

◎ 論 文

# 鋼뼈대 構造物의 塑性安定 解釋에 관한 理論的 研究

이 중 석\*

(1988년 4월 4일 접수)

## A Theoretical Investigation on Shakedown Analysis of Framed Structures

J. S. Lee

**Key Words** : Structure(구조물), Plane Frame(평면뼈대), Shakedown(소성안정), Loading(하중재하)

### Abstract

For the collapse of structures due to the variable repeated load, two types of collapse mechanisms, i.e., incremental collapse and alternating plasticity, exist. Under the similar variable repeated loading conditions there exists shakedown state in the structures. In shakedown state, the number of plastic hinges are not increased and all further loading will be resulted in the elastic moment changes. Namely, under the shakedown state, structures do not collapse.

In this investigation, shakedown analysis are performed by composing new computer programs. Basic theories employed to compose the programs are as follows.

1. Newton-Raphson methods are added to the existing matrix method for the plastic analysis.
2. An effort to construct the stiffness of axial and bending springs attached at both ends of the member has been made.

By using the programs developed, it is possible to anticipate the collapse mechanisms (Incremental collapse, alternating plasticity). Lastly for the verification of performance of the program, demonstration examples have been solved and the results are compared with other sources.

### 1. 서 론

부정정뼈대構造物이 外部荷重(極限荷重)을 받을 경우, 그 外部荷重으로 인하여 붕괴를 일으키지 않더라도 그 荷重으로 인하여 어떤 절점(단면)은 탄성한도를 넘어 그 荷重이 제거되고 난 후에도

잔류모멘트(residual moment)가 남는다. 그런데 이 잔류모멘트는 변형율(strain)이 탄성한도를 넘어 塑性流(plastic flow, bifurcation)를 일으킴으로써 발생한다. 이와같은 상황(荷重은 제거되고 잔류모멘트만 남는 상황)에서 비슷한 크기의 荷重을 가했다가 제거하고 하는 과정(이하 變動反復荷重, variable repeated load)을 되풀이 하면 그

\*정회원, 울산대학교 공과대학 토목공학과

構造物은 대개 다음 3가지의 상태에 처하게 된다. 첫째, 잔류모멘트의 부호가 바뀌지 않고 그 크기의 증가가 계속되어 構造物의 처짐이 漸增하는 경우(漸增破壞, incremental collapse), 둘째, 잔류모멘트의 부호가 주기적으로 바뀌며 처짐의 증가는 유발하지 않으나 결국은 붕괴되는 경우(交番塑性破壞, cyclic collapse, alternating collapse), 셋째, 잔류모멘트의 증가가 없고 처짐의 증가도 유발됨이 없이 構造物이 彈性的인 舉動을 하는 경우(塑性安定, shakedown) 등이다. 여기서 交番塑性破壞와 피로破壞(fatigue failure)가 서로 다른점은 交番塑性破壞는 수백회의 荷重反復으로 破壞되는 반면에 피로破壞는 수만(수십만)회의 荷重反復으로 破壞되는 것이 보통이다. 위와 같은 變動反復荷重에서의 構造物의 彈塑性的 舉動(elasto-plastic behavior)에 대해서는 강재의 사용빈도가 많은 구미에서 많이 연구되어 발표되고 있다. 미의 Eyre, Galambos, Meyer, Gerstle 등, 日本의 山田, 橫道 등에 의해서도 새로운 연구가 진행되고 있다. 지금까지의 연구결과를 살펴보면 연구된 이론이 실제 構造物에 적용됨에 있어서 構造物의 기하학적 형태가 간단한 경우에만 가능하도록 되어 있다. 본 연구에서는 이러한 결점이 해결되면서 變動反復荷重을 받는 構造物의 舉動이 좀 더 확실히 규명될 수 있는 방법을 제시하겠다.

2. 塑性安定(Shakedown)

강뼈대 構造物은 일반적으로 복잡한 기하학적 형태를 가지고 있다. 하지만 塑性安定(shakedown) 이론을 간명하게 설명하기 위하여 Fig.1과 같은 문형라멘이 수평 수직 荷重  $F_1, F_2$ 을 동시에 받고 있는 경우를 생각해 보자.

여기서, 外部힘들과 임의 절점의 힘 모멘트를 다음과 같은 무차원량으로 표시해 보자. 단  $M_0$ 는 상기 임의 절점의 完全塑性모멘트이다.

$$m = \frac{M}{M_0}, f_1 = \frac{F_1 L}{M_0}, f_2 = \frac{F_2 L}{M_0} \dots\dots(1)$$

극한 해석(limit theorem)을 이용하면 붕괴荷重을 다음과 같이 결정할 수 있다.<sup>3),4)</sup>

$$f_1 = \pm 1, f_1 + f_2 = \pm 3, f_1 - f_2 = \pm 3 \dots\dots(2)$$

즉, Fig.2에서 MNPQRS로 표시된 육각형안에  $f_1, f_2$ 가 존재하면 이 構造物은 붕괴되지 않는다. 하지만 보다 현실적으로는, 그 構造物에 작용하는

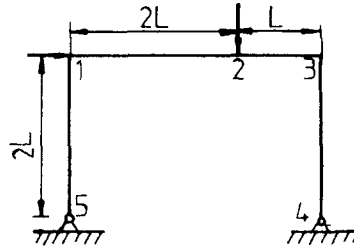


Fig. 1 Frame under two time-dependent loads

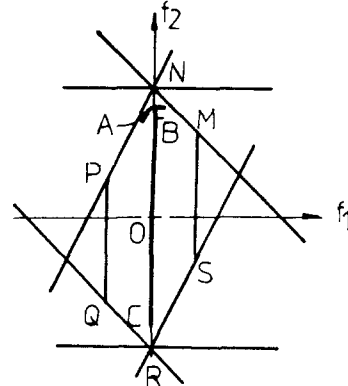


Fig. 2 Domain of admissible loads for frame of Fig.1

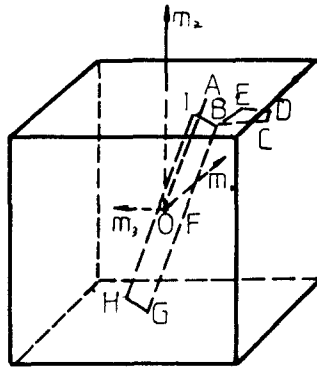


Fig. 3 Moment space and loading paths of frame of Fig.1

荷重이 變動反復荷重인 경우가 많으므로 다음과 같은 경우를 생각해 보자. 우선 死荷重에 해당하는  $f_2$ 荷重이 2.6으로 증가한 다음 그 상태에서 風荷重에 해당하는  $f_1$ 荷重이 0.3으로 증가했다가 0으로 감소하고 또 0.3으로 증가했다가 0으로 감소하는 과정을 밟는다고 생각해 보자.

이와 같은 荷重 상황에 의한  $m_1, m_2, m_3$ 의 변화를 Fig.3에서 나타내보면 OABCDEBCDE... 점들로 표시된다는 것을 알 수 있다.

이와 같은 荷重상황에서의 각 절점의 변위는 Table 1과 같이 나타낼 수 있다.

Table 1을 보면 荷重이 한 cycle씩 증가하면 塑性變位도 한 단계씩 증가한다는 것을 알 수 있다. 이와 같은 상황(incremental collapse)을 Fig. 4에서 연속선(solid line)으로 나타내었다.

또 하나의 예로서 Fig.1의 강 뼈대 構造物에 작용하는  $f_2$  荷重이 2.6과 -2.4사이에서 순환되는 경우를 생각해 보자. 이와 같은 荷重 상황은 Fig. 2에서 OACACHI...점들로 나타난다. 또한  $m_1, m_2, m_3$ 의 변화는 Fig.3에서 OABGHIBG...의 점들로 나타난다. 이와 같은 상황에서의 構造物의 변위등을 Table 2에 나타내었다.

이런 荷重 상황에서의 1번 절점의 塑性변위는 Fig.4에서 점선(dotted line)으로 나타나 있다. 다른 또하나의 예로서  $f_2$ 가 2.6과 0.0사이에서 순환하는 경우를 생각해 보자. 이와 같은 荷重 경로는 Fig. 2에서는 OAOA...점들로 나타나고 Fig. 3에서는 OABFBFB...의 순서로 나타난다. 塑性變位는

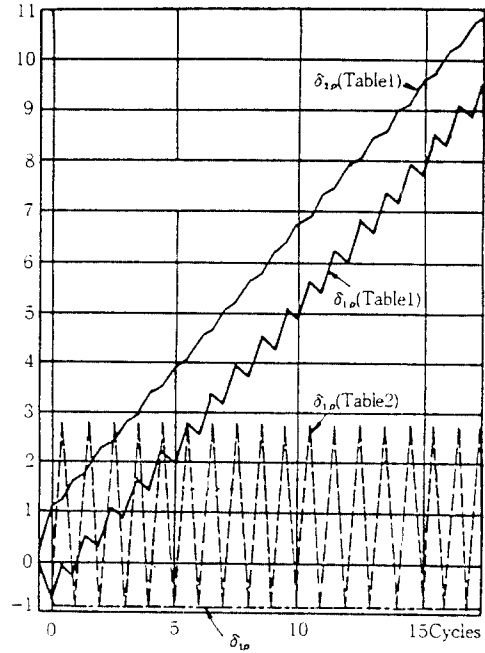


Fig. 4 Plastic displacements for various loading cycles for frame Fig.1

Table 1 Displacements for frame of Fig. 1

Load		Incremental displacements		Total displacements		Total plastic displacements	
$f_1$	$f_2$	$\delta'_1$	$\delta'_2$	$\delta_1$	$\delta_2$	$\delta_{1P}$	$\delta_{2P}$
0	2.294	-1.529	2.941	-1.529	2.941	0	0
0	2.6	-1.359	2.039	-2.889	4.844	-0.920	1.056
0.267	2.6	3.733	-0.178	0.844	4.667	-0.920	1.056
0.300	2.6	1.333	0.178	2.178	4.844	-0.054	1.256
0.100	2.6	-2.800	0.133	-0.622	4.011	-0.054	1.256
0	2.6	-1.680	0.444	-2.311	5.422	-0.342	1.633
$f_1$ cycle	2.6	0.578	.....	.....	0.573	0.573	

Table 2 Cyclic collapse of plane framed structures(Fig. 1)

	Load $f_2$	Moment		Displacement		Plastic displacement	
		$m_1 = m_3$	$m_2$	$\delta_1$	$\delta_2$	$\delta_{1P}$	$\delta_{2P}$
	2.294	-0.520	1	-1.520	2.944	0	0
Increment	0.300	-0.204	0	-1.350	2.039	-0.920	1.056
Total	2.600	-0.733	1	-2.889	4.844	-0.920	1.056
Increment	-0.412	0.275	0	4.000	-5.600	3.725	-5.072
Total	-2.4	0.000	-1	4.170	5.127	2.805	-4.016
Increment	4.588	-1.059	2	-3.059	-5.882	0	0
Total	2.188	-0.459	1	1.111	-0.756	2.805	-4.016
Increment	0.412	-0.275	0	-4.000	5.600	-3.725	5.072
Total	2.600	-0.733	1	-2.889	4.844	-0.920	1.056

Fig. 4에서 일점쇄선으로 나타난다. 다시 말하면 極限荷重이 反復하여 작용하여도 構造物의 塑性變位는 증가하지 않는다. 이와 같은 현상을 塑性安定(shakedown)현상이라고 한다. 이와 같은 塑性安定의 원리(shakedown theorem)를 설명하기 위해

$M(x)$  : 뼈대構造物의 임의의 점  $x$ 에서의 실제 모멘트

$M^e(x)$  : 완전탄성이라고 가정한 뼈대구조물의 임의의 점  $x$ 에서의 모멘트

$M^r(x)$  : 잔류모멘트(residual moment)

이라고 정의하자. 여기서 다음식이 성립한다.

$$M^r(x) = M(x) - M^e(x) \dots\dots\dots (3)$$

여러가지 荷重 상황에 따라  $M^e(x)$ 의 값들이 달라지는데 이 값들중 최대값이  $M^+(x)$ , 최소값이  $M^-(x)$ 라 하자. 또한 塑性安定 모멘트(shakedown moment)를  $\bar{M}(x)$ 라 하면 다음 식이 성립한다.

$$-M_p(x) \leq \bar{M}(x) + M^e(x) \leq M_p(x)$$

식(3)을 만족하기 위한 필요충분조건은

$$-M_o(x) \leq \bar{M}(x) + M^-(x) \leq \bar{M}(x) + M^+(x) \leq M_p(x) \dots\dots\dots (4)$$

식(4)는 주어진 잔류모멘트 분포가 소성안정을 유발하는지 안하는지를 판별해 주는 부등식이다.

윗 식들을 실제구조물에 적용시키는 과정은 주로 필산에 의존하고 있고 그 과정을 전산화시키기에 부적절할 면이 많이 있다.

### 3. 전산화를 위한 이론

#### 1) 새로운 部材剛度 매트릭스의 구성

평면뼈대構造物의 外部荷重이 점점 늘어나 각 部材端力이 증가하게 되어 어느 部材端이 받아 낼 수 있는 內力의 한계를 넘어서게 되면 그 部材端에 塑性滑節(plastic hinge)이 발생하게 되는데 그 塑性滑節이 형성되는 조건<sup>1),2)</sup>은 다음과 같이 표현된다.

$$\left(\frac{M}{M_p}\right) + \left(\frac{N}{N_p}\right)^2 = 1 \dots\dots\dots (5)$$

여기서

$M$  : 外部荷重에 의한 휨모멘트의 크기

$N$  : 外部荷重에 의한 축방향력의 크기

$M_p$  : 휨모멘트만으로 塑性滑節이 형성됐을 때의

휨모멘트의 크기

$N_p$  : 축방향력만으로 塑性滑節이 형성됐을 때의 축방향력의 크기

塑性滑節 형성 조건식인 식(5)를 어느 部材端力이 만족하면 그 部材端에 塑性滑節이 형성되는 효과를 낼 수 있도록 部材剛度 매트릭스를 구성해야 한다. 그렇게 하기 위해 먼저 部材兩端에 각각 剛塑性(rigid-plastic) 휨스프링과 축스프링을 아래 그림과 같은 모양으로 부착하였다.

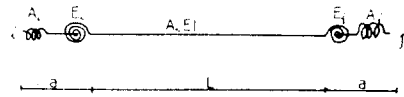


Fig. 5 Bending and axial springs

$L$  : total length of member

$a$  : dimension of plastic zone(=0)

$E_i, E_j$  : stiffness of bending spring

$A_i, A_j$  : stiffness of axial spring

$A_o$  : axial rigidity of member without springs

$EI$  : flexural rigidity of member without springs

윗 그림과 같은 부재의 부재강도 매트릭스를  $S_M$ 이라 하면

$$S_M = \frac{EI}{E^*L^3} \begin{bmatrix} A^* & & & & & \\ & 2(E_i + E_j) & 4(E_i + E_j)L & & & \\ & & 4(E_i + E_j)L^2 & & & \\ & & & A^* & & \\ & & & & 2(E_i + E_j) & 4(E_i + E_j)L \\ & & & & & 4(E_i + E_j)L^2 \end{bmatrix}$$

$$\dots\dots\dots (6)$$

단

$$E^* = 12E_j \cdot E_j + 4(E_j + E_i) + 1$$

$$A^* = \left[ \frac{A_i A_o A_j}{A_i \cdot A_o + A_o \cdot A_j + A_i \cdot A_j} \right] \cdot \frac{E^* L^3}{EI}$$

#### 2) 프로그램의 작성

部材兩端에 길이가 짧고 剛塑性的 성질을 가진 스프링들이 部材와 직렬로 부착되어 있다는 역학적 의미는 다음과 같다. 첫째 그 스프링들의 彈性剛度を 無限大로 하여주면 그 部材 전체의 剛

도가 스프링들이 부착되어 있지않은 원部材의 剛度에 접근하게 되고, 다시 그 스프링들의 彈性剛度を 零으로 하여주면 그 部材의 양쪽단의 역학적인 성질을 힘모멘트에 저항하지 못하는 성질로 바꾸어 놓았다는 의미가 되는 것이다. 다시말하면, 어느 部材 한쪽단에 塑性滑節이 형성되었다는 것은 그 部材端에 부착된 힘스프링과 축스프링의 彈性剛도가 0이란것과 효과가 같다. 위와 같은 원리를 프로그램구성시 적용하였다. 또한 反復되는 荷重의 한 단계마다 塑性滑節들이 구성되기도 하고 卸하(unloading)되기도 하는 과정은 Newton-Raphson 방법을 사용하여 컴퓨터 프로그램을 작성하였다. 이하 이 프로그램의 흐름도(flow chart)를 Fig. 6, Fig. 7, Fig. 8에 수록하였다.

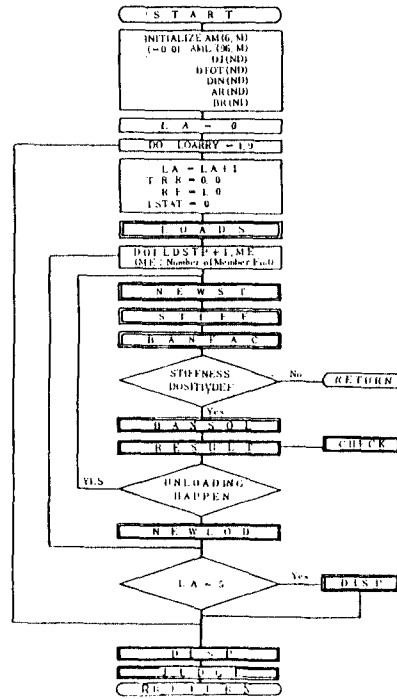


Fig. 7 Subroutine work 2

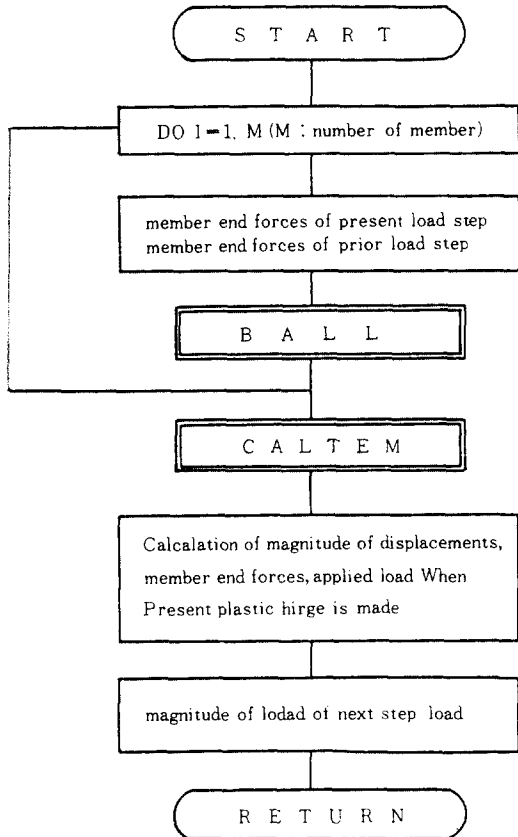


Fig. 6 Subroutine newload

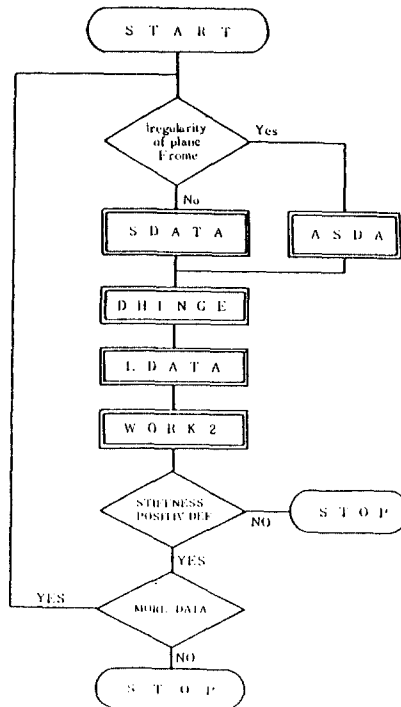


Fig. 8 Main program

4. 적용예

다른 논문에서 解析된 例題들을 골라 본 논문의 方法으로 解析한 결과와 비교하였다.

1) Hodge의 例題와의 비교

다음 Fig. 9와 같은 간단한 문형라멘(전 구간에 걸쳐 단면적, 단면 2차모멘트, 탄성계수 값 일정) 이 변동반복하중  $F_1, F_2$ 를 받는다.

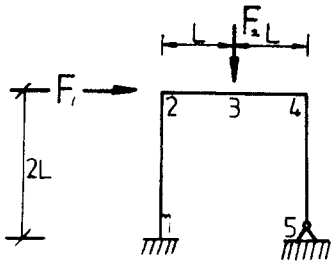


Fig. 9 Portal frame(Hodge)

다음과 같은 무차원양을 생각한다.

$$m = \frac{M}{M_0}, f = \frac{FL}{M_0} (f_1 = \frac{F_1 L}{M_0}, f_2 = \frac{F_2 L}{M_0})$$

이때  $f_1, f_2$ 가 다음과 같은 범위에서 임의로 변동한다고 한다.

$$-f < f_1 < f, 0 < f_2 < 2f$$

$f$ 가 어느 정도 크기의 값을 갖느냐에 따라서 이 構造物의 거동이 결정된다. 여기서 이 構造物의 거동의 종류에는 즉시파괴(즉시파괴하중의 크기  $f_0$ ), 교변塑性파괴( $f_{cyc}$ ), 점중파괴( $f_{inc}$ ), 塑性안정( $f_s$ ), 탄성한도내( $f_e$ )등이 있다. 상기  $f_{cyc}, f_{inc}, f_s$ 의 크기에 대해 Hodge에 의한 결과를 Table 3에서 비교하였다.

Table 3 Comparison between Hodge method and this paper

Method	$f$	$f_{cyc}$	$f_{inc}$	$f_c$
Hodge		0.848	1.146	0.848
This paper		0.847	1.144	0.847

Table 4 Comparison between Neal method and this paper

Method	$f$	$f_{cyc}$	$f_{inc}$	$f_s$
Neal		2.737	2.875	2.737
This paper		2.736	2.856	2.736

2) Neal의 例題와의 비교

다음 Fig. 10과 같은 간단한 문형라멘(전구간에 걸쳐서 단면적, 단면2차모멘트, 탄성계수 값 일정) 이 변동 반복하중  $F_1, F_2$ 를 받는다.

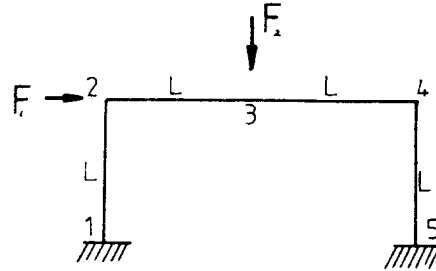


Fig. 10 Portal frame(Neal)

Hodge의 例題에서와 같은 무차원양을 생각해 보자.

이때  $f_1, f_2$ 가 다음과 같은 범위에서 임의로 변동한다고 한다.

$$-f < f_1 < f, -f < f_2 < f$$

마찬가지로  $f$ 의 크기가 결정되면 構造物의 舉動이 결정된다.

$f_{cyc}, f_{inc}, f_s$ 의 크기에 대해 Neal<sup>9)</sup>에 의한 결과 및 본 論文에 의한 결과를 Table 4에서 비교하였다.

5. 결 론

極限 變動反復荷重하의 뼈대構造物의 舉動을 解析할 수 있는 理論을 開發하였다. 뼈대構造物의 종류는 평면뼈대構造物로서 그 구성部材의 이상적

인 彈塑性성질을 부여함에 있어서 각 구성部材의 양단에 휨스프링과 축방향스프링을 부착함으로써 고려하였다. 이와같은 구성部材의 部材剛度 매트릭스를 구하였다. 이 理論에 의거하여 컴퓨터 프로그램을 開發하였다. 이 프로그램을 종래의 방법과 비교하면 그 解析 대상이 되는 평면 뱀대 構造物의 배치가 규칙적이 아니라도 적용할수 있으며 荷重의 除荷과정을 간단히 모델화 시킬 수 있고 除荷되는 과정까지도 상세히 解析할 수 있다는 장점이 있다. 아울러 본 프로그램이 올바르게 구성되어 있다는 것을 두개의 解析예로서 증명하였다.

### 참 고 문 헌

- 1) Hill, R., "The Mathematical Theory of Plasticity", Oxford at the Clarendon Press, 1950
- 2) Sokolovsky, V.V., "塑性學"(大橋義夫譯) 朝倉書店, 1959
- 3) Neal, B.G., "The Plastic Method of Structural Analysis", New York, John Wiley & Sons, Inc
- 4) Jacques, Heyman, "Plastic Design of Frames 2", Cambridge, 1971
- 5) Eyre, Dale G. and T.V. Galambos, "Shakedown Tests On Steel Bars And Beams", ASCE, July, 1970
- 6) Meyer, John D. and, Kurk H. Gerstle, "Shakedown of Strain-Hardening Structures" ASCE January, 1972
- 7) Eyre, Dale G. and T.V. Galambos, "Shakedown of Grids", ASCE, October, 1973
- 8) Eyre, Dale G. and T.V. Galambos, "Shakedown of Beams on Flexible Supports", ASCE, May, 1976
- 9) Oppenheim, Irving J., "Shakedown Under Elastic Support Condition", ASCE, July 1980
- 10) Weaver, William JR and James M. Gere, "Matrix Analysis of Framed Structures", D. Van Nostrand Company, 1980