

# 다경로인 경우 Eigen 구조를 이용하는 공간 스펙트럼 추정 알고리즘의 성능비교

(Performance Comparisons of Eigenstructure Based Spatial Spectrum  
Estimation Algorithms in a Multipath Environment)

李 忠 容\*\*, 車 日 煥\*, 尹 大 熙\*

(Chung Yong Lee, Il Whan Cha and Dae Hee Youn)

## 要 約

기존의 알고리즘에 비해 향상된 성능을 갖는 eigenstructure를 이용한 공간 스펙트럼 추정 알고리즘들을 소개하고 자세히 설명한다. 또한, 다경로(multipath) 상황에서 발생하는 알고리즘의 성능저하를 해결하는 방법들을 소개하고 상세히 설명한다. 아울러, 입사되는 신호들의 수를 잘못 추정하였을 경우에 Eigenstructure를 이용하는 알고리즘들이 받는 영향을 컴퓨터 시뮬레이션을 통해 알아본다. MUSIC, EV방법과 eigenstructure를 Linear Prediction 방법에 적용한 방법에 대해 그 영향을 알아 보았다. 시뮬레이션 결과 MUSIC, EV방법의 경우에는 입사신호수를 실제보다 많이 추정해도 성능에 큰 영향이 없으나 적게 추정할 경우 심한 성능저하 현상이 발생되었다.

Eigenstructure를 Linear Prediction 방법에 적용한 방법의 경우에는 입사신호수를 실제보다 적게 추정하는 경우에는 성능에 큰 영향이 없으나 많이 추정할 경우 심한 성능저하 현상이 발생되었다.

## Abstract

The purpose of this paper is to explain eigenstructure based spatial spectrum estimation algorithms computing better estimates than the other approaches. Also, as an approach to overcome performance degradations in a multipath environments, the notion of forward and backward spatial smoothing is discussed. Intensive simulation results, which include the comparisons of the eigenbased spatial spectral estimation algorithms in the situations of faulty estimation of the number of signals, are presented.

The simulation results have shown that overestimation of the number of signals is more desirable than underestimation in using EV(Eigen Vector) and MUSIC (Multiple Signal Classification) algorithms and that underestimation of the number of signals is better strategy than overestimation in using eigenstructure based LP (Linear Prediction) algorithms.

\*正會員, \*\*準會員, 延世大學校 電子工學科  
(Dept. of Elec. Eng., Yonsei Univ.)  
接受日字: 1988年 10月 4日

## I. 서 론

Array 신호처리에서, 여러 센서들로 구성된 array에 받아들여진 평면파들에 대한 입사각을 추정하는

문제는 소나, 레이다 및 지구물리학 분야 등에서 중요시되는 문제들 중의 하나이며, 수학적으로는 방사장(radiation field)의 공간 스펙트럼(spatial spectrum)을 추정하는 것과 동일하다.<sup>[1]</sup> 이러한 공간 스펙트럼을 추정하는 알고리즘에는 여러가지가 있으며, 이들에 대한 연구가 활발히 진행중이다. Johnson<sup>[1]</sup>은 대표적인 공간 스펙트럼 추정 알고리즘들을 소개하였고, 이를 토대로 하여 Youn<sup>[2]</sup>은 여러 알고리즘들에 대해 비교, 검토하였다. 그러나 [1][2]는 모두 입사 신호들이 다경로(multipath)가 아닌 경우에 대해서만 생각하였다. 최근 다경로(또는 coherence)문제가 야기시키는 알고리즘의 성능저하 현상을 해결하기 위한 연구가 진행되고 있고, eigenstructure를 이용하는 알고리즘에 대한 연구가 큰 주목을 받고 있다. 이러한 공간 스펙트럼을 추정하는 대표적인 방법으로 Bartlett 방법,<sup>[1]</sup> MV(minimum variance)방법,<sup>[3]</sup> LP(linear prediction)방법,<sup>[4]</sup> MUSIC(multiple signal classification)방법<sup>[5]</sup> 그리고 EV(eigen vector)방법<sup>[10]</sup> 등이 연구되어 왔다. 이 중에서 MUSIC과 EV같은 eigenstructure를 이용하는 알고리즘은 다른 알고리즘에 비해 분해능(resolution), 추정오차(bias), 변화도(variability)등의 스펙트럼 평가 기준면에서 뛰어난 성능을 나타낸다.<sup>[1][3]</sup> 하지만, 이 알고리즘의 경우는 입사신호 수를 정확히 알고 있다는 가정이 필요하며,<sup>[1]</sup> 다경로 상황하에서는 다른 알고리즘과 마찬가지로 성능이 급격히 떨어지게 된다.<sup>[6]</sup>

최근, 다경로 즉, coherence 문제의 해결에 대해 많은 연구가 진행되어 왔다. Shan 등은 Evans 등이 제안한 방법을 확장한 spatial smoothing 방법을 제안하였고,<sup>[8]</sup> Wang 등은 광대역 coherent 신호에 대해 frequency domain smoothing 방법을 제안하였다.<sup>[12]</sup> 또한 Youn 등은 Nuttall<sup>[17]</sup>의 forward-backward 방법을 적응(adaptive) 공간 스펙트럼 추정방법에 적용하여 coherence 문제를 해결하였고,<sup>[7]</sup> Williams 등은 [8]과 [17]을 결합한 형태의 modified spatial smoothing 방법을 제안하였다.<sup>[9]</sup>

한편, 입사신호 수의 추정에 대해 Wax 등이 AIC(akaikie information criterion)방법을 확장한 방법을 제시하였으나, 비선형(nonlinear) 문제와 정확성 문제가 발생된다.<sup>[14]</sup>

본 논문의 목적은 [1]에서 소개된 eigenstructure를 이용하는 알고리즘에 대해 좀더 자세히 설명하고, 최근 소개된 대표적인 coherence 문제의 해결 방법들을 종합하여 설명하는데 있다. 아울러, eigenstructure를 이용하는 알고리즘을 사용할 경우, 입사신호 수를 정확하게 추정하지 못하였을때 이 알고리즘이

받는 영향을 컴퓨터 시뮬레이션을 통해 비교, 검토한다.

## II. 신호의 모델링

그림 1과 같이 협대역 신호가 서로 다른 방향에서 M개의 센서로 이루어진 등간격 선형 array로 평행 입사할 경우, i번째 센서에서 받은 신호는 다음과 같다.

$$x_i(t) = \sum_{k=1}^p s_k(t) \exp \left[ -j\omega_0 \left( \frac{d}{c} \right) (i-1) \sin \theta_k \right] + n_i(t) \quad (1)$$

(1 ≤ i ≤ M, p < M)

여기서,  $s_k(t)$ 는 k번째 입사신호의 envelope,  $\omega_0$ 는 입사신호의 주파수, d는 센서사이의 간격, c는 입사신호의 속도,  $\theta_k$ 는 k번째 입사신호의 입사각이다.  $n_i(t)$ 는 i번째 센서에 부가된 잡음으로서, 평균이 영이고 분산이  $\sigma^2$ 인 white random process이며, 입사신호와와는 상관 관계가 없다고 가정한다. 즉,  $E[n_i(t)] = 0$ ,  $E[n_i(t)n_j(t)] = \sigma^2 \delta(i-j)$ ,  $E[s_k(t)n_i(t)] = 0$  (1 ≤ i, j ≤ M, 1 ≤ k ≤ p). 여기서,  $E[\cdot]$ 는 통계적 평균을 나타낸다. 따라서, 각 센서에서 얻은 snapshot data 벡터는 다음과 같이 표시된다.

$$x(t) = A \cdot s(t) + n(t) \quad (2)$$

여기서,

$$x(t)^T = [x_1(t) x_2(t) \dots x_M(t)] \quad (3a)$$

$$s(t)^T = [s_1(t) s_2(t) \dots s_p(t)] \quad (3b)$$

$$n(t)^T = [n_1(t) n_2(t) \dots n_M(t)] \quad (3c)$$

$$A = [a(\theta_1) a(\theta_2) \dots a(\theta_p)] \quad (3d)$$

$$a(\theta_k)^T = [1 e^{-j\omega_0 \tau_k} \dots e^{-j\omega_0(M-1)\tau_k}] \quad (3e)$$

$$\tau_k = (d/c) \sin \theta_k \quad (3f)$$

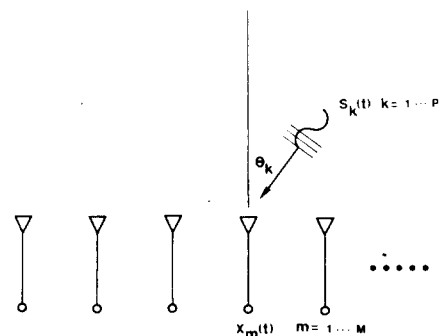


그림 1. 입사신호와 센서의 기하학적 표현  
Fig. 1. Geometrical representation of incident signals and sensors.

이고,  $\underline{a}(\theta_k)$ 는 'signal steering vector'라 하며 k 번째 입사신호의 방향정보를 가지고 있는 행벡터이다.

이 data vector로 구성되는 covariance matrix 는 다음과 같다.

$$\mathbf{R} = \mathbf{E}\{\underline{x}(t)\underline{x}^H(t)\} = \mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I} \quad (4)$$

여기서,  $\mathbf{S} = \mathbf{E}\{\underline{s}(t)\underline{s}^H(t)\}$ 으로 주어지는 signal covariance matrix,  $\sigma^2$ 은 잡음의 분산, H는 conjugate transpose 그리고  $\mathbf{I}$ 는 단위행렬을 나타낸다. 여기서,  $\mathbf{S}$ 는 입사신호간에 상관관계가 없으면 대각행렬, 입사신호간에 부분상관 관계가 있으면 nonsingular비대각행렬, 입사신호간에 완전상관 관계가 있으면 singular 행렬이 된다.

### III. LP와 MV 방법

공간영역 스펙트럼을 추정하는 대표적인 알고리즘으로서 LP(linear prediction)와 MV(minimum variance)방법이 있다.

#### 1. LP 방법

LP 방법은 시간축상에서 많이 이용되는 AR(auto regressive) 모델을 이용한다.<sup>[1,2,5,15]</sup> 즉, 공간축상의 임의의  $m_0$ 번째 센서를 기준센서로 할때, 이 기준센서의 출력  $x_{m_0}(t)$ 를 나머지 센서 출력들의 weighted linear combination으로 추정할 수 있다. 즉,

$$x_{m_0}(t) = -\sum_{i=1}^M w_i x_i(t) \quad (5)$$

이를 도시하면 그림 2와 같다. 여기서, weight  $w_i$ 는 추정값의 평균 자승오차를 최소화시켜야 한다. 평균 자승오차는 다음과 같다.

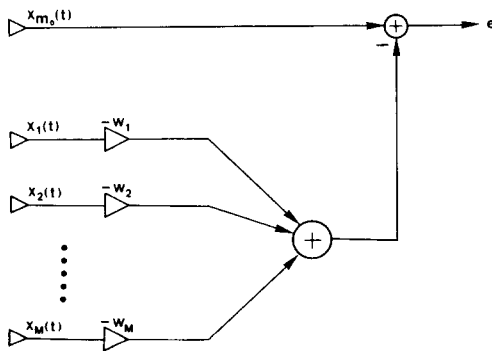


그림 2. Linear predictor의 block diagram  
Fig. 2. Block diagram of linear prediction.

$$e = \mathbf{E}\left[\left|x_{m_0}(t) + \sum_{i=1}^M w_i x_i(t)\right|^2\right] \quad (6)$$

즉, weight 벡터를  $\underline{w}^T = [w_1 w_2 \dots w_{m_0} \dots w_M]$ 으로 정의 할때, 제한조건을  $w_{m_0} = 1$ 로 하고  $\mathbf{E}\{\underline{w}^H \underline{x}\} = \underline{w}^H \mathbf{R} \underline{w}$ 를 최소화하는  $\underline{w}$ 를 찾는 것과 동일하다. 한편, 행벡터  $\underline{u}_{m_0}^T = [0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0]$ 으로 정의하면, 제한조건은  $\underline{w}^H \underline{u}_{m_0} = 1$ 로 된다. Lagrange multiplier technique을 이용하여 최적 weight 벡터  $\underline{w}_{opt}$ 를 찾으면,<sup>[1,15]</sup>

$$\underline{w}_{opt} = \frac{\mathbf{R}^{-1} \underline{u}_{m_0}}{\underline{u}_{m_0}^T \mathbf{R}^{-1} \underline{u}_{m_0}} \quad (7)$$

이고, 이때의 스펙트럼은 다음과 같다.<sup>[1,2,15]</sup>

$$P_{LP}(\theta) = \frac{\underline{u}_{m_0}^T \mathbf{R}^{-1} \underline{u}_{m_0}}{|\underline{u}_{m_0}^T \mathbf{R}^{-1} \underline{c}(\theta)|^2} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \text{여기서, } \underline{c}(\theta)^T &= [1 e^{-j\omega_0 \tau} \dots e^{-j\omega_0 (M-1)\tau}] \\ \tau &= (d/c) \sin \theta \end{aligned}$$

로 주어지며,  $\underline{c}(\theta)$ 를 'look direction vector'라 한다. 스펙트럼의 피크값으로 입사신호의 상대적인 power를 추측할 수 있으므로 다음의 수정된 식을 이용한다.

$$\bar{P}_{LP}(\theta) = \frac{1}{|\underline{u}_{m_0}^T \mathbf{R}^{-1} \underline{c}(\theta)|} \quad (9)$$

#### 2. MV방법

이 방법은 ML(maximum likelihood) 방법이라고도 한다.<sup>[3,5,15]</sup> 이 방법은  $\theta_i$ 로 입사되는 평면파에 대한 이득은 1로 하면서, 즉,  $\underline{w}^H \underline{c}(\theta) = 1$ 로 하면서, 전체 에너지  $\underline{w}^H \mathbf{R} \underline{w}$ 를 최소화하는 weight 벡터  $\underline{w}$ 를 찾는 것이다. 이를 도시하면 그림 3과 같다. Lagrange multiplier technique을 이용하여 최적 weight 벡터  $\underline{w}_{opt}$ 를 찾으면,<sup>[1,15]</sup>

$$\underline{w}_{opt} = \frac{\mathbf{R}^{-1} \underline{c}(\theta)}{\underline{c}(\theta)^H \mathbf{R}^{-1} \underline{c}(\theta)} \quad (10)$$

이고, 이때의 스펙트럼은 다음과 같다.<sup>[15]</sup>

$$P_{MV}(\theta) = \frac{1}{|\underline{c}^H(\theta) \mathbf{R}^{-1} \underline{c}(\theta)|} \quad (11)$$

### IV. Eigenstructure의 해석

Covariance matrix  $\mathbf{R}$ 을 eigendecomposition하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I} \\ &= \sum_{i=1}^M \alpha_i \underline{v}_i \underline{v}_i^H \end{aligned} \quad (12)$$

여기서,  $\alpha_i$ 와  $\underline{v}_i$ 는 각각 i번째 eigenvalue와 eigenvector이며,  $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_M$ 의 관계를 만족한다고 가

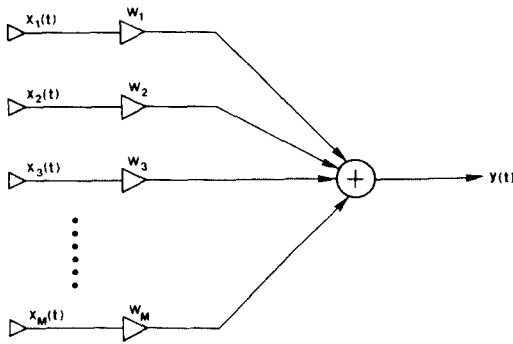


그림 3. Minimum variance의 block diagram  
Fig. 3. Block diagram of minimum variance.

정한다.

한편,  $\mathbf{R} \mathbf{v}_i = (\mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{A}^H + \sigma^2 \mathbf{I}) \mathbf{v}_i = \alpha_i \mathbf{v}_i$ 의 관계식에서  $(\mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{A}^H) \mathbf{v}_i = (\alpha_i - \sigma^2) \mathbf{v}_i = \beta_i \mathbf{v}_i$ 를 만족한다. 여기서, 센서간의 간격  $d$ 가 입사신호의 반파장보다 작고(즉,  $d < \lambda_0/2$ )  $p$ 개의 입사신호의 입사각이 모두 다를 경우,  $\mathbf{A}$ 는 Vandermonde 구조가 되고  $\text{rank}(\mathbf{A}) = p$ 가 된다. 만일, 모든 신호들이 완전상관 관계를 갖지 않아서  $\mathbf{S}$ 가 nonsingular하다면  $\text{rank}(\mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{A}^H) = p$ 가 되어서  $\beta_i = 0 (p+1 \leq i \leq M)$ 이 된다. 또한, eigenvector 사이의 orthonormality에 의해

$$\mathbf{I} = \sum_{i=1}^M \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H \tag{13}$$

으로 표현할 수 있으므로

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{A}^H + \sigma^2 \mathbf{I} \\ &= \sum_{i=1}^p \beta_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H + \sigma^2 \sum_{i=1}^M \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H \\ &= \sum_{i=1}^p (\beta_i + \sigma^2) \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H + \sum_{i=p+1}^M \sigma^2 \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H \\ &= \sum_{i=1}^p \alpha_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H + \sum_{i=p+1}^M \sigma^2 \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H \end{aligned} \tag{14}$$

이 된다.

이때,  $\mathbf{v}_i (1 \leq i \leq p)$ 인 eigenvector를 principal eigenvector라 하며, 이 eigenvector가 span하는 부분공간을 신호부분공간(signal subspace),  $\mathbf{v}_i (p+1 \leq i \leq M)$ 가 span하는 부분공간을 잡음부분공간(noise subspace)이라 한다. 신호부분공간은  $p$ 개의 신호방향벡터를 내포하고 있으며, 이 두 부분공간은 서로 직교한다.<sup>[2,5]</sup>

### V. Eigenstructure를 이용하는 방법

이 방법은 covariance matrix  $\mathbf{R}$ 의 eigenstructure

를 이용하여 look direction vector  $\mathbf{c}(\theta)$  특성을 변화 시킴으로써 좀더 좋은 성능을 갖도록 하는 방법으로서,<sup>[1]</sup> EBLP(eigen based, linear prediction)방법,<sup>\*</sup> EVLP(eigen vector linear prediction)방법,<sup>\*</sup> MUSIC(multiple signal classification)방법, EV(eigenvector)방법등이 있다.

Matrix  $\mathbf{C}$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\mathbf{C} = \sum_{i=p+1}^M c_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H \tag{15}$$

여기서 계수  $c_i$ 는 임의의 상수이다.

만일,  $c_i = 1$ 로 하는 경우,

$$\mathbf{C} \triangleq \mathbf{C}_{EV} = \sum_{i=p+1}^M \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H \tag{16}$$

이 되며,  $\mathbf{C}_{EV}$ 는 projection matrix가 되어서  $\mathbf{C}_{EV} \mathbf{c}(\theta)$ 는 신호 방향벡터에 직교하는 성분만을 갖게 된다.<sup>[1]</sup> 이때 식 (8), (11)에 의해,

$$\bar{P}_{EVLP}(\theta) = \frac{1}{\left| \mathbf{u}_m^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C}_{EV} \mathbf{c}(\theta) \right|} \tag{17}$$

$$P_{EV}(\theta) = \frac{1}{\left| \mathbf{c}(\theta)^H \mathbf{C}_{EV}^{-1} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C}_{EV} \mathbf{c}(\theta) \right|} \tag{18}$$

로 된다.

여기서,

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^M \alpha_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H \tag{19}$$

$$\mathbf{R}^{-1} = \sum_{i=1}^M \frac{1}{\alpha_i} \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H \tag{20}$$

이므로,

$$\mathbf{C}_{EV}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C}_{EV} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C}_{EV} = \sum_{i=p+1}^M \frac{1}{\alpha_i} \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H \tag{21}$$

이 된다.<sup>[1]</sup>

결국,

$$\bar{P}_{EVLP}(\theta) = \frac{1}{\left| \mathbf{u}_m^T \mathbf{R}^{-1} \left( \sum_{i=p+1}^M \frac{1}{\alpha_i} \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H \right) \mathbf{c}(\theta) \right|} \tag{22}$$

$$P_{EV}(\theta) = \frac{1}{\left| \mathbf{c}(\theta)^H \left( \sum_{i=p+1}^M \frac{1}{\alpha_i} \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H \right) \mathbf{c}(\theta) \right|} \tag{23}$$

가 된다.

마찬가지로  $c_i = \sqrt{\alpha_i}$ 로 하는 경우는

$$\mathbf{C} \triangleq \mathbf{C}_{EB} = \sum_{i=p+1}^M \sqrt{\alpha_i} \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H \tag{24}$$

이 되고,

$$\mathbf{C}_{EB}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C}_{EB} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C}_{EB} = \sum_{i=p+1}^M \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H \tag{25}$$

이 된다. 결국 (25)가 의미하는 것은 신호와 관계없

는 스펙트럼은 "whiten" 되도록 한다는 것이다.<sup>[11]</sup> 이 때는 식 (22), (23)과 마찬가지로,

$$\bar{P}_{EBLP}(\theta) = \frac{1}{\left| \mathbf{u}_m^T \left( \sum_{i=p+1}^M \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H \right) \mathbf{c}(\theta) \right|} \quad (26)$$

$$P_{MUSIC}(\theta) = \frac{1}{\left| \mathbf{c}(\theta)^H \left( \sum_{i=p+1}^M \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H \right) \mathbf{c}(\theta) \right|} \quad (27)$$

이 된다.

VI. Coherent 신호의 문제점

앞에서 식 (4)에 의해

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I}$$

로 주어진다. 여기서, eigenstructure technique을 이용하기 위해서는  $\mathbf{S}$ 가 nonsingular 즉, 모든 입사신호들 간에 correlation이 없어야 한다. 하지만, multipath 또는 smart jamming 신호 등에 의한 coherent 신호가 입사될 때에는  $\mathbf{S}$ 는 singular가 된다. 따라서 eigenstructure 성질을 이용할 수 없게 된다. 이유는 다음과 같다. p개의 입사신호 중에서 두개의 신호  $s_1(t)$ 와  $s_2(t)$ 가 coherent한 경우를 가정하면 다음 관계가 성립된다.

$$s_2(t) = \rho s_1(t) e^{j\Delta\phi} \quad (28)$$

여기서,  $\rho$ 는 반사계수이고  $\Delta\phi$ 는 기준센서에 대한  $S_1(t)$ 와  $S_2(t)$  사이의 위상차(phase difference)이다. 따라서,  $\mathbf{s}(t)^T = [(1 + \rho e^{j\Delta\phi}) s_1(t) \ s_3(t) \ \dots \ s_p(t)]$ 이고  $\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1) + \rho e^{j\Delta\phi} \mathbf{a}(\theta_2) \ \mathbf{a}(\theta_3) \ \dots \ \mathbf{a}(\theta_p)]$ 가 되어서 실제 입사신호 수 p보다 적은 p-1개의 신호로 간주되며, 또한  $\mathbf{a}(\theta_1) + \rho e^{j\Delta\phi} \mathbf{a}(\theta_2)$ 는 정확한 신호의 방향벡터가 될 수 없다. 이를 확장하면 다수의 coherent 신호들이 군(group)을 이루어 입사되는 경우에도 마찬가지이다.

VII. Coherent 신호 문제의 해결방법

1. SS (spatial smoothing technique)

Coherent 문제가 발생하여 signal covariance matrix  $\mathbf{S}$ 가 singular가 되어서 eigenstructure 방법을 적용할 수 없는 경우에는 SS를 이용하여  $\mathbf{S}$ 를 nonsingular하게 함으로써 eigenstructure를 이용할 수 있도록 한다. SS는 다음과 같다.

그림 4와 같은 L개의 센서로 이루어진 array를 M개의 센서로 이루어진 ( $M < L$ ) subarray로 나눌 수 있다. 여기서,  $L-M+1$ 개의 subarray는 그림과 같이 겹쳐진 형태로 구성된다. j번째 subarray에서 얻

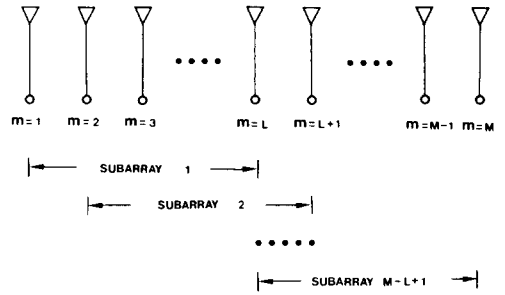


그림 4. Spatial smoothing을 위한 subarray의 구조  
Fig. 4. Subarray for spatial smoothing.

어진 data 벡터를  $\mathbf{x}_j(t)$ 라 하면,

$$\mathbf{x}_j(t) = \mathbf{A}\mathbf{D}^{(j-1)} \mathbf{s}(t) + \mathbf{u}_j(t) \quad (1 \leq j \leq L-M+1) \quad (29)$$

가 된다. 여기서,  $\mathbf{D}^{(j)}$ 는  $\mathbf{D}$  matrix의 j번째 power를 나타내며,

$$\mathbf{D} = \text{diag} \{ e^{-j\omega_0 \tau_1} \ e^{-j\omega_0 \tau_2} \ \dots \ e^{-j\omega_0 \tau_p} \} \quad (30a)$$

$$\tau_k = (d/c) \sin \theta_k \quad (1 \leq k \leq p) \quad (30b)$$

이다.

따라서, j번째 subarray의 covariance matrix를  $\mathbf{R}_j$ 라 하면,

$$\mathbf{R}_j = \mathbf{A}\mathbf{D}^{(j-1)} \mathbf{S}\mathbf{D}^{H(j-1)} \mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I} \quad (1 \leq j \leq L-M+1) \quad (31)$$

로 된다. 여기서  $\mathbf{S}$ 는 signal covariance matrix이다. 이를 이용하여 spatially smoothed covariance matrix를 정의한다.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{R}} &= \frac{1}{L-M+1} \sum_{j=1}^{L-M+1} \mathbf{R}_j \\ &= \mathbf{A} \left( \frac{1}{L-M+1} \sum_{j=1}^{L-M+1} \mathbf{D}^{(j-1)} \mathbf{S}\mathbf{D}^{H(j-1)} \right) \mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I} \\ &= \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{S}}\bar{\mathbf{A}}^H + \sigma^2\mathbf{I} \end{aligned} \quad (32)$$

여기서,

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{1}{L-M+1} \sum_{j=1}^{L-M+1} \mathbf{D}^{(j-1)} \mathbf{S}\mathbf{D}^{H(j-1)}$$

로 주어지는 spatially smoothed signal covariance matrix이다. 만일  $L-M+1 \geq p$ 를 만족한다면 p개의 입사신호가 coherent 하더라도  $\bar{\mathbf{S}}$ 는 nonsingular하게 된다. 한편,  $\bar{\mathbf{R}}$ 는 incoherent의 경우와 똑같은 형태를 가지므로 신호의 coherence에 관계없이 eigenstructure 방법에 이용될 수 있다.

한편,  $p$ 개의 신호에 대해 subarray size  $M \geq p+1$  이어야 하고 subarray 갯수  $L-M+1 \geq p$  이어야 한다. 따라서,  $L \geq 2p$ 의 array size가 필요하다. 결국  $L$ 개의 센서 array로부터  $M$ 개의 센서 array 효과만을 얻을 수 밖에 없다는(즉, effective aperture size가 줄어든다는) 단점이 있다.

2. FB(forward and backward technique)와 MSS(modified spatial smoothing technique)

SS를 확장한 MSS를 이용하면 SS에 비해 effective aperture size를 늘릴 수 있다. MSS는 다음과 같다. SS에서의  $j$ 번째 subarray에 의한 covariance matrix는 다음과 같다.

$$\mathbf{R}_j = \mathbf{A} \mathbf{D}^{(j-1)} \mathbf{S} \mathbf{D}^{H(j-1)} \mathbf{A}^H + \sigma^2 \mathbf{I} \quad (1 < j < L-M+1) \quad (33)$$

새로운 matrix  $\mathbf{R}'_j$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\mathbf{R}'_j = \mathbf{J} \mathbf{R}_j \mathbf{J}^H \quad (34)$$

여기서,  $\mathbf{J}$ 는 다음과 같이 정의되는 reflection matrix이며,

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ & \ddots \\ \mathbf{1} & & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (35)$$

\*는 conjugate를 나타낸다.

따라서,

$$\mathbf{R}'_j = \mathbf{J} \mathbf{A}^* \mathbf{D}^{*(j-1)} \mathbf{S}^* \mathbf{D}^{H(j-1)} \mathbf{A}^H \mathbf{J} + \sigma^2 \mathbf{I} \quad (36)$$

이 된다. Modified spatially smoothed covariance matrix를 다음과 같이 정의한다.

$$\widehat{\mathbf{R}} = \frac{1}{2(L-M+1)} \sum_{j=1}^{L-M+1} (\mathbf{R}_j + \mathbf{R}'_j) \quad (37)$$

한편,  $\mathbf{J} \mathbf{A}^* = \mathbf{A} \mathbf{D}^{*(M-1)}$  이고  $\mathbf{D}^* = \mathbf{D}^{-1}$ 이므로

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{R}} &= \mathbf{A} \left[ \frac{1}{2(L-M+1)} \sum_{j=1}^{L-M+1} (\mathbf{D}^{(j-1)} \mathbf{S} \mathbf{D}^{H(j-1)} + \right. \\ &\quad \left. \mathbf{D}^{(2-j-M)} \mathbf{S}^* \mathbf{D}^{H(2-j-M)}) \right] \mathbf{A}^H + \sigma^2 \mathbf{I} \\ &= \mathbf{A} \widetilde{\mathbf{S}} \mathbf{A}^H + \sigma^2 \mathbf{I} \end{aligned} \quad (38)$$

여기서,

$$\widetilde{\mathbf{S}} = \frac{1}{2(L-M+1)} \sum_{j=1}^{L-M+1} (\mathbf{D}^{(j-1)} \mathbf{S} \mathbf{D}^{H(j-1)} + \mathbf{D}^{(2-j-M)} \mathbf{S}^* \mathbf{D}^{H(2-j-M)})$$

으로 주어지는 modified spatially smoothed signal covariance matrix이다. 여기서,  $\widetilde{\mathbf{S}}$ 는 신호의 coherence에 관계없이 nonsingular이며,  $\widehat{\mathbf{R}}$ 의 구조는 inco-

herent의 경우와 마찬가지로 eigenstructure 방법을 이용할 수 있다. SS의 경우와 달리 MSS의 경우는  $L \geq 3p/2$ 의 array size가 요구되어서 effective aperture size의 증가 효과를 얻게된다.<sup>[9]</sup>

한편, FB는 MSS에서  $L=M$ 인 특별한 경우이며 effective aperture size를 유지하면서, 공간적으로는 한번 smoothing 된 효과를 얻게된다.

## Ⅶ. 컴퓨터 시뮬레이션 및 고찰

앞에서 소개한 알고리즘을 이용하여 컴퓨터 시뮬레이션을 하였다. 시뮬레이션에 사용된 data는 백색 잡음을 저역차단 주파수 0.18(Hz), 고역차단 주파수 0.22(Hz)인 2차의 Butterworth filter에 표본화 주파수를 1(Hz)로 통과시켜 얻은 신호이다. 각각  $-15^\circ$ ,  $+5^\circ$ ,  $+20^\circ$ 의 방향에서 coherent 신호가 입사되고 있으며, 센서의 수는 10개, smoothing을 하는 경우의 subarray size는 8, snapshots 수는 500이다. Covariance matrix는 500 snapshots을 50개의 segment로 나눈후 temporal 주파수  $f_0=0.2$ (Hz)에 대해 DFT(discrete fourier transform)하여 평균을 취해 얻었다.

$$\mathbf{R} = \frac{1}{50} \sum_{i=1}^{50} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^H \quad (39)$$

여기서,  $\mathbf{x}_i$ 는  $i$ 번째 segment를 DFT한 결과 벡터이다.

다음은 시뮬레이션 결과이다.

각 그림에서 (a)는 EBLP, (b)는 EVLP, (c)는 MUSIC, (d)는 EV에 각각 해당되며, 가로축은 각도 ( $-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ ), 세로축은 출력 power의 dB값을 나타내며, 다섯번의 독립수행을 겹쳐 그린 것이다. Coherence 문제에 대한 결과는 그림5~그림8에 나타나있다. 여기서,  $-15^\circ$ ,  $+5^\circ$ ,  $+20^\circ$ 로 입사되는 신호의 SNR(signal to noise ratio)은 각각  $-5$ dB,  $0$ dB,  $+5$ dB이다. 그림5는 coherence 문제가 발생된 경우로서, 네방법 모두 분해능, 추정오차, 변화도 면에서 나쁜 결과를 나타낸다.

그림6은 SS를 적용한 경우로서 coherence문제가 어느 정도 해결되었음을 볼 수 있다. 그러나 effective aperture의 감소로 인하여 추정오차 및 분해능에 많은 문제가 있음을 알 수 있다. 그림7은 FB를 적용한 경우로서 SS보다는 effective aperture의 이득은 있으나 smoothing 효과가 적어서 완벽한 해결을 할 수가 없다. 그림8은 MSS를 적용한 경우로서 coherence 문제를 거의 완벽하게 해결하고 있음을 알 수 있다.

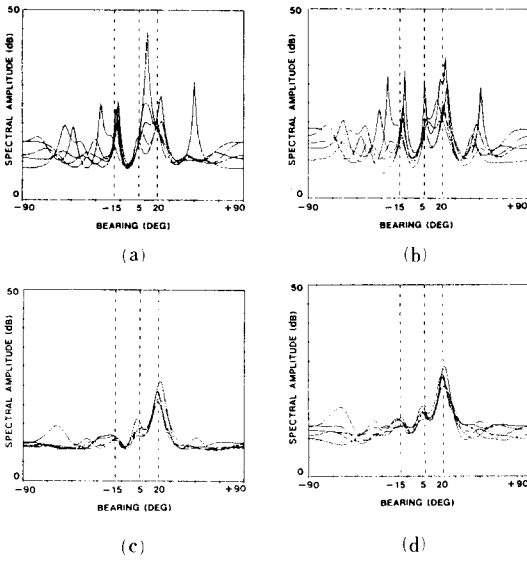


그림 5. Cherenche 문제가 발생한 경우  
 (a) EBLP (b) EVLP  
 (c) MUSIC (d) EV  
 Fig. 5. Results for coherent signals.  
 (a) EBLP. (b) EVLP.  
 (c) MUSIC. (d) EV.

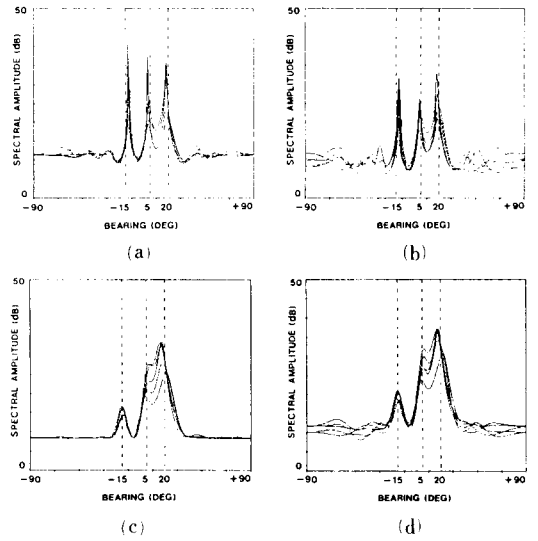


그림 7. Forward-backward 방법으로 coherence 문제를 해결한 경우  
 (a) EBLP (b) EVLP  
 (c) MUSIC (d) EV  
 Fig. 7. Results using forward-backward method for coherent signals.  
 (a) EBLP. (b) EVLP.  
 (c) MUSIC. (d) EV.

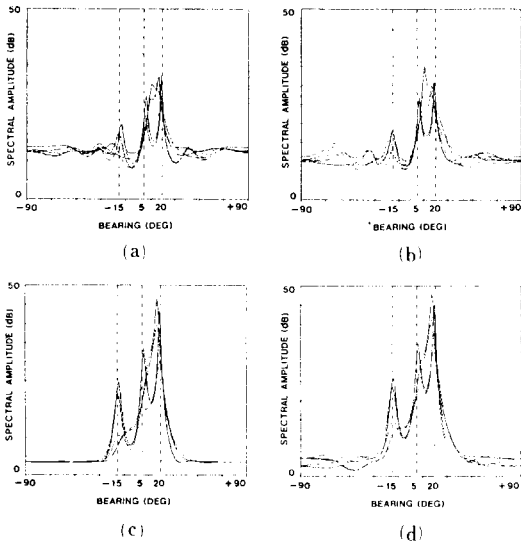


그림 6. Spatial smoothing 방법으로 coherence 문제를 해결한 경우  
 (a) EBLP (b) EVLP  
 (c) MUSIC (d) EV  
 Fig. 6. Results using spatial smoothing method for coherent signals.  
 (a) EBLP. (b) EVLP.  
 (c) MUSIC. (d) EV.

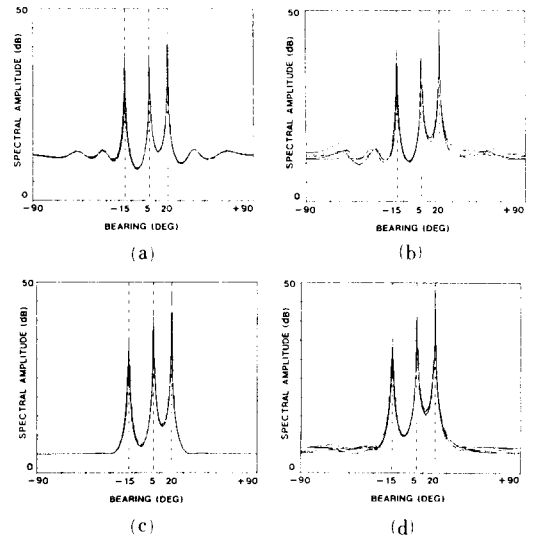


그림 8. Modified spatial smoothing 방법으로 coherence 문제를 해결한 경우  
 (a) EBLP (b) EVLP  
 (c) MUSIC (d) EV  
 Fig. 8. Results using modified spatial smoothing method for coherent signals.  
 (a) EBLP. (b) EVLP.  
 (c) MUSIC. (d) EV.

알고리즘상의 특징으로는 MV계열의 방법이 LP계열의 방법보다는 spurious peak가 적는데 이는 MV계열의 스펙트럼은 LP계열의 스펙트럼이 파라메타 차수(parameter order)에 따라 평균된 것과 같은 특성을 지니고 있기 때문이다. 즉,

$$\frac{1}{P_{MV}(\theta)} = \sum_{m=1}^{M-1} \frac{1}{P_{LP}^{(m)}(\theta)}$$

의 관계가 성립된다.<sup>[1,2,3]</sup>

입사신호 수 추정오차에 따른 결과는 그림9~그림13에 나타나 있다.

여기서, 입사되는 신호의 SNR은 모두 0dB 이며 MSS를 적용하여 coherence 문제를 해결한 경우이다. 그림9는 입사신호 수 p=3으로 정확히 추정된 경우로서 모든 방법이 정확한 결과를 나타낸다. 그림10은 p=2로 추정된 경우로서 MV계열의 방법은 성능이 급격히 떨어지는 반면 LP계열은 좋은 결과를 나타낸다. 그림11은 p=1로 추정된 경우로서 p=2일때와 비슷한 결과를 나타낸다. 이 경우에 EV가 MUSIC 보다는 다소 좋은 성능을 나타내는데, 이는 EV를 구성하는 projection matrix에 신호부분공간이 포함되어 오차가 발생하더라도 다른 잡음부분 공간

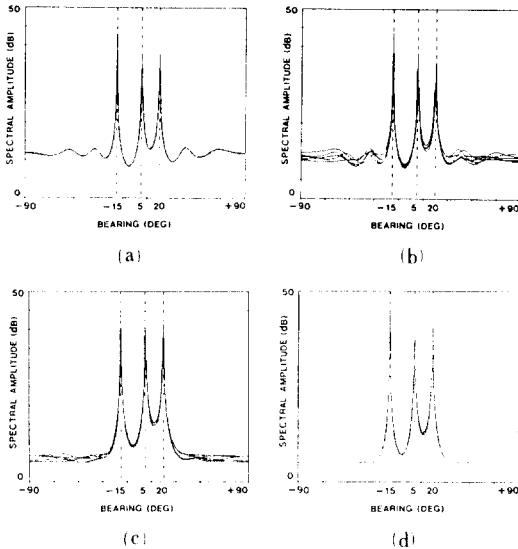


그림 9. 신호수를 3으로 추정된 경우  
(a) EBLP (b) EVLP  
(c) MUSIC (d) EV

Fig. 9. Results when the estimated number of incident signals is given by three.  
(a) EBLP, (b) EVLP,  
(c) MUSIC, (d) EV.

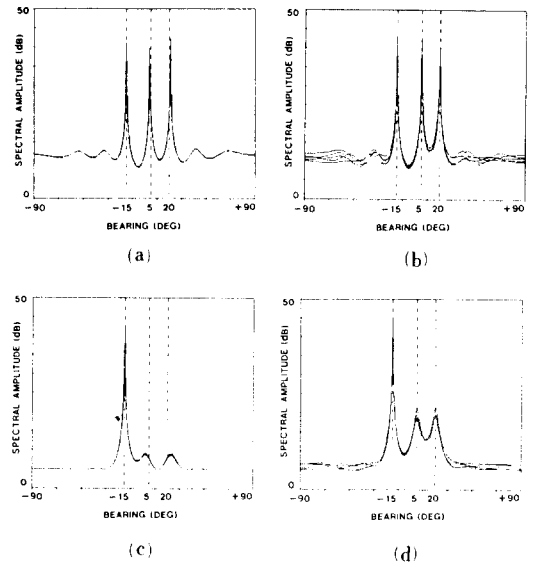


그림10. 신호수를 2로 추정된 경우  
(a) EBLP (b) EVLP  
(c) MUSIC (d) EV

Fig. 10. Results when the estimated number of incident signals is given by two.  
(a) EBLP, (b) EVLP,  
(c) MUSIC, (d) EV.

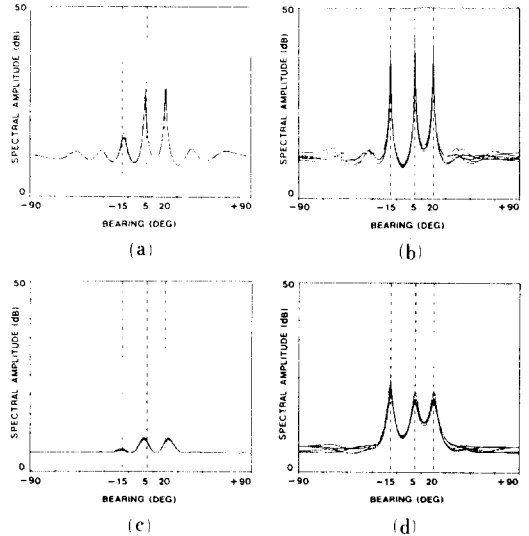


그림11. 신호수를 1로 추정된 경우  
(a) EBLP (b) EVLP  
(c) MUSIC (d) EV

Fig. 11. Results when the estimated number of incident signals is given by one.  
(a) EBLP, (b) EVLP,  
(c) MUSIC, (d) EV.



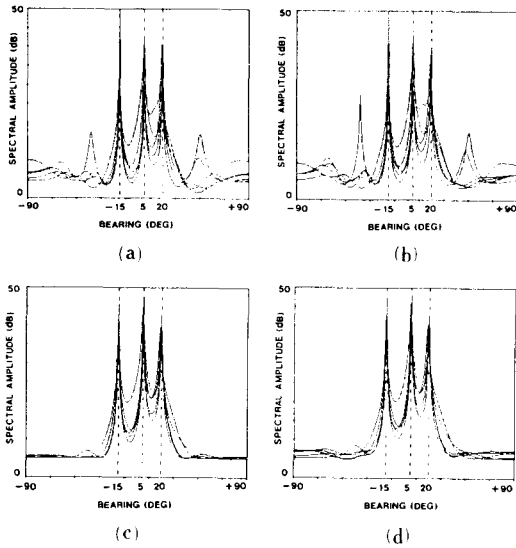


그림12. 신호수를 4로 추정한 경우  
 (a) EBLP (b) EVLP  
 (c) MUSIC (d) EV  
**Fig. 12.** Results when the estimated number of incident signals is given by four.  
 (a) EBLP. (b) EVLP.  
 (c) MUSIC. (d) EV.

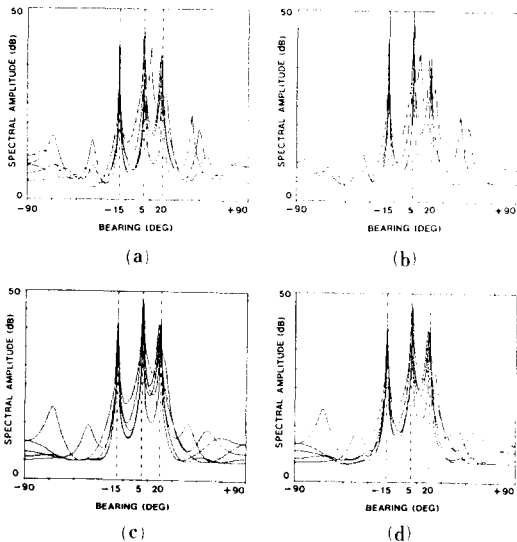


그림13. 신호수를 5로 추정한 경우  
 (a) EBLP (b) EVLP  
 (c) MUSIC (d) EV  
**Fig. 13** Results when the estimated number of incident signals is given by five.  
 (a) EBLP. (b) EVLP.  
 (c) MUSIC. (d) EV.

에 의한 특성에 의해 원하는 특성을 갖는 반면 MUSIC의 경우에는 신호부분 공간이 모두 whitening되어서 더 나쁜 결과를 얻게 되는 것이다. 그러나 변화도면에서는 MUSIC이 다소 우수함을 알 수 있다.

그림12, 그림13은 각각  $p=4$ ,  $p=5$ 로 추정된 경우로서, 신호부분공간에 잡음부분 공간이 내포되어서 LP계열은 spurious peak가 많은 반면, MV 계열은 LP계열 보다는 일관성 있는 스펙트럼을 얻을 수 있다는 것을 알 수 있다.

IX. 결 론

Coherence 문제를 해결하기 위해서 제안된 방법들 중에서는 MSS가 가장 우수함을 알 수 있었다. 또한, 기존의 알고리즘보다 우수한, eigenstructure를 이용하는 알고리즘의 문제점인, 입사신호수의 추정오차가 미치는 영향을 살펴 보았다. 여기서 LP계열의 방법에서는 신호의 수를 적게 이용하는 것이 유리하고, MV계열의 경우는 신호의 수를 많게 이용하는 것이 유리하다는 것을 알 수 있었다. 하지만, coherence 문제의 경우는 effective aperture size의 감소 문제를 해결해야 하며, 입사신호 수의 추정오차 문제의 경우는 보다 정확한 입사신호수 추정 알고리즘의 개발이 요구된다.

參 考 文 獻

- [1] D.H. Johnson, "The application of spectral estimation methods to bearing estimation problems," *Proc. IEEE*, vol. 70, no. 9, pp. 1080-1028, Sep. 1982.
- [2] 윤대회, "협대역 신호의 입사각 추정," 전자공학회지, vol. 15, no. 2, pp. 202-209, 1988.
- [3] J. Capon, "High resolution frequency-wave number spectrum analysis," *Proc. IEEE*, vol. 57, no. 8, pp. 1408-1418, 1969.
- [4] S. Haykin, Editor, *Array Signal Processing*, Prentice-Hall, Inc., 1985.
- [5] S.L. Marple, *Digital Spectral Analysis with Applications*, Prentice-Hall, Inc., 1987.
- [6] R.O. Schmidt, "Multiple emitter location and signal parameter estimation," *IEEE Trans. Antenna and Propagation*, vol. 34, no. 3, pp. 276-280, Mar. 1986.
- [7] W.C. Lee, I.W. Cha, W.K. Kim and D.H. Youn, "An adaptive spatial prediction algorithm and bearing estimation," *Proc. TENCON, Seoul*, Aug. 1987.
- [8] T.J. Shan, M. Wax and T. Kailath, "On spatial smoothing for direction-of-arrival

- estimation of coherent signals," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Proc.*, vol. 33, no. 4, pp. 806-811, Aug. 1985.
- [9] R.T. Williams, S. Prasad, A.K. Mahalanabis and L.H. Sibul, "An improved spatial smoothing technique for bearing estimation in a multipath environment," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Proc.*, vol. 36, no. 4, pp. 425-432, Apr. 1988.
- [10] D.H. Johnson and S.R. DeGraaf, "Improving the resolution of bearing in passive sonar array by eigenvalue analysis," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal, Proc.*, vol. 30 no. 4, pp. 638-647, Aug. 1982.
- [11] R.L. Johson, "Eigenvector matrix partition and radio direction finding performance," *IEEE Trans. Antenna and Propagation*, vol. 34, no. 8, pp. 985-991, Aug. 1986.
- [12] H. Wang and M. Kaveh, "Coherent signal subspace processing for the detection and estimation of angles of arrival of multiple wide-band sources," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Proc.*, vol. 33, no. 4, pp. 831, Aug. 1985.
- [13] S.Y. Kung et. al., Editor, *VLSI and Modern Signal Processing* Prentice-Hall, Inc., 1985
- [14] M.Wax and T. Kailath, "Detection of signals by information theoretic criteria," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Proces.*, vol. 33, no. 2, pp. 387-392, Apr. 1985.
- [15] 이원철, "협대역 신호의 입사각 추정 알고리즘," 석사학위 논문, 연세대학교 대학원, 12월, 1987.
- [16] 조정권, "신호의 벡터공간을 이용한 다수의 광대역 신호의 입사각 추정" 석사학위논문, 연세대학교, 대학원, 6월, 1988.
- [17] A.H. Nuttall, "Spectral analysis of a univariate process with bas data points, via maximum entropy and linear predictive techniques," NUSC, Technical Report TR-5303, New London, Conn., March, 1976. \*

---

 著 者 紹 介
 

---



## 李 忠 容 (準會員)

1964年 8月 18日生. 1987年 2月 연세대학교 전자공학과 졸업. 1987年 3月~현재 연세대학교 대학원 전자공학과 석사과정 재학중. 주관심분야는 Array Signal Processing 및 Adaptive Signal Processing 등임.

## 尹 大 熙 (正會員) 第25卷 第5號 參照

현재 연세대학교 전자공학과 조교수

## 車 日 煥 (正會員)

1959年 2月 연세대학교 전기공학과 졸업. 1983年 연세대학교 전자공학과 공학박사학위 취득. 1969年~1970年 영국 University of Southampton Institute of Sound and Vibration 연구원 1959年~1972年 연세대학교 전기공학과 교수. 1981年~1987年 한국음향학회 회장. 1986年 9月~1987年 7月 Department of Electrical and Computer Engineering, University of Iowa 교환교수. 1973年~현재 연세대학교 전자공학과 교수. 주관심분야는 Acoustics, Vibration, Speech Signal Processing 등임.