

다변수계의 극배치

金 相 奉, 古田 勝久
(正 會 員)
東京工業大學 制御工學科

I. 서 론

극배치법은 피드백에 의해 극의 위치를 지정하여 폐루프계가 안정성과 바람직한 과도특성을 가지도록 하는 제어계 설계의 방법으로서, 고전적인 주파수 응답법을 이용한 설계방법에 비해서 극배치로 지정하는 폐루프계의 극의 위치는 시간응답에 직접 관련된 설계 사양이다. 이와 같은 극배치법은 동적보상기에 의한 극배치문제와 출력피드백에 의한 극배치문제등에의 확장을 통해서 다변계수의 대표적인 설계법으로서 중요한 위치를 차지하고 있다. 특히 관측기의 설계문제에 있어서 그 중요성을 보여주고 있다.

이와 같은 극배치법을 배치하는 극의 위치에 관련 지워 구별한다고 하면 크게 2 가지로 나누어 생각할 수 있다. 즉 폐루프계의 고유치를 지정한 위치에 배치하는 방법과 임의의 영역내에 배치하는 방법이 있다. 전자의 경우 일반적인 문제점으로서, 시스템의 차원이 크게 될 경우 계산이 반드시 간단하지는 않다는 것과, 특히 극배치의 계산과정에 포함되는 벡터의 일차독립성의 검정 혹은 수반행렬의 계산등은 고차원의 경우 고정도의 계산이 곤란할 경우가 있다는 것이다. 그러나 후자의 경우는 고유치를 하나하나씩 정확히 지정하기보다 고유치가 어떤 영역내에 배치되도록 하는 방법으로서 폐루프계의 극을 구체적으로 지정하는 지침이 있어 결핍성을 가지고 있을 경우라든가, 특히 폐루프계의 과도특성 즉 오버슈트, 상승시간(rising time), settling 시간등의 상호적인 보완성을 생각할 경우 유용한 방법이라 할 수 있다.

그리고 극배치를 고려하는 공간에 따라 상태공간에서의 극배치문제와 주파수영역에서의 극배치문제로 구분할 수 있다. 상태공간내의 극배치문제는 피드백 루프의 형태에 따라 (1) 상태피드백, (2) 출력피드백,

(3) 동적보상기 등에 의한 극배치문제로 구분할 수 있다.

주파수영역법은 출력피드백에 초점을 둔 제어계의 설계법이라고 할 수 있으며, 상태공간법에서 보면 관측기 또는 동적보상기를 겸한 극배치법이라고 할 수 있다.

여기서는 지금까지 알려져 있는 극배치법의 알고리즘의 개략적인 소개와 문제점을 논한 후, 지정한 영역내의 극배치문제를 중점적으로 다루기로 한다.

II. 극배치 문제

다음과 같은 선형 시불변 시스템

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1a)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (1b)$$

을 생각하기로 한다. 여기서, x 는 n -차원 상태벡터, u 는 m -차원 입력벡터, y 는 p -차원 출력벡터, A, B, C 는 적당한 차원을 가진 시스템 행렬이고, $\text{對}(A, B)$ 는 가제어, $\text{對}(A, C)$ 는 가관측이라고 한다.

시스템 (1)은 다음과 같은 전달행렬의 표현을 가진다.

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (2)$$

여기서 시스템(1)의 상태 피드백측은 다음과 같이 주어진다고 한다.

$$u(t) = Fx(t) \quad (3)$$

1. 고유치 지정에 의한 극배치 문제

1) 상태공간표현

적당한 차수의 모닉(monik, 최고차의 계수가 1)한 다항식 $\phi(s)$ 가 주어졌을 때, 다음을 만족하는 계인 행렬 F, F_c 를 구하는 문제이다.

(1) 상태피드백

$$\det(sI - A - BF) = \phi(s) \quad (4)$$

$$u = Fx$$

(2) 출력피드백

$$\det(sI - A - BF_c) = \phi(s)$$

$$u = Cy$$

(3) 동적보상기

$$\det(sI - A_c - B_c F_c C_c) = \phi(s)$$

$$u = Hz + Fy$$

$$\dot{z} = A_c z + B_c y$$

$$\dot{x}_e = (A_c + B_c K_c C_c) x_e$$

$$x_e = [x \ z]^T$$

$$A_c = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_c = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$C_c = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad F_c = \begin{bmatrix} F & H \\ B_c & A_c \end{bmatrix}$$

2) 주파수영역표현

(Wolovich^[1]의 표현에 의한 1입력계의 경우) 임의로 주어지는 다항식 $f(s)$ 에 대해

$$k(s)P(s) + h(s)gr(s) = q(s)f(s) \quad (5)$$

을 만족하는 해의 다항식 $k(s)$, $h(s)$, $q(s)$ 를 구하는 문제이다. 여기서 $gr(s)$ 와 $p(s)$ 는 주어진 시스템 $G(s) = gr(s)/p(s)$ 의 다항식이다.

2. 지정한 영역내의 극배치 문제

시스템 (1)에 대해서 그림 1에 나타난 것과 같은 영역내에 임의로 극배치하는 문제를 생각할 경우, 시스템 (1)의 폐루프계의 극 $\lambda_i(A+BF)$ 가 지정한 영역 D 내부 즉

$$\lambda_i(A+BF) \in D$$

를 만족하도록 하는 피드백게인 F를 구하는 문제이다.

Ⅲ. 고유치 지정에 의한 극배치

1. 상태공간내에서의 극배치

1) 상태피드백에 의한 극배치

다음에 보이는 정리는 상태피드백이라고 하는 제어 방식에 의해 극배치가 가능하기 위한 조건을 주

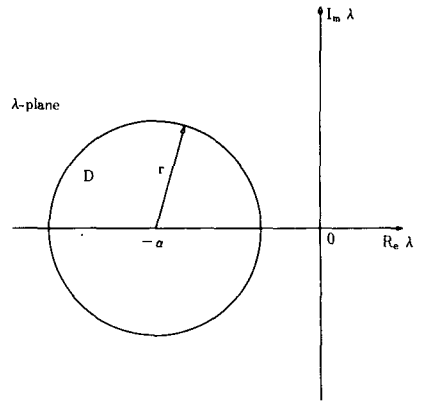


그림 1. Specified region D in the complex plane

고 있으며, 선형시스템 이론의 중요한 결과의 하나라고 할 수 있다.

[정리 1] 시스템 (1)이 상태피드백에 의해 임의로 극배치 가능하기 위한 필요충분조건은 시스템 (1)이 가제어이다.

(1) 단일력제에 귀착한 극배치^[2,3]

Wonham^[2]은 (A, B) 가 가제어일 경우 임의의 $g \in R^{m \times 1}$ 에 대하여 $F \in R^{m \times n}$ 가 존재하여 $(A+BF, Bg)$ 가 가제어로 된다는 사실로부터, 적당한 F를 계인으로 하는 상태피드백을 먼저 시스템에 부과함으로써 다 입력계의 극배치문제를 1입력계의 극배치문제로 귀착시키는 극배치법을 제안했다. 그러나 이와같은 극배치법은 다음과 같은 문제점을 갖고 있다. 하나의 입력에 모든 제어기능을 집중시킴으로서 입력이 복수개인 다변수계의 자유도가 상실되어 버리고, 또 $(A+BF, Bg)$ 에 대한 극배치는 가제어 표준형으로의 변환을 통해서 달성되기 때문에, 대규모 시스템에 대한 가제어 표준형으로의 변환은 수치적으로 큰 오차를 포함하는 프로세스로 된다는 것이다.

(2) 고유벡터 지정에 의한 극배치^[4]

이 방법은 수치적으로 안정하다는 것과 계인의 자유도를 알 수 있다는 점에 그 특징은 같지만, 그 알고리즘인

$$f_i = (s_i I - A)^{-1} B g_i, \quad g_i \in C^{r \times 1}, i=1, 2, \dots, n$$

$$F = [g_1, g_2, \dots, g_n] [f_1, f_2, \dots, f_n]^{-1}$$

$$(s_i I - A - BF) f_i = 0$$

을 만족하는 $(f_1, f_2, \dots, f_n)^{-1}$ 의 존재, 즉 $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ 의 선형독립성이 검증되지 않으면 안된다는 문제가 있다.

(3) 가제어 표준형에 의한 극배치

이 방법은 시스템의 구조와 관련지워 극배치를 행하는 방법이다.^[7~10] 그 문제점으로서서는 가제어 표준형을 구할 때 벡터의 선형독립성을 조사할 필요가 있기 때문에 수치적인 면에서 대단히 불안정하다는 것이다.

2) 출력피드백에 의한 극배치^[6]

출력피드백에 의한 임의의 극배치가 가능하기 위한 필요충분조건은 많은 연구에도 불구하고 구해져 있지 않다. 이와같은 문제는 선형시스템의 이론속에 남겨져 있는 중요한 미해결 문제중의 하나이다. 만약 이 문제가 해결된다고 하면, 극배치를 위한 동적보상기, 함수관측기등의 최소차수에 의한 최소출력 실현문제가 해결되어 다변수 제어계의 이론에 근본적인 진전을 가져오게 할 수 있다고 볼 수 있다.

[정리 2] 시스템 (1)은 가제어, 가관측이라고 한다.

만약 $n \leq m+p-1$ 이면, 임의의 대칭한 n 개의 복소수 집합 $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ 의 임의의 근방에 출력피드백으로 배치가능한 복소수의 집합이 존재한다.

[알고리즘]

[Step 1] 지정된 페루프극의 집합 Λ 를 2개의 대칭한 복소수의 집합 $\Lambda_1 = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ 와 $\Lambda_2 = \{\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n\}$ 으로 분할한다.

[Step 2] Λ 는 A 의 고유치를 포함하지 않는다고 하고, 벡터 $\phi_i \in R^{p \times 1}$ $i=p+1, \dots, n$ 을 적당히 택하여

$$w_i = \phi_i C (\lambda_i I - A)^{-1} \quad i=p+1, \dots, n$$

이라고 한다.

[Step 3] 다음 식을 만족하는 $g_i \in R^{m \times 1}$ $i=1, \dots, p$ 를 구한다.

$$w_k (\lambda_k I - A)^{-1} B g_k = 0, \quad k=p+1, \dots, n$$

이와같은 $g_i \neq 0$ 는 가정에 의해 $n-p \leq m-1$ 임으로 반드시 존재한다.

[Step 4] 벡터 f_i 를

$$f_i = (\lambda_i I - A) B g_i, \quad i=1, \dots, p$$

으로 정의한다.

[Step 5] 행렬 $F \in R^{p \times m}$ 을

$$F = [g_1 \dots g_p] [C f_1 \dots C f_p]^{-1}$$

와 같이 구한다.

만약 Step 1 이 만족되지 못할 경우 쌍대적인(dual)

분할 $\Lambda_1 = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$, $\Lambda_2 = \{\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n\}$ 을 적용하여 생각하면 된다.

3) 동적보상기에 의한 극배치^[28]

시스템이 가제어 가관측이라고 하면, 동적보상기의 행렬의 형태로 부터 알수 있듯이 동적보상기의 차수 p 가 크게 되면 될수록 극배치에 대한 자유도는 증가한다. 그러나 제어계는 되도록이면 간단한 것이 바람직하므로 최소의 차수로 임의의 극배치가 가능하게 된다는 것이 바람직함을 알 수 있다. 그러나 이 문제는 아직 해결되지 못한 선형시스템 이론중의 한부분이기도 하다.

[정리 3] 시스템이 가제어 가관측이라고 한다. 이때 임의의 극배치가 가능하기 위해서는 동적보상기의 차수 p 가 $p \geq \min(\Lambda-1, \mu-1)$ 을 만족한다. 여기서 Λ 와 μ 는 각각 가제어 가관측 지수이다. 즉

$$\Lambda = \min \{j : \text{rank}[B, AB, \dots, A^{j-1}B] = n\}$$

$$\mu = \min \{j : \text{rank}[C^T, A^T C^T, \dots, (A^T)^{j-1} C^T] = n\}$$

2. 주파수영역내의 극배치

1) Wolovich의 극배치법

간단화를 위해 단일출력계

$$G(s) = y(s)/u(s) = gr(s)/p(s) \quad (6)$$

를 생각하기로 한다. 여기서 $r(s)$ 와 $p(s)$ 는 각각 차수 m 과 n 인 다항식이고, $r(s)$, $p(s)$ 는 서로간에素 (relatively prime) 이고 다음과 같이 주어진다 고 하자.

$$p(s) = p_0 + p_1 s + \dots + p_n s^n, \quad p_n \neq 0 \quad (7)$$

$$r(s) = r_0 + r_1 s + \dots + r_n s^n \quad (8)$$

이때 Sylvester의 eliminant 행렬은 다음과 같이 주어진다.

$$M_e = \begin{pmatrix} r_0 & r_1 & \dots & r_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_0 & \dots & r_{n-1} & r_n & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & r_0 & r_1 & r_2 & \dots & r_n \\ p_0 & p_1 & \dots & p_n & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & p_0 & p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix} \quad (9)$$

페루프 시스템의 특성다항식인 n 차 모닉(monic) 다항식을 $p_r(s)$ 라고 하고, $p(s) - p_r(s)$ 를 $f(s)$ 라고 한다. 이때 임의로 주어지는 다항식 $f(s)$ 에 대해 다음 3조건을 만족하는 다항식 $k(s)$, $h(s)$, $q(s)$ 가 존재한다.

- (1) $q(s)$ 는 안정한 다항식이다.
- (2) $q(s)f(s) = k(s)p(s) + h(s)gr(s)$
- (3) $q^{-1}(s)k(s)$ 와 $q^{-1}(s)h(s)$ 는 (안정한) 프로퍼 전달 함수이다.

여기서 구해지는 해 $k(s)$, $h(s)$ 를 이용하여 얻어지는 제어측, 즉

$$u(s) = [k(s)/q(s)] u(s) + [h(s)/q(s)] y(s) + gv(s) \quad (10)$$

는 바람직한 극치를 행하게 된다(그림 2).

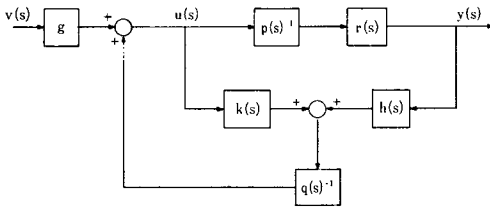


그림 2. Frequency domain feedback system

여기서 $q(s)$ 의 물리적인 의미는 입력 $u(t)$ 로부터 출력 $y(t)$ 까지의 상태추정치인 $x_1(t)$ 를 주는 Luenberger 관측기의 특성다항식이라고 할 수 있다. 그러나 이 관측기는 주파수영역 극배치에 의해 암시적으로 구성된다. 위에서 보인 3조건을 만족하는 해를 구하는 것을 구체적으로 나타내면 다음과 같다.

$(n-1)$ 차인 안정한 다항식 $q(s)$ 와 $f(s)$ 가 다음과 같이 주어진다고 하자.

$$q(s) = q_0 + q_1s + \dots + q_{n-1}s^{n-1}$$

$$f(s) = f_0 + f_1s + \dots + f_{n-1}s^{n-1}$$

이때 $q(s)$ 와 $f(s)$ 에 대해 식(9)을 이용해서 다음과 같이 표현할 수 있고,

$$q(s)f(s) = aM_e S_e(s)$$

$$= [a_1 \ a_2] [r(s) \ sr(s) \ \dots \ s^{n-1}r(s) \ p(s) \ \dots \ s^{n-1}p(s)]^T$$

$$= a_1(s)r(s) + a_2(s)p(s) \quad (11)$$

위의 조건을 만족하는 해 $k(s)$ 와 $h(s)$ 는 $k(s) = a_1(s)$, $h(s) = a_2(s)$ 와 같이 주어진다. 다입출력계의 경우도 위의 알고리즘과 동일하게 주어지지만, 해를 구할 때의 계산상의 문제점과 $Q(s)$ 의 최소차원 실현 문제가 그 문제점으로 남아 있다.

2) 기약분해표현에 의한 극배치법^(11,12)

시스템의 전달행렬 G (식(2))는 $G = NM^{-1} = M_1^{-1}N_1$ 과 같은 표현을 갖는다고 한다. 여기서 N, M 은 서로 右素(right coprime)이고, N_1, M_1 은 서로 좌素(left coprime)로서 각각은 $RH\infty$ 행렬(proper stable real rational matrix)이다. 이때

$$\begin{bmatrix} M_1 & -N_1 \\ -X & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 & -N \\ X_1 & M \end{bmatrix} = I \quad (12)$$

를 만족하는 4개의 $RH\infty$ 행렬 X, Y, X_1, Y_1 이 존재한다. 위식을 만족하는 8개의 행렬은 다음과 같이 주어진다.

$$M(s) = I - F_p(sI - A_p)^{-1}B \quad (13a)$$

$$N(s) = C(sI - A_p)^{-1}B \quad (13b)$$

$$M_1(s) = I - C(sI - A_k)^{-1}F_k \quad (13c)$$

$$N_1(s) = C(sI - A_k)^{-1}B \quad (13d)$$

$$X(s) = F_p(sI - A_k)^{-1}F_k \quad (13e)$$

$$Y(s) = I + F_p(sI - A_k)^{-1}B \quad (13f)$$

$$X_1(s) = F_p(sI - A_p)^{-1}F_k \quad (13g)$$

$$Y_1(s) = I + C(sI - A_p)^{-1}F_k \quad (13h)$$

단, F_p 와 F_k 는 행렬 $A_p = A + BF_p$ 와 $A_k = A + F_kC$ 가 안정행렬로 되도록 주어진다고 한다. F_p 와 F_k 를 구하는 구체적인 방법으로 F_p 에 대해서는 시스템(1)의 일반적인 극배치법이나 최적레규레이타 설계법등을 이용하면 되고, F_k 에 대해서는 관측기의 설계법을 이용하면 된다. 즉

다음과 같은 시스템

$$\dot{x}_1 = A^T x_1 + C^T u_1$$

$$u_1 = F_k^T x_1$$

의 레규레이타 문제를 풀음으로써 그 목적을 얻을 수 있다. 이때 $G(s)$ 를 안정화하는 모든 보상기 K 는 다음과 같이 주어진다(그림 3).

$$K = (Y - MQ)(X - NQ)^{-1}$$

$$= (X_1 - QN_1)^{-1}(Y_1 - QM_1) \quad (14)$$

단 Q 는 $(X - NQ)$ 혹은 $(X_1 - QN_1)$ 이 정칙(nonsingular)이 되도록 $RH\infty$ 의 요소로 주어진다고 한다. 실제적인 설계문제에 있어서, Q 를 $RH\infty$ 요소로 되도록

다변수계의 극배치

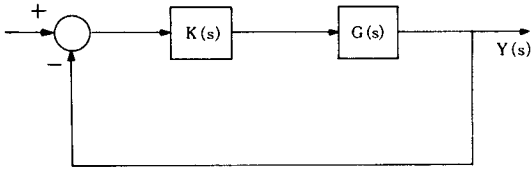


그림 3. Diagram for controller parameterization

록 주었을 경우, 보상기 K의 차원이 주어진 시스템 차원 이상으로 된다든가(즉 최소차원에 의한 실현 가능성의 문제), 물리적으로 어떤 의미를 가지는가에 대해서는 아직 의문속에 있다고 볼 수 있다.

여기서 만약 $Q=0$ 일 경우, 식(14)는 식(13)을 이용하여 정리하면

$$K = YX^{-1} = F_p(sI - A - BF_p - F_k C) F_k \quad (15)$$

와 같이 되어 보통의 관측기와 동일하게 된다. 즉 K는 그림 4에서 점선처리된 부분의 전달행렬과 같게 된다.

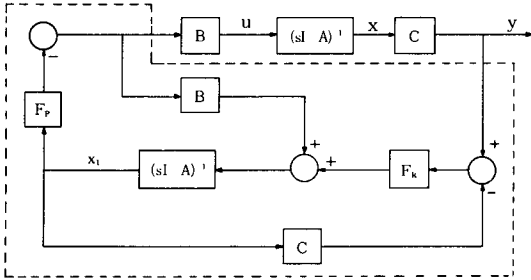


그림 4. Feedback system with full order observer

IV. 지정한 영역내의 극배치

이 문제와 관련하여 Ackermann은 문헌[13]에서 단일 입력 시스템에 대한 로바스트(robust)한 제어계의 설계법으로서, 페루프계의 극이 파라메타 변동이 있다고 하더라도 그대로 지정한 영역내에 남겨지도록 하게 하는 문제를 다루어, 파라메타 공간설계법을 제안했지만, 이 방법은 만족할 만큼의 결과로 되지 못한 점으로부터 문헌[14]에서 그 해법의 개발을 호소하고 있다.

시스템의 파라메타 변동에 대해 로바스트한 극배치법은 아직 그 뚜렷한 설계법을 얻지 못한 상태에 있으며, 이후 그 해결법이 모색되어야 할 점이라 생

각 된다. 여기서는 단지 지정한 영역내의 극배치 문제만을 다루기로 한다.

1. 특정한 극만을 이동하는 극배치법^[15]

이 방법은 배치하려고 하는 페루프극을 하나하나 지정하지 않고 페루프극 전체가 바람직한 영역내에 들어가도록 피드백계인을 얻는 방법이다. 즉 극배치 전에 바람직한 위치에 있는 극은 그대로 두고 그 이외의 바람직한지 않은 극만을 필요한 분만큼 이동하는 방법이다. 그 기본적인 개념은 다음과 같다.

$$PA + A^T P - PBB^T P = 0$$

를 만족하는 반정정(semi-positive definite) 해 P^+ 가 존재한다고 하자. 이때 다음이 만족된다.

(1) $A - BB^T P^+$ 의 고유치의 실부는 $-$ 또는 0

$$(2) \det[s^2 I - (A - BB^T P^+)^2] = \det[s^2 I - A^2]$$

이와 같은 결과에 의해, 다음과 같은 피드백계인

$$K = -B^T P^+$$

에 대한 페루프극은, $\lambda_i, i=1, \dots, n$ 을 개루프극 즉 A의 고유치라고 하면, $2n$ 개의 복소수 $\{\pm \lambda_i, i=1, \dots, n\}$ 중 실부가 부 혹은 0인 것이 배치된다. 따라서 만약 A의 고유치의 실부가 전부 0으로 되면 안정한 극은 그대로 페루프극으로서 남고 불안정한 페루프극은 부호가 반전된다. 이 방법에 의해 극배치되는 영역은 복소수 좌반평면내의 실수축을 중심으로한 45° 내부로 된다.

2. 선형분수변환에 의한 극배치

1) 선형분수변환에 의한 극위치 관계^[16]

이 절에서는 본 극배치법의 기초가 되고 있는 기초 이론과 개념에 대하여 설명하기로 한다.

행렬 $A_c = (A + BF)$ 에 대하여 다음과 같은 정의를 하여 둔다.

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I - A_c| = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i) \quad (16)$$

어떤 스칼라 유리함수 $\phi(\mu)$ 는 다음과 같이 주어진다 고 한다.

$$\phi(\mu) = \gamma_0 \prod_{j=1}^m (\mu - \mu_j)^{\alpha_j} \quad (17)$$

단, α_j 는 어떤 정수들이다. 여기서 식(17)중의 μ 대신에 A_c 를 이용하여 $\phi(A_c)$ 를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\phi(A_c) = \gamma_0 \prod_{j=1}^m (A_c - \mu_j I)^{\alpha_j} \quad (18)$$

식(18)의 양변에 행렬식을 취하고, 식(16)을 사용하면,

스칼라 유리함수 $\phi(\mu)$ 와 행렬 A_c 의 고유치 $\lambda_i, i=1,2, \dots, n$ 에 대해서 다음과 같은 관계를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} |\phi(A_c)| &= \gamma_0 \prod_{j=1}^m |(A_c - \mu_j I)^{\alpha_j}| \\ &= (-1)^{nm} \gamma_0^m \prod_{j=1}^m \Delta(\mu_j)^{\alpha_j} \\ &= (-1)^{nm} \gamma_0^m \prod_{j=1}^m \prod_{i=1}^n (\mu_j - \lambda_i)^{\alpha_j} \\ &= \prod_{i=1}^n \phi(\lambda_i) \end{aligned} \tag{19}$$

여기서, $\phi(\lambda_i)$ 대신에 $\lambda - \phi(\lambda_i)$ 를 대입함으로써 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$|\lambda I - \phi(A_c)| = \prod_{i=1}^n (\lambda - \phi(\lambda_i)) \tag{20}$$

따라서, $\phi(\lambda_i), i=1,2, \dots, n$ 이 행렬 $\phi(A+BF)$ 의 고유치인 것을 알 수 있다.

위에서 나타낸 스칼라 유리함수를 다음과 같은 유리함수라고 하자.

$$\rho = F(\lambda) = (a\lambda + b)/(c\lambda + d), \quad ab - bc \neq 0 \tag{21}$$

단, a, b, c, d 는 스칼라이다. 이때 $c \neq 0$ 이면 식(21)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\rho = f(\lambda) = \beta/(\lambda + \alpha) + \gamma \tag{22}$$

단,

$$\alpha = d/c, \quad \beta = (bc - ad)/c^2, \quad \gamma = a/c \tag{23}$$

식(13)의 역변환은 다음과 같이 주어진다.

$$\lambda = g(\rho) = -\alpha + \beta/(\rho - \gamma) \tag{24}$$

여기서, 시스템(1)의 페루프행렬 $(A+BF)$ 에 대해서 선형분수변환(13)에 의해 얻어지는 행렬을 다음과 같이 정의하면

$$\Phi + \Gamma F_a = f(A+BF) \tag{25}$$

이때, 변형된 시스템행렬 Φ, Γ, F_a 와 시스템(1)의 행렬 A, B, F 사이에는 다음과 같은 관계가 있음을 알 수 있다.^[16]

$$\Phi = \gamma I + \beta(A + \alpha I)^{-1} \tag{26a}$$

$$\Gamma = (A + \alpha I)^{-1} B \tag{26b}$$

$$F_a = -\beta F(A + \alpha I + BF)^{-1} \tag{26c}$$

$$A = -\alpha I + \beta(\Phi - \gamma I)^{-1} \tag{27a}$$

$$B = \beta(\Phi - \gamma I)^{-1} \Gamma \tag{27b}$$

$$F = -F_a(\Phi + \Gamma F_a - \gamma I)^{-1} \tag{27c}$$

선형분수변환에 의해 변형된 시스템을 $\Sigma_a(\Phi, \Gamma)$ 라

고 하면 시스템(1)과의 사이에는 다음과 같은 성질이 있다.

[보제 1] 시스템 $\Sigma_a(\Phi, \Gamma)$ 가 가제어(가안정, 가관측)이기 위한 필요충분조건은 시스템(1)이 가제어(가안정, 가관측)이다. 단, α 는 행렬 $(A + \alpha I)$ 가 정칙이 되도록 주어진다고 한다.

2) 극배치법

선형분수변환에 의한 그 일반적인 극배치법은 문헌[16]에 주어져 있지만, 여기서는 실제적인 극배치 문제의 한 예가 되는 극배치법에 대하여 생각하기로 한다. 이 절에서 생각하는 선형분수변환(16)식 중에서 $a=1, b=2r + \alpha, c=1, d=\alpha$ 인 경우, 식(16)는 다음과 같이 된다.

$$\rho = f(\lambda) = 1 + 2r(\lambda + \alpha)^{-1} \tag{28a}$$

$$\lambda = g(\rho) = -\alpha + 2r/(\rho - 1) \tag{28b}$$

[성질 1]

복소좌반평면은 선형분수변환(28)에 의해 원반영역 D(중심: $-(\alpha + r)$, 반경: r)에 사상된다.

[증명] 복소좌반평면(ρ -평면) 내의 고유치는 다음과 같은 관계식을 만족한다.

$$\rho + \rho^* < 0 \tag{29}$$

단, *는 복소수의 공액(conjugate)을 의미한다. 이 식에 (28)을 이용하여 변형하면

$$(\lambda + \alpha + 2r)(\lambda^* + \alpha) + (\lambda^* + \alpha + 2r)(\lambda + \alpha) < 0 \tag{30}$$

으로 되고, 또 이 식에 $\lambda = x + jy$ 를 대입하여 정리하면 다음과 같이 된다.

$$(x + (\alpha + r))^2 + y^2 < r^2 \tag{31}$$

따라서 선형분수변환(16)은 복소좌반평면을 중심이 $-(\alpha + r)$ 이고 반경이 r 인 원반영역으로 사상시킨다. 이때 그림 5중의 θ 는 $\theta = \tan(r/(\alpha^2 + 2\alpha r)^{1/2})$ 와 같이 주어지고, 시스템(1)과 $\Sigma_a(\Phi, \Gamma)$ 의 사이의 시스템행렬은 다음과 같은 관계를 가진다.

$$\Phi = (A + \alpha I)^{-1}(A + (2r + \alpha)I) \tag{32a}$$

$$\Gamma = I + 2r(A + \alpha I)^{-1} \tag{32b}$$

$$F_a = -2rF(A + \alpha I + BF)^{-1} \tag{32c}$$

$$A = -\alpha I + 2r(\Phi - I)^{-1} \tag{33a}$$

$$B = 2r(\Phi - I)^{-1} \Gamma \tag{33b}$$

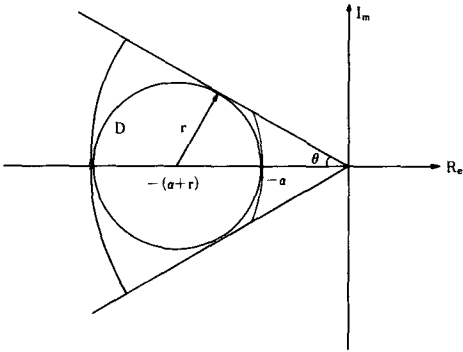


그림 5. Specified region for pole assignment

$$F = -F_d(\Phi - I + \Gamma F_d)^{-1} \quad (33c)$$

1)절의 결과와 성질(1)에 의해 다음과 같은 정리를 얻을 수 있다.

[정리 1] 시스템 $\Sigma_d(\Phi, \Gamma)$ 의 상태피드백측은 다음과 같이 주어진다 고 한다.

$$\begin{aligned} u_d &= F_d x_d \\ &= -R^{-1} \Gamma^T P x_d \end{aligned} \quad (34)$$

여기서, P는 리카치방정식

$$P\Phi + \Phi^T P - P\Gamma R^{-1} \Gamma^T P = -Q \quad (35)$$

의 正定解이고, R은 正定행렬, Q는 對 $(Q^{1/2}, \Phi)$ 가 가관측으로 되는 正定행렬이다. 이때 시스템(1)의 페루프계의 극은 그림 1중의 영역 W내부에 배치된다. 단, 피드백행렬 F는 (33c)와 같이 주어진다.

[주의 1] 정리 1은 이산시간시스템의 경우에도 그대로 적용할 수 있다. 즉 단위원내의 중심 $a+r$, 반경 r인 원반영역내의 극배치가 가능하다. 이와 같은 사실은 이산시간시스템의 극배치를 연속시간시스템의 설계법으로 행할 수 있음을 의미한다.

[주의 2] 선형분수변환(2)에서 $a=1, b=-a, c=0, d=r$ 일 경우, 임의의 원반영역 D의 단위 원반영역으로 사상된다. 이와같은 개념을 기본으로 한 극배치법이 문헌[17]에 주어져 있지만, 여기서 보인 선형분수변환에 의한 표현과는 다른 방법, 즉 리카치방정식의 성질을 이용하여 원반영역내의 극배치법을 보여주고 있다.

[예제 1]

다음과 같은 선형시불변계를 생각한다.

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

여기서,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

식(28)에서 $\alpha=2, r=2$ 일 경우, 다음과 같은 시스템을 얻는다.

$$\dot{x}_1 = \Phi x_1 + \Gamma u_1$$

단,

$$\Phi = \begin{bmatrix} 3.0 & -0.667 & -1 \\ 0 & 2.333 & 0 \\ 0 & 0 & 3.0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 0.333 & -0.25 \\ 0.333 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$Q=I, R=I$ 를 가지고 리카치방정식(35)를 풀어 다음과 같은 피드백행렬을 얻는다.

$$F_1 = - \begin{bmatrix} -0.077 & 14.22 & -0.046 \\ -72.54 & 72.54 & -12.175 \end{bmatrix}$$

식 (33c)에 의해

$$F = - \begin{bmatrix} 0.026 & 4.158 & 0.011 \\ 8.97 & -8.97 & 5.99 \end{bmatrix}$$

를 얻을 수 있고, 이때 페루프행렬의 고유치는 다음과 같이 배치된다.

$$\lambda(A+BF) = \{-2.965, -3.025, -3.183\}$$

따라서 배치된 고유치는 지정한 영역 D(중심: -4, 반경: 2)의 내부임을 알 수 있다.

3. 쌍선형 변환에 의한 극배치

지정영역내의 극배치 문제를 풀기 위해, 여기서는 문헌[15]의 쌍선형변환을 이용하기로 한다. 쌍선형변환

$$\dot{x}(t) \rightarrow (x_{k-1} - x_k) / T \quad (36a)$$

$$x(t) \rightarrow (x_{k-1} + x_k) / 2 \quad (36b)$$

$$y(t) \rightarrow y_k \quad (36c)$$

$$u(t) \rightarrow u_k \quad (36d)$$

을 시스템(1)에 적용하므로써 다음과 같은 이산시간 시스템을 얻는다.

$$x_{k+1} = \Phi x_k + \Gamma u_k \quad (37a)$$

$$y_k = G x_k \quad (37b)$$

여기서

$$\Phi = (I - TA/2)^{-1} (I + TA/2) \quad (38a)$$

$$\Gamma = T(I - TA/2)^{-1} B \quad (38b)$$

$$G = C(I - TA/2)^{-1} \quad (38c)$$

역으로 시스템(37)에 쌍선형변환

$$x_{k+1} \rightarrow x(t) + T\dot{x}(t)/2 \quad (39a)$$

$$x_k \rightarrow x(t) - T\dot{x}(t)/2 \quad (39b)$$

$$y_k \rightarrow y(t) \quad (39c)$$

$$u_k \rightarrow u(t) \quad (39d)$$

을 행함으로써 시스템(1)의 시스템행렬을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$A = 2(\Phi + I)^{-1} (\Phi - I) / T \quad (40a)$$

$$B = 2(\Phi + I)^{-1} \Gamma / T \quad (40b)$$

$$C = 2G(\Phi + I)^{-1} \quad (40c)$$

다음으로 시스템(1)과 (37)에 대해 각각 다음과 같은 상태피드백

$$u(t) = Fx(t) \quad (41)$$

$$u_k = F_a x_k \quad (42)$$

를 행했을 경우, 쌍선형변환(36)과 (39)에 의해 각각의 피드백행렬 F, F_a 는 다음과 같은 관계를 가진다.

$$F = [I + F_a(I + \Phi)^{-1} \Gamma]^{-1} [F_a - F_a(I + \Phi)^{-1} (\Phi - I)] \\ = 2[I + F_a(I + \Phi)^{-1} \Gamma]^{-1} F_a(I + \Phi)^{-1} \quad (43)$$

$$F_a = [I - TF(I - TA/2)^{-1} B/2]^{-1} F(I - TA/2)^{-1} \\ (I + TA/2) / 2 \quad (44)$$

위에서 보인 연속계와 이산계 사이의 쌍선형변환은 s -평면과 z -평면의 다음과 같은 선형분수변환을 의미 하고 있음을 알 수 있다.

$$z = f(s) = (1 + Ts/2) / (1 - Ts/2) \quad (45a)$$

$$s = g(z) = 2(z - 1) / T(z + 1) \quad (45b)$$

[성질 2]

z -평면의 단위원내의 원반영역 D (중심 $\alpha + j0$, 반경 r) 는 쌍선형변환 (45)에 의해 s -평면내의 원반영역 W :

$$\text{중심} : \alpha_1 = 2(\alpha^2 - r^2 - 1) / (\alpha^2 - r^2 + 2\alpha + 1) T \quad (46a)$$

$$\text{반경} : r_1 = 4r / (\alpha^2 - r^2 + 2\alpha + 1) T \quad (46b)$$

에 사상된다.

[증명] z -평면내의 원반영역 D (중심 $\alpha + j0$, 반경 r) 는

$$|z - \alpha| < r \quad (47)$$

를 만족하고 있다. 여기서 (45a)를 이용하여 (47)식을 변형하면

$$\{[(1 + Ts/2) / (1 - Ts/2) - \alpha] \{[(1 + Ts^*/2) / (1 - Ts^*/2) - \alpha]\} < r^2$$

으로 되고, 또 이식에 $s = x + jy$ 를 대입하여 정리하면 다음과 같이 된다.

$$x^2 + y^2 - [4(\alpha^2 - r^2 - 1) / (\alpha^2 - r^2 + 2\alpha + 1) T] x + \\ 4(\alpha^2 - r^2 - 2\alpha + 1) / (\alpha^2 - r^2 + 2\alpha + 1) T^2 < 0 \quad (48)$$

또는

$$\{X - 2(\alpha^2 - r^2 - 1) / (\alpha^2 - r^2 + 2\alpha + 1) T\}^2 + y^2 < \\ \{4r / (\alpha^2 - r^2 + 2\alpha + 1) T\}^2 \quad (49)$$

식(49)에 의해 (46)식과 같은 결과를 얻는다.

[보제 1]⁽¹⁶⁾ 시스템(39)에 대해 상태피드백

$$u_k = -(r^2 R + \Gamma^T P \Gamma)^{-1} \Gamma^T P (\Phi - \alpha I) x_k \\ = F_a x_k \quad (50)$$

은 페루프계의 모든 극을 원반 D 내부에 배치한다. 단, P 는 리카치방정식

$$P = \Phi^T P \Phi + G^T G - \Phi^T P \Gamma (R + \Gamma^T P \Gamma)^{-1} \Gamma^T P \Phi, \quad (51)$$

의 正定解이고, R 은 正定행렬이다.

보제 1과 성질 2에 의해 다음과 같은 정리를 얻는다.

[정리 2] 시스템(1)의 피드백행렬 F 는 보제 1에 의해 얻어지는 F_a 를 이용하여 다음과 같이 주어진다 고 한다.

$$F = 2(I + F_a(I + \Phi)^{-1} \Gamma)^{-1} F_a(I + \Phi)^{-1} \quad (52)$$

이때 시스템(1)의 페루프계의 모든 극은 중심과 반경이 (46)인 영역 W 의 내부에 배치된다.

[예제 2]

다음과 같은 선형시 불변계를 생각한다.

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

여기서

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -6.44 & -4.26 & 0.0054 \\ 0 & 17.29 & 7.058 & -0.145 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 84.27 \\ -139.5 \end{bmatrix}$$

$T=0.1$ 에서 쌍선형변환하여 다음과 같은 이산시간계를 얻는다.

$$x_{k+1} = \Phi x_k + \Gamma u_k$$

여기서

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1.0 & -2.88E-3 & 8.24E-2 & -2.64E-4 \\ 0 & 1.186 & 6.31E-2 & 2.17E-1 \\ 0 & -5.76E-2 & 6.47E-1 & -5.28E-3 \\ 0 & 1.856 & 6.31E-1 & 1.17 \end{bmatrix} \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 3.489E-1 \\ -1.248 \\ 6.978 \\ -12.48 \end{bmatrix}$$

시스템(17)에 대해서 중심 $\alpha=0.5$, 반경 $r=0.3$ 의 원반영역 D 내에 극배치를 행한다. 그때, 다음과 같은 상태피드백행렬을 얻는다.

$$F_d = -[9.99E-2 \quad 4.70E-1 \quad 1.38E-1 \quad 1.61E-1]$$

식(14)에 의해 시스템(16)의 상태피드백 행렬 F 는 다음과 같이 얻어진다.

$$F = [0.218 \quad 0.705 \quad 0.229 \quad 0.234]$$

그때, 구해지는 페루프계의 극은 다음과 같다.

$$\lambda_i(A+BF) = \{-3.06, -3.06, -5.79, -5.79\}$$

이와 같은 결과에 의해 시스템(16)의 페루프계의 모든 극은 지정한 영역 W (중심 $\alpha=-7.78$, 반경 $r=5.56$) 내에 배치되어 있음을 알 수 있다.

V. 결 론

지정위치에 대한 기존의 극배치법의 개략과 지정영역 내의 극배치법을 소개했지만, 아직 극배치문제는 완전한 제어계의 설계법이라 하기 어렵고, 해결되지 못한 문제점을 적지 않게 가지고 있음을 알 수 있다. 특히 파라메타변동을 가진 시스템에 대한 로바스트한 극배치법은 대단히 흥미있는 이론 분야라 할 수 있으며, 이후 그 해결법이 모색되어야 할 과제라고 할 수 있다.

여기서는 주로 복소수 평면내의 원반영역에 대한 극배치법을 중점적으로 다루었지만, 다른 형태의 영역 즉 타원, 부채꼴, 포물선 영역등에의 극배치법은 아직 의문속에 있다고 볼 수 있다. 물론 이들 영역내의 극배치는 원반영역에 의한 극배치문제로 해결될 수 있지만, 이론적인 면에서 이들 영역에 대한 개별적인 설계법의 개발은 흥미있는 것이다. 아울러 이와 같은 극배치문제와 동일한 목적을 가진 최적 레규레이타의 설계법도 대단히 흥미있는 과제라 할 수 있다.

参 考 文 献

- [1] W.A. Wolovich, "Linear multivariable systems," Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1974.
- [2] W.M. Wonham, "On pole assignment in multi-input controllable linear systems," *IEEE Trans. Auto. Control*, Ac-12, pp. 660-665, 1967.
- [3] M. Heymann, "Comments on pole assignment in multi-input controllable linear systems," *IEEE Trans. Auto. Control*, Ac-13, pp. 748-749, 1968.
- [4] 疋田, 小山, 三浦, "極配置におけるフィードバックゲインの自由度と低ゲインの導出," 計測自動制御學會論文集, pp. 556-561, 1975.
- [5] H. Kimura, "Pole assignment by gain output feedback," *IEEE Trans. Auto. Control*, Ac-20, pp. 509-516, 1975.
- [6] V. Sinswat and F. Fallside, "Eigenvalue/eigenvector assignment by state feedback," *INT J. Control*, vol. 26, no. 3, pp. 389-403, 1977.
- [7] 古田, 佐野, "基礎システム理論," ユロナ社, 1987.
- [8] D.G. Luenberger, "Canonical forms for linear multivariable systems," *IEEE Trans. Auto. Control*, Ac-12, pp. 290-293, 1967.
- [9] W.A. Wolovich and P.L. Falb, "On the structure of multivariable systems," *SIAM J. Control*, vol. 7, pp. 437-451, 1969.
- [10] B. Gopinathy, "On the control of linear multiple input-output systems," *Bell Systems Technical Journal*, vol. 50, no. 3, pp. 1063-1080, 1971.
- [11] B.A. Francis, "Lecture notes in control and information sciences, A course in H^∞ control theory," Springer-Verlag, 1986.
- [12] M. Vidyasaga, "Control system synthesis: A factorization approach," The MIT Press 1985.
- [13] J. Ackerman, "Parameter space design of robust control system," *IEEE Trans. on Auto. Control*, Ac-25, pp. 1058-1072, 1980.
- [14] J. Ackermann, "Design of robust controllers by multi-model methods," 7th International Symposium on the Mathematical Theory of

- Networks and Systems, Stockholm, June, 10-14, 1985.
- [15] 川崎, 示村, “指定領域に極を配置する状態フィードバック制御則の設計法,” 計測自動制御學會論文集, 15-4, pp. 451-457, 1979.
- [16] S.B. Kim and K. Furuta, “Regurator design with its poles in a specified region,” INT J. of Control, to be appeared.
- [17] K. furuta and S.B. Kim, “Pole assignment in a specified disk,” *IEEE Trans. Auto. Control*, Ac-32, no. 5, pp. 423-427, 1987.
- [18] R. Kondo and K. Furuta, “On the bilinear transformation of Riccati equations,” *IEEE Trans. Auto. Control*, Ac-31, no. 1, pp. 50-54, 1986.
- [19] M.H. Amin, “Optimal discrete systems with prescribed eigenvalues,” *Int. J. Control* vol. 40, no. 4, pp. 783-794, 1984.
- [20] 藤中, 加藤, 片山, “望ましい領域に極を配置する離散時間最適レギュレータの設計,” 第29回自動制御連合講演會, 前刷リ pp.167-168, 1986.
- [21] F.R. Gantmacher, “The theory of matrices,” Chelsea Publishing Company, 1960.
- [22] R.V. Churchill, J.W. Brown and R.F. Verhey, “Complex variables and applications,” McGraw-Hill International Book Company, 1974.
- [23] H. Kwakernaak and R. Sivan, “Linear optimal control systems,” Wiley-Interscience, 1972.
- [24] B.D.O. Anderson and J.B. Moore, “Linear optimal control,” Prentice Hall, 1971.
- [25] E.J. Davison and H.W. Smith, “Pole assignment in linear time-invariant multivariable systems with constant disturbance,” *Automatica*, vol. 7, pp. 489-498, 1971.
- [26] F. Fallside (ed.), “Control systems design by pole zero assignment,” Academic Press, 1977.
- [27] R.W. Brockett and C.I. Byrnes, “Multivariable Nyquist criteria, root loci and pole-placement,” *IEEE Trans. Auto. Control*, Ac-26, pp. 271-281, 1981.
- [28] F.M. Brash and J.B. Pearson, “Pole placement using dynamic compensator,” *IEEE Trans. Auto. Control*, Ac-15, pp. 34-43, 1971.*

♣ 用語解説 ♣

Acoustooptic filter (음향 광학 필터)

이방성(異方性)매질 속을 전파하는 음파에 의한 이상 브래그(異常 Bragg) 회절을 이용, 통과 파장을 전기적으로 변화시킬 수 있는 광 필터

Acquisition (포착 : 捕捉)

- (1) ① 우주기(宇宙機)와 전파등으로 연락이 가능하게 되는 것
 ② TDMA(time division multiple access) 방식 등에서 지구국의 송신신호를 위성에서 할당된 시간 위치에 정확하게 삼입하고 유지하는 것
- (2) 추적(追跡) 과정이 필요한 물체 표적의 선택 및 그들 물체 표적의 추적개시

ASDE(airport surface detection equipment) : 공항면 탐지 레이더

공항 지면상에 있는 항공기 등의 위치를 탐지하기 위한 레이더