

스플라인 범함수에 의한 明暗에서 形狀復旧 문제의 正則化

(Regularization of Shape from Shading Problem Using Spline Functional)

崔 然 成*, 崔 宗 秀**

(Yeon Sung Choi and Jong Soo Choi)

要 約

「明暗에서 形狀」문제는 다른 초기 시각과 마찬가지로 불량 설정 문제이다. 그래서 正則化法을 사용하여 해를 구한다. 正則化를 위해 적분성 구속과 스플라인 범함수가 안정자로 이용되었다. 병렬 연산이 가능하도록 유한 차분법을 이용해 이산 근사식을 유도했고, 실험결과 계산된 면의 방향에 대한 오차는 5% 이내였다.

Abstract

Shape from shading problem, such as other most early visions, is ill-posed problems, which can be solved by the use of regularization methods. This paper proposes the three kinds of stabilizer for the regularization. These are integrability constraints and spline functionals. Parallel iterative schemes are derived in the form of the finite difference approximation. Experimental results show that the average error in surface orientation is less than 5%.

I. 서 론

明暗(shading)이 있는 2차원 영상으로부터 원래의 3차원 형상을 복구하는 「명암에서 형상(shape from shading)」문제는 비선형 1계 편미분방정식으로 이루어진다. 이 편미분방정식을 풀기 위해서 몇 가지 경계조건을 사용하여 개선시키고 있으나, 열화

된 영상이나 광원의 위치가 관찰 방향과 많이 벗어난 영상에서는 해를 제대로 구하기 어렵다.^[1]

그래서 Ikeuchi 등은 밝기 오차의 총합을 최소로 하는 면의 방향을 구하는 것으로 문제를 재구성하였다.^[2] 그들은 최소화 문제를 풀기 위해 변분법을 이용했고, 반복적으로 해를 갱신해가는 완화법(relaxation method)을 유도했다. 이 연구는 초기 시각(early vision)은 불량 설정문제(ill-posed problem)이며, 모든 초기 시각은 최소화 문제로 통합된다는 Poggio 등의 계산이론(computational theory)^[3]에 발화점 구실을 하였다.

본 논문에서는 불량 설정문제의 관점에서 「명암에서 형상」에 관해 살피고, 이때 正則化(regularization)를 위해서, 세가지의 스무딩 구속(smoothing constr-

*正會員, 濟州大學校 情報工學科
(Dept. of Information Eng., Cheju Nat'l Univ.)

**正會員, 中央大學校 電子工學科
(Dept. of Elec. Eng., Chungang Univ.)

接受日字: 1988年 10月 4日

(※ 本研究는 韓國科學財團1986年度 目的基礎研究의 一部로 이루어진 것임.)

aints)을 사용하여 그것들의 성능을 비교한다. 이들 구속 중에서 적분성(integrability)의 구속은 Horn 등에 의해 제안되었으나 실제 구현되지는 않았다.⁴⁾ 나머지 두 구속조건은 스플라인 범함수로 부터 유도한다.

정칙화된 방정식의 최소치를 구하기 위해 방정식은 해에 수렴할 수 있는 반복 형식으로 변환되었다. 컴퓨터에서 합성된 영상이 실험에 사용된다.

II 장에서는 영상 휘도 방정식(image irradiance equation)과 본 논문에서 사용된 좌표계에 대해서 설명하고, III 장에서는 明暗에서 형상이 불량 설정 문제를 증명한다. VI 장에서는 불량 설정 문제를 正則化하기 위하여 스무딩구속에 근거한 안정자(stabilizer)를 설계하고 V 장에서는 앞장에서 유도된 범함수를 최소화하기 위한 완화법을 개발한다. VI 장에서는 실험에 사용된 물체의 제작법과 실험 결과에 관해 논하고, VII 장에서 결론을 맺는다.

II. 明暗에서 形狀問題

균일한 반사 특성을 갖는 스무드한 곡면의 단색 영상에는 영상 휘도(image irradiance)의 변동, 즉, 明暗(shading)이 생긴다. 이것은 광원, 면의 형상, 재질의 반사 특성, 영상 형성의 투영 기하학(projection geometry)의 4 가지 요소의 상호작용에 기인한다. 明暗에서 형상 문제는 휘도 데이터로 부호화되어 있는 형상 정보를 추출하는 것이다. 그것은 영상 형성과는 정반대의 과정이다.

휘도치에는 많은 인자들이 복합되어 있으므로, 영상에 등장하는 형상은 부가적인 정보 없이는 결정할 수 없다. 이런 관점에서 알맞은 유틸리티가 반사율 지도(reflectance map)이다. 이것은 면소(surface patch)의 명도(brightness)는 면소의 방향(orientation)의 함수임을 설명해준다. 반사율 지도는 양방향 반사율 분포함수(bidirectional reflectance distribution function)와 광원의 위치로 부터 계산된다.⁵⁾ 지도는 형상이 기지인 측정 기준용 물체(calibration object)와 같은 것에 의해 실험적으로 작성되는 편이 훨씬 실용적이다.

본 논문에서는 대상 물체는 무광택 면(matte surface)을 갖고 있고, 광원은 관찰자와 먼 점광원(distant point-source illuminant)이라고 가정한다. 면의 법선을 \mathbf{n} , 광원의 방향을 \mathbf{s} 라면 위치 (x, y) 에서 영상 휘도 I 는

$$I(x, y) = \rho \gamma (\mathbf{n} \cdot \mathbf{s}) \tag{1}$$

의 Lambert 법칙을 만족한다. 여기서 ρ 는 면의 알

베도(albedo)이고, γ 는 입사광의 세기이다. 휘도는 관찰방향 \mathbf{v} 와는 무관하다. 식(1)은 실제계를 취급하여도 일반성을 크게 상실하지 않는다.

영상에서 작고 균일한 영역(homogeneous region)을 처리의 기본 단위로 삼을 경우, 즉 한 화소와 그 근방의 화소들을 대상으로 하는 국소 해석(local analysis)에서는 광량과 알베도의 변화는 아주 작다고 볼 수 있으므로, \mathbf{s} 와 ρ 와 γ 를 상수로 취급할 수 있다.

그라디언트 공간(gradient space)을 이용하면 직교 좌표계에서의 세개의 변수를 둘로 줄일 수 있다. 곡면 $f(x, x, z) = 0$ 의 음함수 표현인 $z = f(x, y)$ 의 벡터 방정식은 x 와 y 를 매개변수로 두면

$$\mathbf{r} = (x, y, f(x, y)),$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = (1, 0, f_x),$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = (0, 1, f_y)$$

이므로 접평면(tangent plane)에 수직인 법선벡터 \mathbf{n} 은

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \\ &= (-f_x, -f_y, 1) \\ &= (-p, -q, 1) \end{aligned}$$

이다. 첨자는 그것에 대한 편도함수를 나타낸다. 여기서 $p = \partial f / \partial x = \partial z / \partial x$ 와 $q = \partial f / \partial y = \partial z / \partial y$ 는 그라디언트 공간의 두 변수이다. 마찬가지로

$$\mathbf{s} = (-p_s, -q_s, 1)$$

로 쓸 수 있다. 식(1)을 그라디언트 공간에서 표현하면

$$\begin{aligned} E(x, y) &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{s} \\ &= \frac{pp_s + qq_s + 1}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1} \sqrt{p_s^2 + q_s^2 + 1}} \\ &= R(p, q) \end{aligned} \tag{2}$$

여기서 $E(x, y) = I(x, y) / \rho \gamma$ 이고 $R(p, q)$ 가 선술한 반사율 지도이다. 영상은 정사영(orthographic projection)으로 형성되고 관찰자의 시선은 z 축 방향이라고 가정한다. 그러면 $E(x, y) = R(p, q)$ 는 -1 에서 Z 축과 직교하는 평면에 상이 맺히고, 이 영상에서의 한 점 (x, y) 의 휘도와 그 점에 대응하는 물체 면소의 방향과의 관계를 정의함을 알 수 있다. 정사영에 의한 영상 형성의 구조를 그림 1에 보인다.

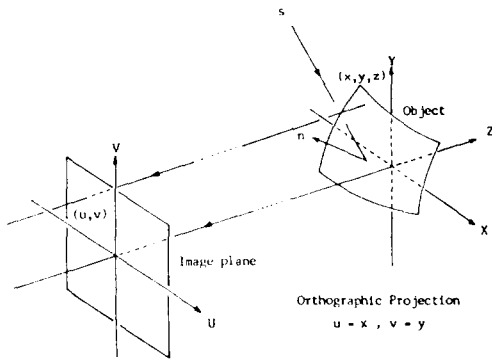


그림 1. 정상영에 의한 영상형성
Fig. 1. Image formation by orthographic projection. phic

식(2)를 Horn은 영상 휘도 방정식(image irradiance equation)이라 불렀다.¹¹⁾ 明暗에서 형상 문제는 결국 이 방정식을 푸는 것이다.

Ⅲ. 불량 설정 문제

초기 시각(early vision)은 2 차원의 세기 배열로부터 3 차원의 가시 면의 물리적 특성을 복구하는 프로세스의 집합으로 구성된다. 이때의 결과는 Marr의 2(1/2) 차원 스케치,¹²⁾ 또는 Barrow와 Tennenbaum의 본질 영상(intrinsic images)¹³⁾에 해당한다. 초기 시각의 프로세스는, 현재, 컴퓨터 시각에서 보편적으로 인정되고 있으며, 그것은 처리 대상에 관한 지식(domain-dependent knowledge)이 필요치 않고, 단지 물리 세계와 영상형성 단계에 대한 포괄적인 구속(generic constraints)만을 요구한다. 그것들은 개별적으로 연구될 수 있는 독립 모듈들을 개념적으로 표현한다. 그렇지만, 서로 다른 모듈로부터 얻어진 정보는 결합되어야 한다. 서로 다른 모듈들은 그 전에 서로 작용하기도 한다. 처리는 순수한 상향식(bottom-up)일 수는 없고, 특정한 지식은 시각정보 처리의 최초의 단계에 어떤 영향을 끼칠 수도 있다. 초기시각 모듈에 관한 계산 이론(computational theories)은 표현과 프로세스라는 두 가지 문제를 다룬다. 계산 이론은 입력과 원하는 출력의 형태(표현)를 설명하고, 어떤 것에서 다른 것으로 변환하는 알고리즘(프로세서)을 제공한다. 프로세스와 알고리즘의 문제는 최적화 이론이라는 하나의 이론적 뼈대로 통합될 수 있다.¹⁴⁾

본 논문에서는 초기 시각의 대표적인 예인 明暗에서 형상 문제를 최적화 이론으로 형식화하고, 해를 얻기 위한 수치 해석법을 제안한다.

초기 시각은 역광학(inverse optics)이다. 광학이나 컴퓨터 그래픽스는 3 차원 물체의 영상을 결정하는 것인데 반해, 시각은 영상에서 면을 복구하는 역 문제(inverse problem)이다. 그래서 3 차원 세계가 2 차원 영상으로 투영되는 영상형성 과정에서 많은 정보가 손실되므로, 시각은 모순없는 출력을 위해 상위 구속(natural constraints), 즉, 물리 세계에 관한 가정에 의존하지 않으면 안된다. 明暗에서 형상에는 스무딩 구속이 사용된 바 있으며,^{12),15)} 다음장에서 새로이 세 종류의 스무딩 구속을 제안한다.

다른 초기 시각과 마찬가지로 明暗에서 형상은 Hadamard의 정의에 따르면 불량 설정 문제이다.¹⁶⁾ 초기 시각과 같은 전형적인 역 문제는 대개 불량 설정 문제이다. 문제의 해가 존재하고, 그것이 유일하며, 초기 데이터와의 상관성이 연속일 때, 그 문제는 양호 설정(well-posed)이다. 이 조건들 중에서 하나라도 만족되지 않으면 불량 설정이다.

식(2)는 비선형 편미분방정식이며, 대수적으로는 하나의 방정식에 p와 q의 두 미지수가 존재하므로 유일해를 갖지 못한다. 식(2)를 도해하면 가능한 해가 무수한 Monge의 원추가 된다. 식(2)를 n에 대해 풀어본다.

$$E(x, y) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{s} = \mathbf{s} \cdot \mathbf{n}$$

$$\mathbf{s} \cdot \left(\frac{E(x, y)}{\mathbf{s}^2} \mathbf{s} \right) = E(x, y) \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}}{\mathbf{s}^2}$$

$$= E(x, y)$$

이므로 $E(x, y) \mathbf{S} / \mathbf{S}^2$ 은 이 방정식의 해의 하나이다. 일반해를 \mathbf{n} 이라 하면,

$$\mathbf{s} \cdot \left(\mathbf{n} - \frac{E(x, y)}{\mathbf{s}^2} \mathbf{s} \right) = \mathbf{s} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{s} \cdot \left(\frac{E(x, y)}{\mathbf{s}^2} \mathbf{s} \right)$$

$$= E(x, y) - E(x, y)$$

$$= 0$$

그러므로 $\mathbf{n} - E(x, y) \mathbf{s} / \mathbf{s}^2$ 는 \mathbf{s} 에 수직이다. 벡터 \mathbf{c} 를 적당히 잡으면

$$\mathbf{n} - \frac{E(x, y)}{\mathbf{s}^2} \mathbf{s} = \mathbf{c} \times \mathbf{s}$$

$$\mathbf{n} = \frac{E(x, y)}{\mathbf{s}^2} \mathbf{s} + \mathbf{c} \times \mathbf{s} \tag{3}$$

Lambert 법칙에서 \mathbf{n} 을 구하는 문제는 불량 설정임을 식(3)에서 알 수 있다.

불량 설정문제를 푸는 방법은 적당한 사전지식 (a priori knowledge)을 도입하여 가능한 해의 부류에 제약을 가하는 것이다. 사전 지식은 해의 후보에 구속을 부과하는 변분 원리(variational principle)로나, 또는 랜덤 영역에서 확률 분포의 형태로 표현된다.¹³⁾ 본 논문에서는 변분 원리에 의거하여 明暗에서 형상의 불량 설정 문제를 푼다. 이처럼 사전 지식을 문제에 포함시켜 양호 설정 문제로 변환하는 과정을 정착화라고 하며, 이것이 초기 시각의 계산이론의 골격이다.

데이터 y 로 부터 z 를 구하려는 불량 설정 문제를

$$T_z = y \tag{4}$$

라고 한다. 이 문제의 정착화를 위해 노름(norm) $\|\cdot\|$ 과 안정자(stabilizer) 범함수 $\|P_z\|$ 를 택해야 한다. Tikhonov의 표준 正則化 이론¹⁴⁾에서 T 는 선형 연산자, 노름은 2차 함수, P 는 선형이다. 정착화는

$$\|T_z - y\|^2 + \lambda \|P_z\|^2 \tag{5}$$

를 최소로 하는 z 를 구하는 것이다. 여기서 λ 는 정착화 파라메터이고, 해의 정착화 정도(둘째항)와 해의 데이터와의 밀접성(첫째항)간의 보상을 제어한다. 식(4)의 해법은 $\|P_z\| \leq C$ 를 만족하는 z 중에서 $\|T_z - y\|$ 를 최소로 하는 z 를 구하거나 혹은 $\|T_z - y\| \leq \epsilon$ 를 만족하는 z 중에서 $\|P_z\|$ 를 최소로 하는 z 를 구해도 된다. 구체적으로 식(5)의 λ 는 ϵ/C 이다.

식(5)의 첫째항은 식(2)의 좌변과 우변의 차이

$$E(x, y) - R(p, q) \tag{6}$$

에 대응한다. 식(6)을 밝기오차(brightness error)라 부른다. 최소화 문제를 풀기 위한 도구로써 많은 최적 이론이 제안되어 있지만 본 연구에서는 2중 변분법을 사용한다. 변분 원리는 특정한 물리적 구속을 도입하기 위해 이용되어 왔다. 변분 원리는 적당한 비용 함수(cost function)를 최소로 하는 함수를 문제의 해로 정의한다. 변분원리는 초기 시각의 불량 설정 성질을 해소할 수 있는 합리적인 방법이라고 알려져 있다.¹⁵⁾

IV. 안정자의 설계

식(5)의 둘째 항은 흔히 안정자로 불리는데 해의 형태와 수렴 속도를 결정한다. 안정자로 이용되는 물리적 구속은 해의 연속성에 근거한 스무딩(smoothing)이 일반적이다. 불량 설정 문제의 해법을 처음 제기한 Tikhonov도 안정자로 일종의 스플라인 함수인 Sobolev norm을 제안했었다.¹⁶⁾

$z(x, y)$ 가 x, y 평면의 영역 R^2 에서 스무드하거나 또는 구분적으로 스무드(picewise smooth)하다면 스무딩의 정의는 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \quad \forall (x, y) \in R^2 \tag{7}$$

이것은 C^2 또는 PC^2 곡면의 특성이다. 그라디언트로 식(7)을 표기하면

$$p_y = q_x \tag{8}$$

가 된다. 식(8)을 적분성(integrability)의 구속이라고 한다.¹⁷⁾ 식(6)을 영역 R^2 내의 모든 점에 대해서 고려하면

$$\int_{R^2} (E(x, y) - R(p, q))^2 dx dy \tag{9}$$

의 범함수가 된다. 식(9)는 해가 유일하지 못한 불량 설정 문제이므로 식(8)의 적분성 구속을 안정자로 포함시키면

$$J_1(p, q) = \int_{R^2} (E(x, y) - R(p, q))^2 + \lambda (p_y - q_x)^2 dx dy \tag{10}$$

가 된다. 여기서 λ 는 전술한 정착화 파라메터로, J_1 의 정착화 정도를 제어하는 스칼라 가중치이다.

식(10)의 안정자는 평면에서의 Green정리에 의해

$$\begin{aligned} \int_{R^2} (p_y - q_x)^2 dx dy &= k (\int_{R^2} (p_y - q_x) dx dy)^2 \\ &= k (\int_{\partial R} (p dx + q dy))^2 \\ &= 0 \end{aligned} \tag{11}$$

여기서 k 는 R 의 면적과 역의 관계를 갖는 상수이다. Strat와 Brooks는 곡면에 존재하는 임의의 폐경로에서 z 의 변화율의 합은 영이 된다는 것을 明暗에서 형상¹⁸⁾문제에 구속으로 사용하여 원할한 곡면을 복구하였다.¹⁹⁾ 식(11)의 관계는 적분성 구속이 그들이 정착화 함으로 사용했던 구속과 일치함을 보여준다. 그러나 폐경로 구속을 사용하면 x 방향과 y 방향의 적분이 달리 행해져 식(9)와 결합시켜 변분법을 적용하기가 어렵다.

식(10)과 같이 면 법선으로 변수화(parameterization)된 범함수

$$J(p, q) = \int_{R^2} F(x, y, p, q, p_x, p_y, q_x, q_y) dx dy \tag{12}$$

를 최소화하기 위해서는 두 개의 대응하는 Euler-Lagrange 방정식(이하, EL 방정식이라 함)

$$F_p - \frac{\partial}{\partial x} F_{p_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{p_y} = 0 \tag{13}$$

$$F_q - \frac{\partial}{\partial x} F_{q_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{q_y} = 0 \tag{14}$$

을 풀어야 한다. 식(10)의 EL 방정식은

$$(E-R)R_p + \lambda(p_{yy} - q_{xx}) = 0 \tag{15}$$

$$(E-R)R_q + \lambda(q_{xx} - p_{yy}) = 0 \tag{16}$$

이다. 첨자는 그에 대한 편도 함수를 뜻한다.

Meinguet는 2 차원에서 다음의 일반화 스플라인 범함수(generalized spline functional)를 제안했다.^[1]

$$f_m = \int \int_{R^2} \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \left(\frac{\partial^m f}{\partial x^i \partial y^{m-i}} \right)^2 dx dy \tag{17}$$

이 범함수는 R²에서 테이타의 평행이동(translation), 회전(rotation), 상사 변환(similarity transformation)에 대해 불변이다. 불변 특성은 비단 明暗 문제에서 뿐만 아니라, 초기 시각 전반에 걸쳐 반드시 요구된다. 장면 내의 물체가 영상 평면에 평행하게 이동하거나 회전할 때나 또는 관찰 방향과 평행하게 접근하거나 멀어져가도 초기 시각의 해인 형상이 변화해서는 안되기 때문이다.

m = 1 일 때, f = p(x, y)에 대해 식(14)의 범함수는

$$p_1 = \int \int_{R^2} (p_x^2 + p_y^2) dx dy \tag{18}$$

로 주어지고, f = q(x, y)에 대해서도 마찬가지로

$$q_1 = \int \int_{R^2} (q_x^2 + q_y^2) dx dy \tag{19}$$

가 된다. 식(18)과 (19)를 안정자로 식(9)에 포함시키면 최소화 되어야 할 범함수는

$$J_2(p, q) = \int \int_{R^2} (E(x, y) - R(p, q))^2 + \lambda(p_x^2 + p_y^2 + q_x^2 + q_y^2) dx dy \tag{20}$$

이다. 대응하는 EL 방정식은

$$(E-R)R_p + \lambda \Delta p = 0 \tag{21}$$

$$(E-R)R_q + \lambda \Delta q = 0 \tag{22}$$

이며, $\Delta p = p_{xx} + p_{yy}$ 와 $\Delta q = q_{xx} + q_{yy}$ 는 라플라스 방정식이다.

m = 2 일 때, f = p(x, y)에 대해 식(14)의 범함수는

$$p_2 = \int \int_{R^2} (p_{xx}^2 + 2p_{xy}^2 + p_{yy}^2) dx dy \tag{23}$$

가 되고 f = q(x, y)에 대한 범함수는

$$q_2 = \int \int_{R^2} (q_{xx}^2 + 2q_{xy}^2 + q_{yy}^2) dx dy \tag{24}$$

이다. 식(23)과 (24)를 식(9)의 正則化를 위한 안정자로 포함시키면 전체 범함수는

$$J_3(p, q) = \int \int_{R^2} (E(x, y) - R(p, q))^2 + \lambda((\Delta p)^2 + (\Delta q)^2) dx dy \tag{25}$$

이다. 관련된 EL 방정식은

$$(E-R)R_p - \lambda \Delta^2 p = 0 \tag{26}$$

$$(E-R)R_q - \lambda \Delta^2 q = 0 \tag{27}$$

이며, $\Delta^2 p = p_{xxxx} + 2p_{xxyy} + p_{yyyy}$ 와 $\Delta^2 q = q_{xxxx} + 2q_{xxyy} + q_{yyyy}$ 는 양조화 방정식(biharmonic equation)이다. $p_{xx}^2 + 2p_{xy}^2 + p_{yy}^2$ 과 $(\Delta p)^2$ 은 동일한 EL 방정식 $\Delta^2 p = 0$ 를 가지므로 식(25)에는 $(\Delta p)^2$ 과 $(\Delta q)^2$ 이 사용되었다. 지금까지 일반화 스플라인 범함수를 정칙화 항으로 사용하여 EL 방정식을 유도하였다. 다음은 이들을 이산 그물(discrete grid) 상에서 풀기 위한 병렬 해법을 개발한다.

V. Euler-Lagrange 방정식의 이산근사

화소(i, j)에서 편도함수의 유한 차분 형식(finite difference type)은 다음과 같다.

$$p_{xx} = \frac{1}{\epsilon^2} (p_{i+1, j} - 2p_{i, j} + p_{i-1, j})$$

$$p_{yy} = \frac{1}{\epsilon^2} (p_{i, j+1} - 2p_{i, j} + p_{i, j-1})$$

$$p_{xy} = \frac{1}{\epsilon^2} (p_{i+1, j+1} - p_{i, j+1} - p_{i+1, j} + p_{i, j})$$

이다. ϵ 은 화소 사이의 간격이다. 라플라스 연산자는

$$\Delta p = \frac{4}{\epsilon^2} (\bar{p}_{ij} - p_{i, j})$$

$$\bar{p}_{ij} = \frac{1}{4} (p_{i, j+1} + p_{i+1, j} + p_{i, j-1} + p_{i-1, j})$$

이다. 양조화 연산자는 $\Delta^2 p = \Delta(\Delta p)$ 이므로

$$\Delta^2 p = \frac{20}{\epsilon^4} (p_{i, j} - \tilde{p}_{ij})$$

$$\tilde{p}_{ij} = \frac{1}{20} \{ 8(p_{i+1, j} + p_{i-1, j} + p_{i, j+1} + p_{i-1, j-1})$$

$$- 2(p_{i+1, j+1} + p_{i-1, j-1} + p_{i-1, j+1} + p_{i+1, j-1}) - (p_{i+2, j} + p_{i-2, j} + p_{i, j+2} + p_{i, j-2}) \}$$

이다. q에 대해서도 동일한 근사식이 유도된다.

연산의 정밀성을 높이기 위해 위의 5점 근사 대신에 9점 근사를 이용할 수 있다. 이럴 경우, 라플라스 연산자는

$$\Delta p = \frac{4}{\epsilon^2} (\tilde{p}_{ij} - p_{i, j})$$

$$\tilde{p}_{ij} = \frac{1}{20} \{ 4(p_{i, j+1} + p_{i, j-1} + p_{i+1, j} + p_{i-1, j})$$

$$+ (p_{i-1, j-1} + p_{i-1, j+1} + p_{i+1, j+1} + p_{i+1, j-1}) \}$$

이다. 양조화 연산자는

$$\Delta^2 p = \frac{468}{\epsilon^4} (p_{i,j} - \tilde{p}_{i,j})$$

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{i,j} = & \frac{1}{468} \{ 144(p_{i,j-1} + p_{i+1,j} + p_{i,j+1} + p_{i-1,j}) \\ & + 8(p_{i+1,j-1} + p_{i+1,j+1} + p_{i-1,j+1} + p_{i-1,j-1}) \\ & - 18(p_{i,j-2} + p_{i+2,j} + p_{i,j+2} + p_{i-2,j}) \\ & - 8(p_{i+1,j-2} + p_{i+2,j-1} + p_{i+2,j+1} + p_{i+1,j+2} \\ & + p_{i-1,j+2} + p_{i-2,j+1} + p_{i-2,j-1} + p_{i-1,j-2}) \\ & - (p_{i+2,j-2} + p_{i+2,j+2} + p_{i-2,j+2} + p_{i-2,j-2}) \} \end{aligned}$$

이다. q에 대해서도 마찬가지로의 근사식을 유도할 수 있다.

J₁의 최소치를 얻기 위해 이상에서 유도한 유한 차분법을 이용해 식(15)와 (16)을 이산화한다. 그리고 p_{i,j}, q_{i,j}만을 좌변으로 고립시키면

$$p_{i,j} = u_{i,j} + \frac{\epsilon^2}{2\lambda} (E_{i,j} - R(p_{i,j}, q_{i,j})) R_p(p_{i,j}, q_{i,j}) \quad (28)$$

$$q_{i,j} = v_{i,j} + \frac{\epsilon^2}{2\lambda} (E_{i,j} - R(p_{i,j}, q_{i,j})) R_q(p_{i,j}, q_{i,j}) \quad (29)$$

이다. 여기서

$$\begin{aligned} u_{i,j} = & \frac{1}{2} \{ (p_{i,j+1} + p_{i,j-1}) \\ & - \frac{1}{4} (q_{i+1,j+1} + q_{i-1,j-1} - q_{i-1,j+1} - q_{i+1,j-1}) \} \\ v_{i,j} = & \frac{1}{2} \{ (q_{i+1,j} + q_{i-1,j}) \\ & - \frac{1}{4} (p_{i+1,j+1} + p_{i-1,j-1} - p_{i-1,j+1} - p_{i+1,j-1}) \} \end{aligned}$$

이다. 완화법(relaxation)은 고립된 항이 갱신된 값을 갖도록 나머지 식에 현재 값을 대입한다. 그렇게 하면

$$p_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^k + \frac{\epsilon^2}{2\lambda} (E_{i,j} - R(p_{i,j}^k, q_{i,j}^k)) R_p(p_{i,j}^k, q_{i,j}^k) \quad (30)$$

$$q_{i,j}^{k+1} = v_{i,j}^k + \frac{\epsilon^2}{2\lambda} (E_{i,j} - R(p_{i,j}^k, q_{i,j}^k)) R_q(p_{i,j}^k, q_{i,j}^k) \quad (31)$$

이 된다. 완화법은 반복 연산을 하면서 스무딩 구축을 전파한다.

J₂를 최소로 하는 그라디언트 값을 구하기 위해 식(21)과 (22)를 이산화한 후 완화법 형태로 만든다. 그러면

$$p_{i,j}^k = \tilde{p}_{i,j}^k + \frac{\epsilon^2}{4\lambda} (E_{i,j} - R(p_{i,j}^k, q_{i,j}^k)) R_p(p_{i,j}^k, q_{i,j}^k) \quad (32)$$

$$q_{i,j}^k = \tilde{q}_{i,j}^k + \frac{\epsilon^2}{4\lambda} (E_{i,j} - R(p_{i,j}^k, q_{i,j}^k)) R_q(p_{i,j}^k, q_{i,j}^k) \quad (33)$$

이다. J₃의 최소치를 구하기 위해 식(26)과 (27)을 유한 차분법을 이용해 이산화한 후 p_{i,j}와 q_{i,j}를 좌변으로 고립시키고 완화법 형태로 쓰면,

$$p_{i,j}^{k+1} = \tilde{p}_{i,j}^k + \frac{\epsilon^4}{20\lambda} (E_{i,j} - R(p_{i,j}^k, q_{i,j}^k)) R_p(p_{i,j}^k, q_{i,j}^k) \quad (34)$$

$$q_{i,j}^{k+1} = \tilde{q}_{i,j}^k + \frac{\epsilon^4}{20\lambda} (E_{i,j} - R(p_{i,j}^k, q_{i,j}^k)) R_q(p_{i,j}^k, q_{i,j}^k) \quad (35)$$

이 된다.

반복 형식에는 Gauss-Seidal법과 Jacobi 법이 있다. Gauss-Seidal법이 수렴성에서 약간 뛰어나지만 순차적으로 해를 얻게 되므로 본 연구에서는 병렬구현이 가능한 Jacobi법을 사용했다. 위에서 유도된 완화법은 정칙화 항으로 사용된 원환성 구축을 근방의 화소로 전달하게 된다. 매회마다 한 화소의 방향 p, q는 주위 화소의 p, q에 의해 새로이 갱신된다. 그래서 완화법을 구축 전파법(constraints propagation)이라고 한다.¹²⁾

VI. 실험결과 및 검토

면 방향을 계산하기 위해서는 우선 광원의 위치를 측정하여 식(2)에 의해 반사율 지도를 작성한다. 식(2)에서 E(x, y)와 p_s, q_s가 상수가 되고 p와 q가 변수로서 축을 이룬다.

다음은 반사율 지도를 p와 q에 대해 각각 편미분하여 R_p(p, q)와 R_q(p, q)를 작성한다. 편미분된 반사율 지도는 다음 식으로 주어진다.

$$R_p(p, q) = \frac{p_s(1+p^2+q^2) - p(1+p_s p + q_s q)}{(1+p^2+q^2)^{3/2} (1+p_s^2+q_s^2)^{1/2}} \quad (36)$$

$$R_q(p, q) = \frac{q_s(1+p^2+q^2) - q(1+p_s p + q_s q)}{(1+p^2+q^2)^{3/2} (1+p_s^2+q_s^2)^{1/2}} \quad (37)$$

실험 대상으로는 합성 영상(synthetic images)을 256 회도 레벨로 양자화하여 사용했다. 반경 R인 구면의 방정식은

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = & x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \\ z(x, y) = & (R^2 - x^2 - y^2)^{1/2} \end{aligned}$$

이다. 구면 f(x, y, z)의 그라디언트는

$$\Delta f = (2x, 2y, 2z(x, y))$$

이고 면 법선 n = Δf / |Δf| = Δf / (2R)이다.

$\mathbf{s} = (s_x, s_y, s_z)$ 라면, Lambert 법칙에 의해

$$E(x, y) = \rho\gamma \mathbf{n} \cdot \mathbf{s} \\ = (\rho\gamma/R) \{ s_x x + s_y y + s_z (R^2 - x^2 - y^2)^{1/2} \} \quad (38)$$

이다.

반경 R 이고 축방향에 단위 벡터 $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ 이며 그것이 원점을 통과한다고 하자. 원통면의 점을 $\mathbf{w} = (x, y, z)$ 라면 원통면의 방정식은

$$|\mathbf{w}|^2 - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})^2 = R^2$$

즉,

$$x^2 + y^2 + z^2 - (v_x x + v_y y + v_z z)^2 - R^2 = 0 \\ f(x, y, z) = (1 - v_x^2)x^2 + (1 - v_y^2)y^2 + (1 - v_z^2)z^2 \\ - 2(v_x v_y xy + v_x v_z xz + v_y v_z yz) - R^2 = 0$$

그라디언트는

$$\Delta f = (x', y', z') \\ x' = (1 - v_x^2)x - v_x v_y y - v_x v_z z(x, y) \\ y' = -v_x v_y x + (1 - v_y^2)y - v_y v_z z(x, y) \\ z' = -v_x v_z x - v_y v_z y + (1 - v_z^2)z(x, y)$$

이다. $|\Delta f| = 2R$ 이므로 $\mathbf{n} = \Delta f / (2R)$ 이다. Lambert 법칙에 의해

$$E(x, y) = \rho\gamma \{ \{ (1 - v_x^2)x - v_x v_y y - v_x v_z z(x, y) \} s_x \\ + \{ -v_x v_y x + (1 - v_y^2)y - v_y v_z z(x, y) \} s_y \\ + \{ -v_x v_z x - v_y v_z y + (1 - v_z^2)z(x, y) \} s_z \} \quad (39)$$

이다.

식(38)과 (39)에 의해 제작된 합성 영상에 평균 휘도치 40의 가우스 잡음을 첨가했다.

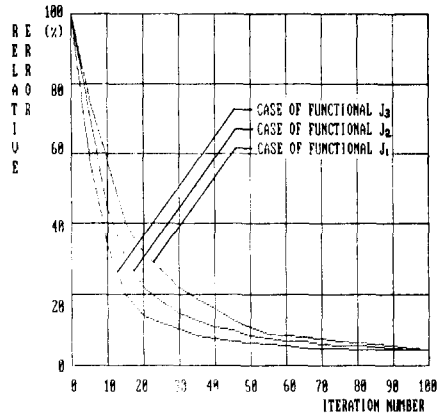
λ 의 값은 0.001에서 0.009 사이가 적당하며, λ 가 클수록 스무딩 구축의 강도가 심해진다. 그래서 λ 가 클수록 수렴 속도는 빨라지나 해의 정확성은 반대로 감소된다. 또 λ 가 너무 작으면(실험결과 0.001이하) 문제는 정칙화 되지 못하여 발산함을 알 수 있었다.

그림 2(a)에 구면의 경우에 대해 정확한 \mathbf{n} 에 대한 계산치 \mathbf{n}' 의 오차를

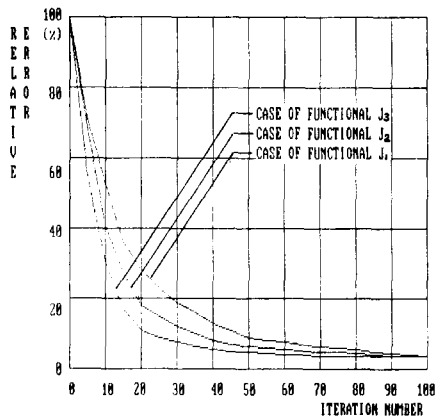
$$E_{\text{error}} = \frac{|\mathbf{n} - \mathbf{n}'|}{\mathbf{n}} \times 100 [\%]$$

에 의해 계산하여 반복 횟수의 함수로 표시하였다.

가로축은 반복 횟수를, 세로축은 오차를 나타낸다. 형상을 정확히 알고 있는 합성 영상을 사용하였으므로 오차의 변화를 측정할 수 있었다. 초기치를 국소 명암해석법(local shading analysis)으로 구하면 회선 수렴성이 뛰어나겠지만, 본 논문에서는 $p=1, q=1$ 로 하였다. p 와 q 의 각각에 대해 도사할 수도 있으나, 그림 2는 그들의 평균치에 대한 것이다. 그림 2(b)는 원통면에 대한 것이다. 수렴 속도에는 다소 차이가 있지만 50회 이상 반복하면 J_1, J_2, J_3 의 어느 경우든지 해의 정확성에서는 뚜렷한 차이를 볼 수 없



(a)



(b)

그림 2. (a) 제안된 안정자의 수렴특성(구면)
(b) 제안된 안정자의 수렴특성(원통면)

Fig. 2. (a) Convergence properties of proposed stabilizers(spherical surface).

(b) Convergence properties of proposed stabilizers(Cylindrical surface).

다. 광원의 위치에 따라 전체 합성 영상의 휘도 분포가 달라지므로 얼마간의 차이는 있으나 구해진 방향의 평균 오차는 틸트(tilt)와 슬랜트(slant)로 변환했을 때 2~5° 내었다.

그래디언트 공간을 이용하면 변수가 둘로 감소되는 장점이 있지만 시야 한계선(occluding boundary)의 정보를 전혀 활용하지 못하는 단점이 있다.^[2] 시야 한계선은 불량 설정 문제에 분명한 경계 조건을 제공하지만, 그래디언트 공간에서는 p와 q 중 적어도 하나는 그곳에서 무계(unbounded)이다. 이 점 때문에 그래디언트 공간 보다는 직교 좌표계를 사용 하기도 한다.^[1] 그러나 직교 좌표계를 사용할 경우, 해법은 먼저 시야 한계선에서의 법선을 구한 다음 전체 영상에 완화법을 적용하므로 처리는 두 단계를 거치게 된다. 그러므로 Strat와 같이 경계 처리를 따로 하고 물체 내부의 스무딩 영역에만 V정의 계산 알고리즘을 적용하는 것^[9]에 비해 처리 시간과 정확성에서 잇점이 없다. 본 논문에서는 시야 한계선 문제는 다음으로 미루고 불량 설정 문제의 정착화와 그 효과에 관해 고찰하였다.

반사율 지도의 작성을 위해 광원의 위치를 사전 지식으로 갖고 있거나, 또는 측정 기준용 물체의 정확한 형상을 사전 지식으로 갖고 있어야 한다. 그러나 최근에는 광원의 위치를 완화법에 의해 추정하는 알고리즘이 제안된 바 있다.^[11] 이 방법을 사용하면 해의 정확성과 수렴 속도에서 오차가 약간 심해지지만 물체의 인식에는 영향이 없다. 그러나 본 논문은 정착화의 정량적인 특성 파악을 위해 광원의 위치를 정확히 대입했다.

Ⅶ. 결 론

「明暗에서 형상」 문제도 다른 초기 시각과 마찬가지로 불량 설정 문제이다. 그래서 유일해를 얻기 위해 양호 설정 문제로의 변환이 요구된다. 이것을 정착화라고 하며 본 논문에서는 세 가지의 스무딩 정착화 항이 사용되었다. 그것들은 C² 곡면에 대한 스무딩의 정의와 스플라인 범함수에서 유도되었다.

정착화된 범함수의 최소치를 얻기 위해 대응하는 EL 방정식을 유도하였다. EL 방정식은 이산 정보를 취급할 수 있도록 유한 차분법을 이용해 근사화 된다.

실험결과 얻어진 물체의 형상은 원래의 형상과 5

% 이내의 오차를 보여 장면의 인식에는 큰 영향을 미치지 않으리라 여겨진다. 반복에 따른 시간 소모는 실시간 처리를 힘들게 하지만, 제안된 반복법은 병렬 연산이 가능하므로 배열 처리기(array processor) 등에 의해 극복될 수 있다.

參 考 文 獻

[1] B.K.P. Horn, "Obtaining shape from shading information," in *The Psychology of Computer Vision*, P.H. Winston, Ed., McGraw-Hill, NY, pp. 115-155, 1975.

[2] K. Ikeuchi and B.K.P. Horn, "Numerical shape from shading and occluding boundaries," *Artif. Intelligence* 17, pp. 141-184, 1981.

[3] T. Poggio, V. Torre and C. Koch, "Computational vision and regularization theory," *Nature*, vol. 317-26, pp. 314-319, 1985.

[4] B.K.P. Horn and M.J. Brooks, "The variational approach to shape from shading," *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* 33, pp. 174-208, 1986.

[5] B.K.P. Horn and R.W. Sjöberg, "Calculating the reflectance map," *Applied Optics*, vol. 18-11, pp. 1770-1779, 1979.

[6] D. Marr, *Vision*, Freeman, San Francisco, 1982.

[7] H.G. Barrow and J.M. Tenenbaum, "Recovering intrinsic scene characteristics from images," in *Computer Vision Systems*, A. Hanson and E. Riseman, Eds., Academic, NY, pp. 3-26, 1978.

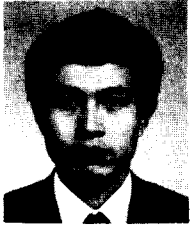
[8] A.N. Tikonov and V.A. Arsenin, *Solutions of ill-posed problems*, Winston and Sons, Washington, DC., 1977.

[9] T.M. Strat, "A numerical method for shape from shading from a single image," M.S. thesis, EECS, MIT, 1979.

[10] M.J. Brooks, "Surface normals from closed paths," *IJCAI*, Tokyo, pp. 98-101, 1979.

[11] J. Meinguet, "An intrinsic approach to multivariate spline interpolation at arbitrary points," in *Polynomial and Spline Approximation: Theory and Applications*, B.N. Sahney, Ed., Dordrecht, Netherlands, 1979.*

 著 者 紹 介


崔 然 成 (正會員)

1959年 12月 25日生. 1982年 2月
 중앙대학교 전자공학과 졸업. 1984
 年 2月 중앙대학교 대학원 전자
 공학과 공학석사학위 취득. 1988年
 8月 동대학원 박사과정 수료.
 1988年 3月~현재 제주대학교 정
 보공학과 전임강사. 주관심분야는 영상처리, 컴퓨터
 비전, 신경회로망 인공지능 등임.


崔 宗 秀 (正會員)

1949年 5月 3日生, 1975年 인하
 公대 전기공학과(약전) 졸업. 1977
 年 서울대학교 대학원 전자공학과
 석사학위 취득. 1981年 일본 Keio
 대학 대학원 전기공학과 공학박사
 학위 취득. 현재 중앙대학교 전자
 공학과 부교수. 주관심분야는 醫用超音波imaging, 컴
 퓨터視覺, 映像通信 등임.