

새로운 투영 데이터 수집방법을 이용한 불완전한 데이터로부터 영상 재구성

(Image Reconstruction from Incomplete Data Using a New Data Acquisition Method)

鄭 棟 文,** 朴 吉 欽,* 河 永 浩*

(Byung Moon Jung, Kil Houm Park and Yeong Ho Ha)

要 約

투영 데이터로부터 영상을 재구성하는 단층촬영(computed tomography : CT)은 재구성과정에서 보간(interpolation)의 오차로 인해 재구성된 영상은 열화(degradation)를 수반한다. 본 논문은 보간이 필요없는 새로운 투영 데이터 수집방법을 제안한다. 제안된 방법은 영상 재구성시 이용하는 Cartesian grid와 동상의 관계를 가지고 투영 데이터를 수집하여 보간과정을 없애줌으로써 양질의 영상을 재구성한다.

Abstract

In computed tomography, the errors associated with interpolation in the reconstruction process degrade the reconstructed image and may cause divergence unless a large number of rays is used. A new data acquisition scheme without interpolation is developed in this paper. Samples (projection data) are taken in phase with samples of the Cartesian grid to eliminate errors associated with interpolation process.

I. 서 론

물체의 단면을 영상화하는 단층촬영(computed tomography)은 투영데이터 수집과정과 영상 재구성과정으로 물체의 단면에 분포해있는 물리적인 매개변수를 찾는 기법이다.

평행광선에 의한 투영 데이터 수집과정은 180° 내의 등간격의 여러 방향과 임의의 방향에서 등간격의

여러 광선으로부터 투영 데이터를 얻는다. 이 방법은 Cartesian grid에 관계없이 투영 데이터를 얻기때문에 영상 재구성시 보간(interpolation)과정을 필요로 하며 이로 인해 재구성된 영상은 열화(degradation)를 수반한다. 특히 불완전한 투영 데이터가 발생하는 경우에 널리 이용되는 반복적인 재구성-재투영법(iterative reconstruction-reprojection : IRR)^{1,2}은 재구성-재투영과정에서 생기는 보간의 오차가 반복시 누적되어 영상의 질을 더욱 저하시킨다.

본 논문에서는 영상 재구성시 보간과정을 필요로 하지않는 새로운 투영데이터 수집방법을 제안한다.

*正會員, **準會員, 慶北大學校 電子工學科
(Dept. of Elec. Eng., Kyungbook Nat'l Univ.)
接受日字 : 1988年 10月 12日

새로운 투영 데이터 수집 방법은 cartesian grid와 동상의 관계를 가지는 투영 데이터를 얻는 방법으로 Cartesian grid의 기하학적 구조로부터 유도된다.

이와같은 새로운 투영 데이터 수집방법은 재구성된 영상에서 보간과정에 의한 열화를 없앨 수 있고, 특히 불완전한 투영 데이터가 발생할 경우에 적용하는 IRR 방법에서 누락되는 보간의 오차를 없애줌으로써 원래 영상에 더욱 근접한 영상을 재구성할 수 있다.

II 절에서 새로운 투영 데이터 수집방법, III 절에서 영상 재구성 방법인 최대 엔트로피방법, 그리고 IV 절에서 물체 내부에 방해물이 존재하는 경우에 적용하는 반복적인 재구성-재투영법에 대해서 기술한다.

II. 새로운 투영 데이터 수집방법

제안된 새로운 투영 데이터 수집방법은 데이터 수집과정과 재구성과정에서 Cartesian grid와 동상의 관계를 유지해 줌으로써 각 투영각에 대해 화소의 중앙점을 반드시 지나가도록 스캐닝한다.

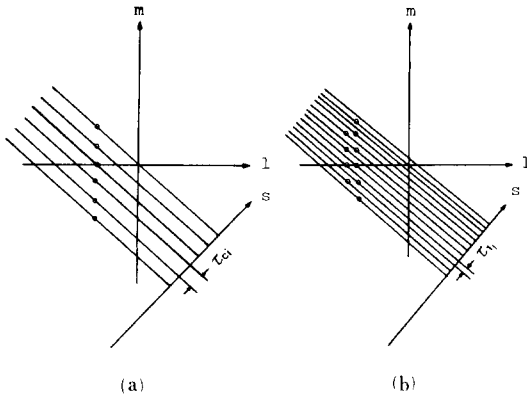


그림 1. 정수 좌표계 (행에 대한 스캐닝)
 (a) 기본 행에 대한 스캐닝
 (b) 두 인접한 행에 대한 스캐닝

Fig. 1. Integer coordinate (scanning for column).
 (a) scanning for fundamental column.
 (b) scanning for two adjacent column.

먼저, 정수 좌표계 ℓ 과 m 을 가지는 Cartesian grid의 영상 $f(x, y)$ 를 생각해 보자.

$$f_s(\ell, m) = \int_{-\infty}^{\infty} \int f(x, y) \sigma(x-\ell, y-m) dx dy \quad (1)$$

식(1)에서 우리가 관심을 가지는 영상점은 좌표축 위에서 정수값 ℓ 과 m 을 가지는 점, 즉 화소의 중앙

점이다.

모든 정수 ℓ 과 m 에 대한 샘플링률은 식(2)와 같다.

$$k \tau_i = \ell \cos \theta_i + m \sin \theta_i \quad (2)$$

식(2)가 주어진 투영각에 대해 만족하기 위해서는 Cartesian grid(ℓ, m)의 모든 점이 s 축에 균등하게 투영되어야 한다. 이러한 조건은 하나의 고정된 행에 대해 그림 1에서 보는바와 같이 균등하게 나타난다. 고정된 ℓ 을 가지는 행의 주기성에 대해 두 개의 연결된 화소점 사이에서 식(2)에 의해 실제 샘플링 주기를 식(3)과 같이 얻을 수 있다.

$$\tau_{ci} = \sin \theta_i \quad (3)$$

그러므로 기본 간격 τ_{ci} 에 의해 동일 간격을 가지는 샘플의 간격을 식(4)와 같이 얻을 수 있다, .

$$\tau_{nc_i} = \tau_{ci} / (n_c), \quad n_c = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

여기서 n 은 고정된 ℓ 을 가지는 하나의 행에 대해 두 인접한 영상점 사이의 샘플링 간격의 수를 나타낸다.

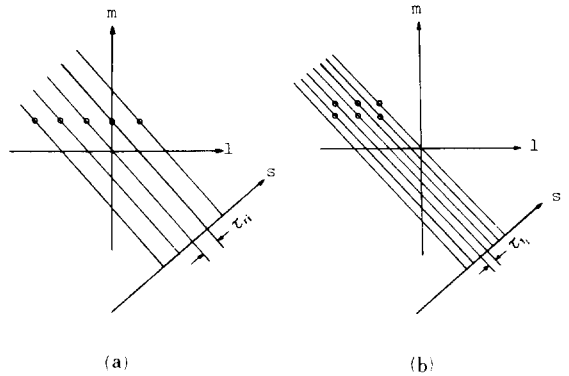


그림 2. 정수 좌표계 (열에 대한 스캐닝)
 (a) 기본 열에 대한 스캐닝
 (b) 두 인접한 열에 대한 스캐닝

Fig. 2. Integer coordinate (scanning for row).
 (a) scanning for fundamental row.
 (b) scanning for two adjacent row.

마찬가지로 고정된 m 에 대해서 그림2에서와 같이 인접한 두 열사이의 영상점에 대한 기본 간격과 샘플링 간격은 식(5), (6)과 같다.

$$\tau_{r1} = \cos \theta_i \quad (5)$$

$$\tau_{nr_i} = \tau_{r1} / (n_r), \quad n_r = 1, 2, 3 \quad (6)$$

여기에서 n_r 은 고정된 m 을 가지는 하나의 열에 대해 두 인접한 영상점 사이의 샘플링 간격의 수를 나타낸다.

공동 샘플링 주기를 갖도록 식(4)를 식(6)으로 나누면 식(7)과 같다.

$$(n_c)/(n_r) = \tan \theta_1 \tag{7}$$

그러므로 보간이 필요없는 샘플링 조건은 정수값을 가지는 n_r 과 n_c 에 대해서 식(8)과 같이 주어진다.

$$\theta_1 = \tan^{-1}(n_c/n_r) \tag{8}$$

주어진 n_r 과 n_c 를 이용하여 θ_1 에 대한 샘플링 주기를 구해보면 식(9)와 같다.

$$\tau_1 = 1/((n_r)^2 + (n_c)^2)^{1/2} \tag{9}$$

재구성하기 위한 샘플의 수를 생각해 보면, grid가 x 방향에 L , y 방향에 M 으로 제한되어 있다면 각각의 투영에 대해 필요한 샘플의 수는 식(10)과 같이 나타낼 수 있다.

$$N = n_r(M-1) + n_c(L-1) \tag{10}$$

앞에서 살펴 본 바와같이 새로운 투영 데이터 수집방법은 각 화소의 중앙점들을 반드시 지나가는 스캐닝을 해줌으로써 재구성이나 재투영 과정에서 보간을 필요로 하지 않는다.

III. 최대 엔트로피 방법

영상 재구성은 물체의 횡단면에 분포해 있는 물리적인 매개변수를 선적분한 투영 데이터로부터 2차원 영상을 재구성하는 방법이다.

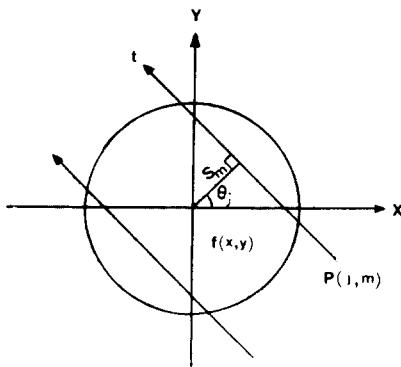


그림 3. 병렬광선 구조
Fig. 3. Parallel ray geometry.

그림 3에서 j 번째 투영각, m 번째 광선의 투영 데이터는 식(11)과 같다.

$$p(j, m) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(s_m \cos \theta_j - t \sin \theta_j, s_m \sin \theta_j + t \cos \theta_j) \tag{11}$$

여기서 t 는 광선의 진행방향, s 는 원점에서 광선까지의 거리이다.

식(11)의 투영 데이터로부터 물체함수 f 의 엔트로피는 아래와 같이 주어진다.

$$\eta(f) = - \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy f(x, y) [\ln f(x, y) \cdot S] \tag{12}$$

여기서 S 는 물체의 단면적(cross-sectional area)이다.

최대 엔트로피 방법은 식(11)을 조건으로 식(12)를 최대화하는 물체함수 f 를 찾는 방법이다. 이와같은 f 를 찾기위해 Lagrange multiplier 방법을 이용한다. 먼저 제한조건에 Lagrange multiplier Λ 를 도입하여 Lagrangian ϕ 를 식(13)과 같이 나타낸다.

$$\begin{aligned} \phi(f, \Lambda) = & - \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy f(x, y) \ln[f(x, y) \cdot S] \\ & - \sum_{j=1}^J \sum_{m=1}^M \Lambda(j, m) [p(j, m) \\ & - \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(s_m \cos \theta_j - t \sin \theta_j, \\ & s_m \sin \theta_j + t \cos \theta_j)] \end{aligned} \tag{13}$$

여기서 J 는 투영각의 수, M 은 광선의 수를 나타낸다.

식(13)을 최대화하는 f 를 구하기 위해 $\partial \phi / \partial f = 0$ 를 만족하는 f 를 구하면 식(14)와 같다.

$$f(x, y) = S^{-1} \prod_{j=1}^J \sum_{m=1}^M H(j, m) \chi_{jm}(x \cos \theta_j + y \sin \theta_j) \tag{14}$$

여기서 $H(j, m) = \exp(\Lambda(j, m) - 1/J)$ 이며 s_m 점에서의 특성함수 χ_{jm} 은

$$\begin{aligned} \chi_{jm}(x \cos \theta_j + y \sin \theta_j) = & \\ \begin{cases} 1, & s_m = x \cos \theta_j + y \sin \theta_j, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

이다.

계수 $H(j, m)$ 은 식(14)를 식(11)에대입하여 구한다. 먼저 모든 j, m 에 대해서 $H^0(j, m) = 1$ 로 초기화 한 다음 반복시 새롭게 한다.

$$H^{i+1}(j, m) = \frac{S \cdot P(j, m)}{\int_{-\infty}^{+\infty} dt \prod_{k=1}^n H^i(k, n) \chi_{kn}(s_n \cos \theta_{jk} - t \sin \theta_{jk})} \tag{15}$$

여기서 $\theta_{jk} = \theta_j - \theta_k$ 이고, i 는 반복횟수이다.

최대 엔트로피 방법은 식(15)로부터 $H(j, m)$ 을 반복적으로 계산하여 식(14)로써 영상을 구한다. 그러나 기존의 데이터 수집 방법은 식(14)에서 (x, y) 점을 정확하게 지나는 광선이 없으므로 보간을 필요로 한다. 이러한 보간으로 인해 재구성된 영상이 열화된다. 제안된 투영 데이터 수집방법은 (x, y) 점을 지나는 광선이 존재하므로 보간에 의한 영상의 열화를 방지할 수 있다.

IV. 반복적인 재구성 - 재투영법

모든 투영각(view)에서 얻은 투영 데이터로부터 완전한 영상을 재구성하기 위해서는 다음의 세가지 조건이 만족되어야 한다. 첫째, 투영 데이터를 180° 내의 모든 방향에서 등간격으로 얻어야 한다. 둘째, 각 투영각에서 같은 간격으로 투영 데이터를 얻어야 한다. 셋째, 하나의 투영각에서 단층면상의 각 경로를 따라 적분된 값이 투영축상에 빠짐없이 존재해야 한다. 이러한 세가지 조건을 모두 만족시키지 못하는 경우에는 불완전한 투영 데이터가 발생한다.

불완전한 투영 데이터가 발생하는 경우는, 물체 내부에 존재하는 방해물로 인해 일부 투영 데이터를 상실하는 경우와 제한된 투영각으로 인해 일부 투영각에서 투영 데이터를 얻지 못하는 경우, 그리고 물체의 크기가 주사범위보다 커서 절단투영이 생기는 경우로 나누어진다. 이와같은 불완전한 투영 데이터가 발생할 때 반복적인 재구성 - 재투영법에 의한 재구성이 가장 널리 이용된다. 재구성 - 재투영법은 Papoulis의 외삽법(extrapolation)¹⁵⁾에 근거를 둔 방법으로 물체에 대한 선형적 정보를 갖고, 영상 공간과 투영 공간사이를 오가면서 원래 영상에 근접해가는 방법이다.

그림 4와 같이 물체내부의 방해물로 인해 불완전한 투영 데이터가 발생하는 경우에는 잃어버린 데이터의 추정이 필요하다. 이 경우 잃어버린 데이터의 추정은 하나의 투영각에서 잃어버린 정보를 다른 투영각들에서 얻는데 기초를 두고 있다. 원래 영상 f 를 추정하기 위해 알고있는 투영 데이터 P_k 와 초기에 가정되는 미지의 투영 데이터 P_u 를 가지고 재구성 - 재투영 과정을 시작한다. 초기에는 물론 H 를 1로 두고, P_u 는 임의의 상수로 둔다. 이때 초기영상 f^1 는 식(14)와 (15)로 부터 식(16)과 같이 추정된다.

$$f^1(x, y) = \begin{cases} f^1(x, y), & (x, y) \in R_b \\ C_0, & (x, y) \in R_a \\ 0, & (x, y) \in R_a \cup R_b \end{cases} \quad (16)$$

초기 재구성된 영상 f^1 으로 부터 미지의 투영 데이

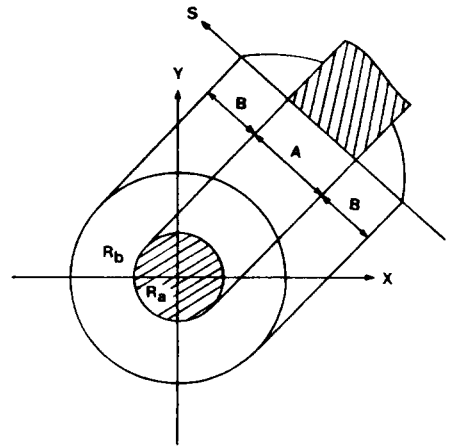


그림 4. 불투명한 방해물이 존재하는 경우
 A : 투영 공간에서 방해물이 존재하는 영역
 B : 방해물이 없는 영역
 Fig. 4. In case of opaque obstruction.
 A : opaque obstruction region in the projection space.
 B : no opaque obstruction region.

타 P_u 은 Joseph이 제안한 재투영 방법¹⁶⁾을 이용하여 식(17)과 같이 구할 수 있다.

$$P_u^1 = \begin{cases} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx}{|\sin \theta|}, & |\cos \theta| \leq 1/\sqrt{2} \\ \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy}{|\cos \theta|}, & |\cos \theta| > 1/\sqrt{2} \end{cases} \quad (17)$$

이와같은 재투영 방법은 정방화소법보다 계산이 훨씬 편리함을 알 수 있다.

새로이 추정된 P_u^1 과 알고있는 데이터 P_k 를 이용하여 전체 투영데이터 P_{ku}^2 를 식(18)과 같이 얻을 수 있다.

$$P_{ku}^2 = \begin{cases} P_u^1(s, \theta), & (s, \theta) \in A \\ P_k(s, \theta), & (s, \theta) \in B \end{cases} \quad (18)$$

전체 투영데이터 P_{ku}^2 를 이용하여 다음 추정 영상 f^2 를 식(14)와 (15)로 부터 계산해 낼 수 있다. 이와같은 방법을 반복하여 원래 영상 f 를 재구성할 수 있다. Cartesian grid에 관계없이 임의의 균등한 간격으로 투영 데이터를 구하는 기존의 데이터 수집 방법¹⁻⁴⁾에 의한 반복적인 재구성 - 재투영법은 재구성(식(14))과 재투영(식(17)) 과정에서 반드시 보간을 필요로 한다. 이러한 보간의 오차가 반복시 누적되어 영상의

질을 저하시킨다. 그러나 제안된 데이터 수집방법에 의한 반복적인 재구성-재투영법은 재구성과 재투영 과정에서 보간의 불필요로 반복되는 보간의 오차를 없애줌으로 영상의 질 저하를 방지할 수 있다.

IV. 실험

그림 5 와 같은 시험 phantom을 가지고 완전한 투영 데이터인 경우와 불완전한 투영 데이터가 발생한 경우에 대해 보간을 필요로 하는 기존의 방법과 보간과정이 필요없는 투영 데이터 수집방법을 이용한 새로운 방법에 대해 모두 비교하였다. 64×64 화소들로 구성된 영상에서 32개의 투영각, 128개의 광선을 사용하였으며, 제안된 방법에서 사용한 광선의 수는 표 1 과 같다. 재구성된 영상의 성능을 비교하기 위해 식(19)와 같이 거리(distance)를 정의(1) 하였다.

$$distance = \left[\frac{\sum_{i=1}^{NP} \sum_{j=1}^{NP} |f_{ij} - \hat{f}_{ij}|^2}{\sum_{i=1}^{NP} \sum_{j=1}^{NP} |f_{ij} - \bar{f}|^2} \right]^{1/2} \quad (19)$$

여기서 \hat{f}_{ij} 는 재구성된 영상의 화소값, f_{ij} 는 원래 영상의 화소값, \bar{f} 는 원래 영상의 평균값, 그리고 NP는 화소의 수이다. 이의 결과를 그림 7 과 8에 나타내었으며, 특히 경계선 부근의 재구성 상태를 비교해보기 위하여 32번째 열의 단면을 그림 9, 10에 각각 나타내었다.

그림 6의 재구성된 영상에서 볼 수 있는 바와같이 새로운 데이터 수집방법을 이용한 영상 재구성법이 경계선 부근의 몽롱화(blurring)를 없애주고, 특히 물체내부의 방해물로 인해 불완전한 투영 데이터가 발생한 경우에 더욱 우수함을 알 수 있다.

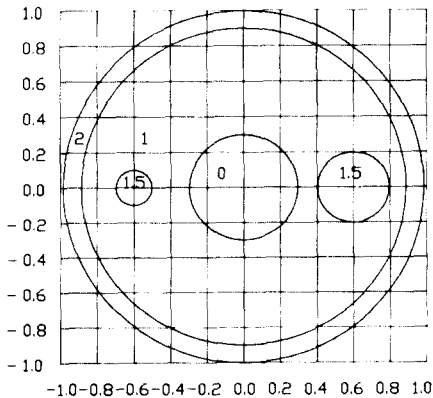


그림 5. 시험 phantom
Fig. 5. Test phantom.

표 1. 새로운 샘플링에 의한 광선의 수
Table 1. Ray numbers of new sampling scheme.

투영각도 (θ_i)	기울기 (n_c/n_r)	광선의 수
0.00	0	64
5.71	1/10	321
11.31	1/5	264
16.70	3/10	327
21.80	2/5	144
28.30	7/13	344
33.69	2/3	230
39.80	5/6	320
45.00	1	91

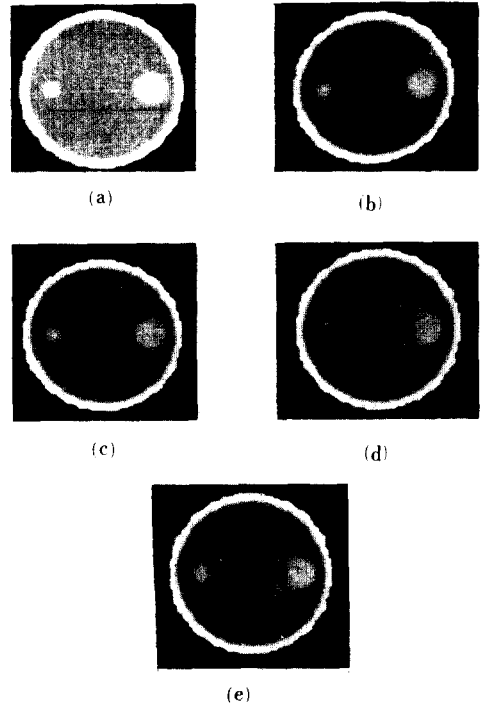


그림 6. 재구성된 영상
(a) 원 영상
(b) 기존의 방법
(c) 제안된 방법
(d) 기존의 방법(방해물이 있을 때)
(e) 제안된 방법(방해물이 있을 때)

Fig. 6. Reconstructed images.
(a) original image.
(b) conventional method.
(c) proposed method.
(d) conventional method(with opaque obstruction).
(e) proposed method(with opaque obstruction).

그림 7 과 8 의 distance에 나타낸 바와같이 제안한 방법으로 재구성한 영상이 보간에 의한 오차가 없어지므로 원래 영상이 훨씬 더 근접함을 알 수 있다. 특히 그림 8에서 보면 불완전한 투영데이터가 발생하는 경우에 제안한 방법이 누적되는 보간의 오차를 없애줌으로써 더욱 우수한 재구성이 됨을 알 수 있

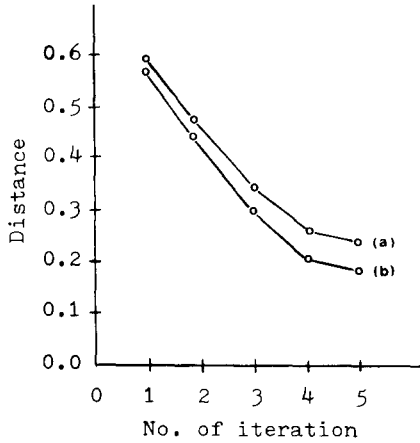


그림 7. 시험 phantom에 대한 distance

- (a) 기존의 엔트로피 방법
- (b) 제안된 엔트로피 방법

Fig. 7. Distances for the test phantom.

- (a) conventional method.
- (b) proposed method.

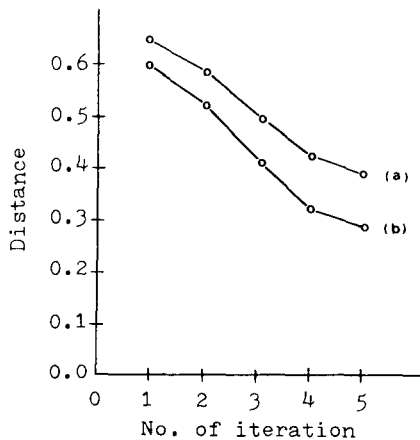


그림 8. 시험 phantom에 대한 distance (방해물이 있을 때)

- (a) 기존의 반복적인 재구성-재투영법
- (b) 제안된 반복적인 재구성-재투영법

Fig. 8. Distances for the test phantom (with opaque obstruction).

- (a) conventional method.
- (b) proposed method.

다. 또한 제안된 방법은 화소의 중앙점을 지나게 스캐닝해 줌으로써 명암도 차가 급격히 변하는 경계선 부분이 잘 보존됨을 32번째 열의 단면을 나타낸 그림 9, 10에서 알 수 있다.

V. 결 론

반드시 화소의 중앙점을 지나도록 스캐닝하여 재구성이나 재투영에서 보간과정을 없애준 새로운 데이터 수집방법을 제안하였다. 제안된 방법을 이용한 영

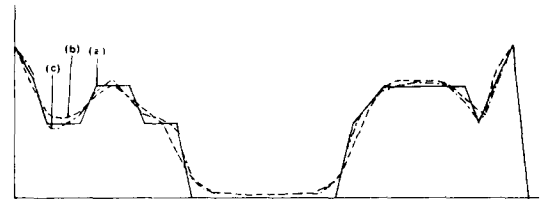


그림 9. 재구성된 영상에서 32번째 열에 대한 단면도

- (a) 원래 영상
- (b) 기존의 엔트로피 방법
- (c) 제안된 엔트로피 방법

Fig. 9. Cut-views of 32-th row for the reconstructed image.

- (a) original.
- (b) conventional method.
- (c) proposed method.

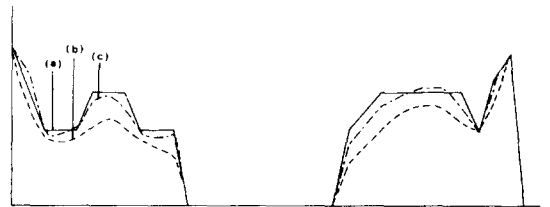


그림 10. 재구성된 영상에서 32번째 열에 대한 단면도 (방해물이 있을 때)

- (a) 원래 영상
- (b) 기존의 재구성-재투영법
- (c) 제안된-재투영법

Fig. 10. Cut-views of 32-th row for the reconstructed image (with opaque obstruction).

- (a) original.
- (b) conventional method.
- (c) proposed method.

상 재구성이 보간의 오차를 없애줌으로써 원 영상에 더욱 근접하였고, 특히 경계선 부근의 재구성이 뛰어난 결과를 통하여 살펴보았다. 특히 불완전한 투영 데이터가 발생한 경우에 제안된 방법은 보간과정의 불필요로 재구성-재투영시 발생하는 보간오차의 누적을 방지하여 더욱 우수한 재구성이 되었다. 그러나 화소의 중앙점을 반드시 지나가게 하는 스캐닝 방법은 각 투영각에 따라 광선의 수가 달라 짐으로 많은 광선의 수를 필요로 하는 투영각이 발생할 수 있다. 이러한 문제를 해결하기 위한 연구가 계속 진행되어야 한다.

參 考 文 獻

[1] K.H. Park, S.B. Park, "Maximum entropy image reconstruction for an object with opaque obstructions," *IEEE Trans. Med. Imaging*, vol. MI-6, pp. 308-312, Dec. 1987.
 [2] J.H. Kim, K.Y. Kwak, S.B. Park, and Z.H. Cho, "Projection space iteration reconstru-

ction-reprojection," *IEEE Trans. Med. Imaging*, vol. MI-4, pp. 139-143, 1985.

[3] J.S. Choi, K. Ogwa, M. Nakajima, and S. Yuta, "A reconstruction algorithm of body sections with opaque obstructions," *IEEE Trans. Sonics Ultrason.*, vol. SU-29, pp. 143-150, May 1982.
 [4] K. Ogawa, M. Nakajima, and S. Yuta, "A reconstruction algorithm from truncated projections," *IEEE Trans. Med. Imaging*, vol. MI-3, pp. 34-40, March 1983.
 [5] A. Papoulis, *Signal Analysis*, New York: McGraw-Hill, 1977, pp. 243-248.
 [6] G. Minerbo, "MENT: a maximum entropy algorithm for reconstructing a source from projection data," *Comput. Graphics Image Processing*, vol. 10, pp. 48-68, 1979.
 [7] P.M. Joseph, "An improved for reprojecting rays through pixel images," *IEEE Trans. Med. Imaging*, vol. MI-1, pp. 192-196, Nov. 1982. *

著 者 紹 介



鄭 標 文 (準會員)

1964年 4月 3日生. 1987年 2月 경북대학교 전자공학과 졸업. 현재 경북대학교 대학원 전자공학과 석사과정 재학중. 주관심분야는 Image Processing 및 Computer Vision 등임.

朴 吉 欽 (正會員)

第25卷 第10號 參照

현재 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 박사과정 및 경북대학교 전자공학과 조교

河 永 浩 (正會員)

第25卷 第10號 參照

현재 경북대학교 전자공학과 조교수