을 使用하여 適應 制御를 하면 非모델化 運動에 의한 不安定性 때문에 시스템이 不安定해진다는 것을 보였다. 이 工程에 대해서 1次的 同調 모델이 다음과 같이 (31)식으로 구해지는데

$$y(k) = -0.076y(k-1) + 0.962u(k) \quad (31)$$

(6)식의 $H_2(q^{-1})$ 를 구하기 위해서 同調된 多項式 $R_o(q^{-1})$ 와 不確實性 $G(q^{-1})$ 를 알아야 한다. 이들을 正確히 알고 있으면 Nyquist 軌跡을 正確하게 그릴 수 있지만 이들의 近似值를 알고 있는 境遇에도 $H_2(q^{-1})$ 의 Nyquist 軌跡의 大綱을 그릴 수 있으므로 어느 정도의 安定度 餘裕내에서 安定된 適應 制御를 設計할 수 있다. 여기서는 (30)식을 利用하여 $G(q^{-1})$ 를 計算할 수 있으므로 이를 使用하기로 한다. 計算의 便宜를 위해 $C(q^{-1})=1, B_r(q^{-1})=1$ 이라고 假定하자. 그러면 同調된 制御器 多項式 $R_o(q^{-1})$ 는 常數로서 0.076이 된다. 따라서 (6)식에 의해 $T(q^{-1})$ 는 $d=1$ 이므로 $0.076q^{-1}$ 이 되고 $H_2(q^{-1})$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$H_2(q^{-1}) = \frac{0.0454(1+2.765q^{-1})(1-0.962q^{-1})(1+0.1946q^{-1})}{\{(1-0.7462q^{-1})^2+(0.4968q^{-1})^2\}(1-0.958q^{-1})(1-0.346q^{-1})} \quad (32)$$

여기서 $H_2(q^{-1})$ 가 安定한 多項式이기는 하지만 (32)식 처럼 $\mu=1$ 인 境遇에도 그 軌跡이 左半 平面으로 나와 있어 strictly positive real 條件을 滿足시키지 못함을 알 수 있다. 따라서 補償을 하지 않는 境遇에는 이 定規化 方法으로는 安定化 시킬 수 없다. 그러나 $1/(s+1)$ 의 離散化 傳達 函數로

$$W(q^{-1}) = \frac{0.0392q^{-1}}{1-0.9608q^{-1}} \quad (33)$$

을 使用하면 $|W(q^{-1})G(q^{-1})| < 1 (q = \exp(j\omega))$ 條

件을 滿足하며, 이 때의 誤差 모델 傳達 函數 $H_2(q^{-1})$ 에 대한 Nyquist 軌跡은 右半 平面上에만 存在하게 된다. 補償器를 使用하면 그림 5 에서 보는 바와 같이 $\mu = 1$ 인 境遇는 Nyquist 軌跡이 1 近方에 몰려 있으므로 定規化 方法에 의해 global 하게 安定的으로 制御할 수 있고 μ 를 0.9075가 減少시킬 수 있음을 알 수 있다. 이 때 許容되는 파라미터 適應 常數 利得 g 의 範圍는 $H_2(q^{-1}) = 1$ 일 때 $0 < g < 2$ 인데,¹²⁾ 不確實性이 있는 境遇 補償器를 使用할 때는 그림 5에서 처럼 Nyquist 軌跡이 $\mu = 0.9075$ 일 때는 半徑 0.5인 圓내에, $\mu = 1$ 일 때에는 半徑 0.6인 圓내에 들어가므로 g 는 각각 $0 < g < 2$, $0 < g < 1.67$ 를 滿足하여야 한다.

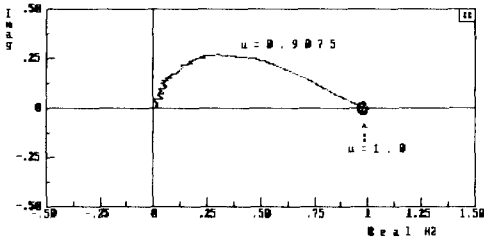


그림 5. 補償器 使用時 μ 의 값에 따른 $H_2(q^{-1})$ 의 Nyquist 軌跡들 ($T=0.04$ 초)

Fig. 5. Nyquist loci of $H_2(q^{-1})$ for values of μ with compensation ($T=0.04$ s).

適應 觀測器를 使用하는 境遇에도 같은 方式으로 分析할 수 있는 데, 이 때에는 $D^*(q^{-1})$ 를 구하면 (29) 式에 의하여 $W_1(q^{-1})$ 를 구할 수 있다. 이 예의 境遇 $A_m(q^{-1}) = 1 - 0.97q^{-1}$, $L(q^{-1}) = 1$ 로 두면 $D^*(q^{-1})$ 는 $0.008q^{-1}$ 가 되는데, 이때의 結果는 그림 5와 비슷하나 許容되는 μ 의 最少値는 0.93 정도이다. 다음으로 周期 0.4초로 標本化 하였을 때의 Nyquist 軌跡을 그려보면 0.04초의 境遇와는 달리 $H_2(q^{-1})$ 가 安定하고 strictly positive real 하므로 $\mu = 1$ 로 補償없이도 制御 可能함을 알 수 있다. 그러나 $\mu < 0.2$ 에서는 더 이상 strictly positive real 하지 않는다. 이 工程에 대해서 補償器를 使用한 境遇를 그림 6에 나타내었는데, 이 때의 補償器는 $1/(s+1)$ 을 0.4초로 標本化한 것을 使用하였다. $\mu = 1$ 近方에서는 $H_2(q^{-1})$ 의 Nyquist 軌跡이 1 近方에 몰려 있으나 μ 가 減少함에 따라 점차 虛數軸으로 接近하여 대략 $\mu = 0.015$ 정도에서 左半 平面向으로 넘어감을 알 수 있다. 따라서 補償器를 使用하지 않을 境遇보다는 μ 를 상당히 減少

시킬 수 있다. μ 값에 따른 g 의 값은 表 1과 같다. 適應 觀測器를 使用한 境遇도 비슷한 結果를 얻을 수 있다. 여기서 考慮하여야 할 點은 μ 를 減少 시킴에 따라 g 가 減少하므로 適應 法則의 利得 選定에는 適當한 trade-off가 必要하다는 것이다.

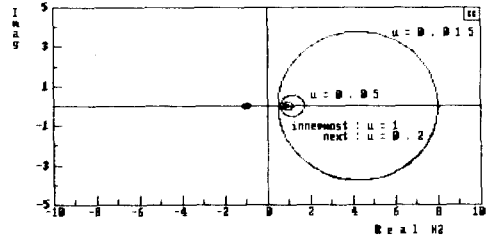


그림 6. 補償을 할 때의 μ 값에 따른 $H_2(q^{-1})$ Nyquist 軌跡들 ($T=0.4$ 초)

Fig. 6. Nyquist loci of $H_2(q^{-1})$ for values of μ with compensation ($T=0.4$ s).

표 1. 安定度를 위한 μ 값에 대한 定規化 適應 常數 利得 g 의 最大値

Table 1. Maxima of the normalized adaptive gain constant g against the values of μ for stability.

μ	1	0.2	0.1	0.05	0.015
g max	2	1.67	1.54	1	0.25

VI. 結 論

工程의 非모델化 運動이 있는 境遇에서의 適應 레귤레이션에 대한 補償器의 效果를 코닉 섹터 理論으로 分析하였다. 定規化 方法을 使用하는 파라미터 適應 法則에 대해서, Rohrs가 使用한 예에 대해 誤差 모델의 Nyquist 軌跡을 통하여 安定度 維持에 必要한 適應 速度 決定 常數 μ 와 g 의 範圍를 敎함으로써, 補償器 導入의 效果를 살펴보았다. 또한 이러한 補償器의 使用시 必要한 同調 모델 대신에 適應 觀測器를 導入하고 이 때의 補償 效果도 考察하였다. 一般적으로 工程을 表示하는 數學的 모델에서 非모델化된 部分이 많으면 適應 制御가 不安定性을 惹起할 수 있는데, 適當히 選擇된 補償器를 통해 安定的 適應 制御를 할 수 있음을 보였다. 또한 安定度를 維

持하면서 μ 를 減少시킬 수 있어 보다 빠른 適應이 可能하고, 이에 따라 出力 追從 性能 低下를 어느 程度 防止할 수 있음을 보였다. 다만 補償器의 傳達函數의 選擇 方法은 더 研究가 이루어져야 할 것이다.

參 考 文 獻

[1] R.L. Kosut and B. Friedlander, "Robust adaptive control: conditions for global stability," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-30, no. 7, pp. 610-624, Jul. 1985.
 [2] R. Ortega, L. Praly, and I.D. Landau, "Robustness of discrete-time direct adaptive controllers," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-30, no. 12, pp. 1179-1187, Dec. 1985.
 [3] B.B. Peterson and K.S. Narendra, "Bounded error adaptive control," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-27, no. 6, pp. 1161-1168, Dec. 1982.
 [4] G. Kreisselmeier and K.S. Narendra, "Stable model reference adaptive control in the presence of bounded disturbances," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-27, no. 6, pp. 1169-1179, Dec. 1982.
 [5] P.A. Ioannou and P.V. Kokotovic, "Robust redesign of adaptive control," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-29, no. 3, pp. 202-211, Mar. 1984.
 [6] K.S. Narendra and A.M. Annaswamy, "Robust adaptive control in the presence

of bounded disturbances," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-31, no. 4, pp. 306-315, Apr. 1986.
 [7] C.E. Rohrs, M. Athans, L. Valavani, and G. Stein, "Some design guidelines for discrete-time adaptive controllers," *Automatica*, vol. 20, no. 5, pp. 653-660, 1984.
 [8] G. Zames, "On the input-output stability of time-varying nonlinear feedback systems-part I: conditions derived using concepts of loop gain, conicity, and positivity," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-11, pp. 228-238, Apr. 1966.
 [9] _____, "On the input-output stability of time-varying nonlinear feedback systems-part II: conditions involving circles in the frequency plane and sector nonlinearities," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-11, pp. 456-476, Jul. 1966.
 [10] F. Donati and M. Vallauri, "Guaranteed control of almost-linear plants," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-29, no. 1, pp. 34-41, Jan. 1984.
 [11] K.S. Narendra and L.S. Valavani, "Direct and indirect model reference adaptive control," *Automatica*, vol. 15, pp. 653-664, 1979.
 [12] W.R. Cluett, S.L. Shah, and D.G. Fisher, "Robust design of adaptive control systems using conic sector theory," *Automatica*, vol. 23, no. 2, pp. 221-224, 1987. *

著 者 紹 介

李 鎬 振 (正會員) 第25卷 第12號 參照
 현재 한국전자통신연구소
 선임연구원

崔 桂 根 (正會員) 第25卷 第9號 參照
 현재 서울대학교 전자공학과
 교수