

내적평형을 만족시키는 사면안정해석방법

김 수 일*

1. 서 언

사면안정해석은 인공사면의 설계 및 해석과 자연사면의 파괴에 대한 안정성 검토 등 토질역학 및 기초공학 분야에서 매우 중요한 과제중의 하나이다. 그러나 그 해석은 3개의 평형방정식으로부터 4개의 미지수(안전율과 반력의 크기, 방향 및 작용점)를 구해야 하는 부정정문제이기 때문에, 이를 해결하기 위하여 여러 연구자들이 많은 노력을 경주해 왔다. 그 중에서도 Hardin은 최근에, 파괴토체에서 정력학적인 평형을 이루며 정정해석이 가능한 새로운 사면안정해석법을 개발하였다. 이 해석방법은 Lever arm equilibrium이라고 하는 새로운 이론으로, 파괴토체에서의 내적평형(Internal equilibrium)을 만족시키기 때문에 그 결과가 정해에 매우 가까운 것으로 평가되고 있다.

본고에서는 Hardin이 제시한 이 새로운 사면안정해석법을 그 이론과 예제를 통하여 소개하고자 한다.

2. 이 론

2.1 하중산정

사면의 하중요소로서 체적력(Body force), 상재하중(Surcharge force), 공극수압(Pore water Pressure)이 있으며, 이들 하중의 성분은 Fig.1과 같고 아래와 같이 정의된다.

$r_x(x, y)$, $r_y(x, y)$: 체적력의 수평 및 수직성분

$w_x(x)$, $w_y(x)$: 상재하중의 수평 및 수직성분

$u(x, y)$: 공극수압

$u_f(x) = u[x, y_f(x)]$: 파괴활동면에서의 공극수압

$U(x)$: x 지점의 수직단면에서 공극수압

$y_u(x)$: x 축으로부터 $u(x)$ 의 작용점까지의 거리

$y_s(x)$: x 축으로부터 지표면까지의 거리

$y_f(x)$: x 축으로부터 파괴활동면까지의 거리

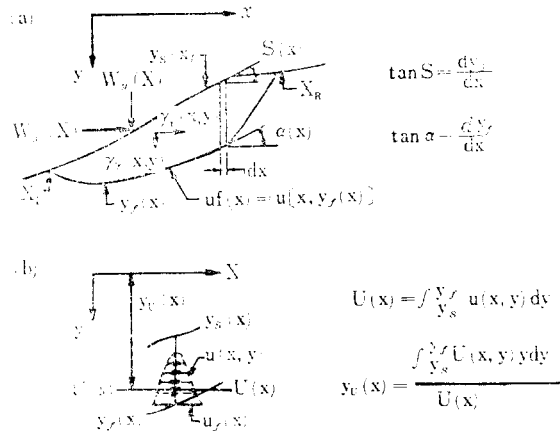


Fig. 1. Components of loading.

활동토체에서 분할토편을 분리하여 하중이 작용하는 것을 보면 Fig. 2와 같으며, 이 분할토

* 정회원, 연세대학교 공과대학 토목공학과, 교수

면내에서 힘의 수평, 수직 및 모멘트의 평형관계는 식 (1), (2), (3)과 같다.

$$Q_x = \int_{xL}^{xR} q_x dx = \int_{xL}^{xR} \left[\int_{y_f}^{y_f'} r_x dy + w_x \tan \delta - u_f \tan \alpha - \frac{dU}{dx} \right] dx \dots\dots\dots (1)$$

$$Q_y = \int_{xL}^{xR} q_y dx = \int_{xL}^{xR} \left[\int_{y_f}^{y_f'} r_y dy + w_y - u_f \right] dx \dots\dots (2)$$

$$Q_m = \int_{xL}^{xR} q_m dx = \int_{xL}^{xR} \left[\int_{y_f}^{y_f'} (r_y x - r_x y) dy + (w_y x - w_x y \tan \delta) + u_f (y_f \tan \alpha - x) + \frac{d(Uy_w)}{dx} \right] dx \dots (3)$$

따라서 이 하중들의 합력, Q는 $Q = (Q_x^2 + Q_y^2)^{1/2} \dots\dots\dots (4)$

이며 이때 Q의 Lever Arm, a_q 는 $a_q = Q_m / Q \dots\dots\dots (5)$

이다.

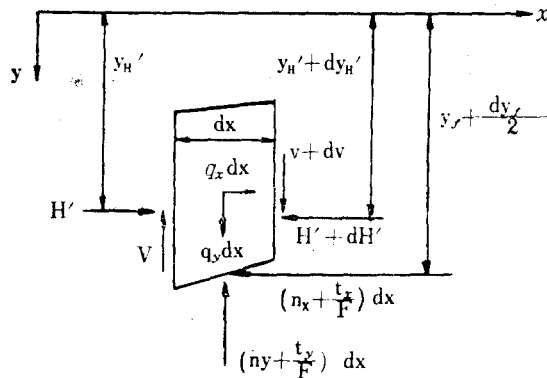


Fig. 2. Components of resultant distributed loading.

2.2 반력산정

반력에는 사면의 활동면을 따라 유발되는 전단응력과 유효수직응력이 있으며 이들의 분포반력(Distributed reaction forces)의 성분, $\tau(x)$ 와 $\sigma'(x)$ 는 Fig. 3에서 보여준다.

여기서, $\sigma'(x)$: 활동면에서의 유효수직응력

$\tau(x)$: 활동면에서의 전단응력

$\tau_f(x)$: 활동면에서의 전단강도

한편, $\sigma'(x)$ 에 의한 수직, 수평, 모멘트 성분을 $n_x(x)$, $n_y(x)$, $n_m(x)$ 로, $\tau_f(x)$ 에 의한 것을 $t_x(x)$, $t_y(x)$, $t_m(x)$ 로 각각 정의하면 이들 각

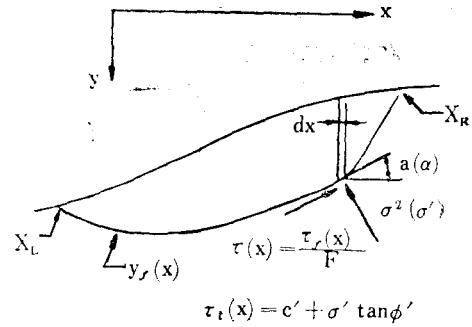


Fig. 3. Components of reaction on the slip surface.

성분은 Fig. 4에서 나타낸 것과 같이 작용하며 전활동면에서는 다음 식들과 같이 표현된다.

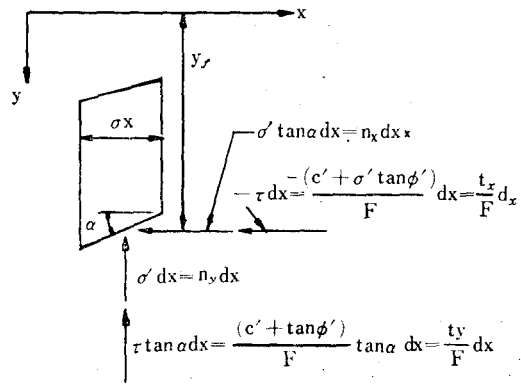


Fig. 4. Components of the distributed reaction.

$$N_x' = \int_{xL}^{xR} n_x dx = \int_{xL}^{xR} \sigma' \tan \alpha dx \dots\dots\dots (7a)$$

$$N_y' = \int_{xL}^{xR} n_y dx = \int_{xL}^{xR} \sigma' dx \dots\dots\dots (7b)$$

$$N_m' = \int_{xL}^{xR} n_m dx = \int_{xL}^{xR} \sigma' (x - y_f \tan \alpha) dx \dots (7c)$$

$$T_x = \int_{xL}^{xR} t_x dx = \int_{xL}^{xR} -(c' + \sigma' \tan \phi') dx \dots\dots (8a)$$

$$T_y = \int_{xL}^{xR} t_y dx = \int_{xL}^{xR} (c' + \sigma' \tan \phi') \tan \alpha dx (8b)$$

$$T_m = \int_{xL}^{xR} t_m dx = \int_{xL}^{xR} (c' + \sigma' \tan \phi') (x \tan \alpha + y_f) dx \dots\dots\dots (8c)$$

따라서 이들 유효수직성분에 의한 합력, N' 과 그 Lever arm, a_n 그리고 전단성분에 의한 합력 T 와 그 Lever arm, a_t 는 다음과 같다.

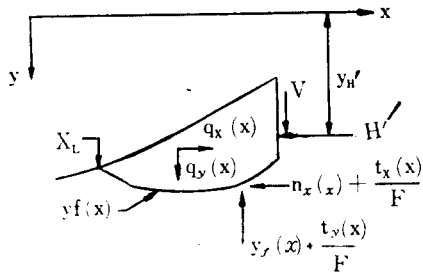


Fig. 6. Location of the effective horizontal thrust line.

2.5 정정해석을 위한 가정

식 (14)와 식 (15)의 안전율을 계산하기 위해서 $\sigma'(x)$ 가 먼저 산정되어야 한다. 그러나 $\sigma'(x)$ 는 두 미지변수, $V(x)$ 와 $H'(x)$ 로 표현되는 2 변수함수이므로, 두 변수의 관계를 합리적으로 설정해야만 $\sigma'(x)$ 를 구할 수 있다. 즉, 이것은 부정정의 사면안정해석을 정정화시키는 것으로서, 본 해석에서는 수직단면에 작용하는 전단력이 유효수평력에 선형적으로 비례한다는 가정을 적용하였다.

$$V(x) = \lambda H'(x) \dots\dots\dots(20)$$

식 (20)을 미소구간, dx 로 미분하여 식 (16)과 식 (17)에 대입하고, 식 (7) 및 식 (8)과 연립하여 풀면 $\sigma'(x)$ 는 다음과 같다.

$$\sigma'(x) = \frac{q_y + \lambda q_x + \frac{c'}{F}(\lambda - \tan \alpha)}{1 + \frac{\tan \alpha \tan \phi'}{F} + \lambda \left(\tan \alpha - \frac{\tan \phi'}{F} \right)} \dots\dots\dots(21)$$

한편, 활동면이 원형인 경우, $\lambda=0$, $F=1$ 을 적용하면 $\sigma'(x)$ 는 아래와 같이 간단한 식이 되며, 특히 이 식을 사용하면 반복계산의 과정없이 직접 안전율이 구해짐으로 본 해석의 간편법 (Simplified method)으로 사용할 수 있다.

$$\sigma'(x) = \frac{q_y - c' \tan \alpha}{1 + \tan \alpha \tan \phi'} \dots\dots\dots(22)$$

3. 사면안정해석 예

이상에서 설명한 Hardin의 사면안정해석과정을 Fig. 7과 같은 예제를 통하여 살펴보기로 한다. 그림에서 파괴활동면은 abef이며 오른쪽 상

단부의 Tension crack 영역은 물로 채워져 있다.

1) 하중

하중 Q_x 와 Q_y 를 식 (1)과 (2)에 의해서 계산한다. Fig. 7에서 diagram은 이들 식에 해당하는 각 항들을 x 의 위치에 따라 계산한 것이다. 따라서 Q_x 와 Q_y 는 q_x 와 q_y 의 각 면적과 같으며 그 결과 $Q_x = -1300$, $Q_y = 7000$ 이고 합력 $Q = 7120$ 이다.

한편 하중의 모멘트 Q_m 은, 식 (3)을 사용하지 않고 아래식으로부터 직접 구할 수 있다.

$$Q_m = \int_{xL}^{xR} \left[\int_{y_f}^{y_f'} (r_y x - r_x y) dy + (w_x y - w_x y \tan \delta) + u_f (y_f \tan \alpha - x) \right] dx + (U \cdot y_H)_{xR} - (U \cdot y_H)_{xL} \dots\dots\dots(23)$$

식 (23)에 의해서 $Q_m = 116584$ 이고 이때 Lever Arm은 $a_q = 16,374$ 이다.

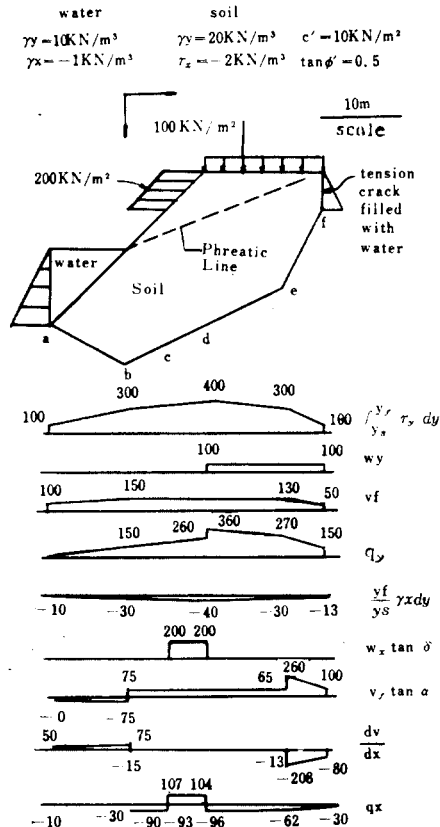


Fig. 7. Example problem loading.

2) 반 력

초기값으로 $F=1$ 과 $\lambda=1/3$ 을 가정하여 $\sigma'(x)$ 를 식 (21)로부터 산정하면 Fig. 8의 파괴활동면에 나타낸 값과 같다. 이 $\sigma'(x)$ 와 식 (7) 및 식 (8)로부터 각 x 점에 대한 n_x, n_y, t_x, t_y 는 Fig. 8의 diagram과 같이 구하여진다. 여기서 각 합력들은 그 면적과 동일하므로, $N'_x=1736, N'_y=6104, T'_x=-3402, T'_y=1018$ 이 되고, 식 (9)와 (10)으로부터 $N'=6346$ 및 $T=3551$ 을 얻는다. 이 때 반력의 합은 식(11)에 의하여 $R=7134$ 이고 $m=0.00765, f=0.5593$ 이다.

한편 모멘트 N'_m 과 T'_m 은 n_m 과 t_m 의 계산과정을 거치지 않고, $\sigma'(x)$ 의 그림에 나타난 수에 해당하는 만큼 n_x, n_y, t_x, t_y 의 diagram을 10개의 삼각형으로 나누어 직접 산정하며 그 결과 $N'_m=3089, T'_m=125787$ 이다.

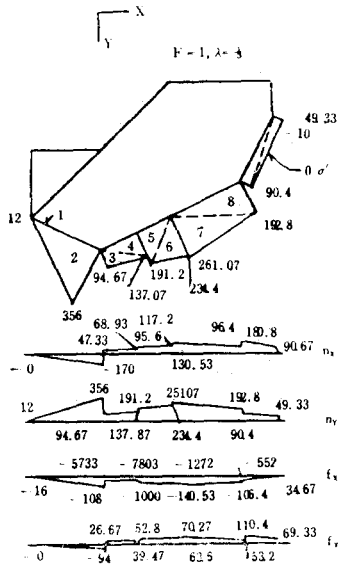


Fig. 8. Example problem reaction.

3) 안전율

이상의 값들과 식 (14)로부터 안전율을 구하면 $F=1.102$ 가 된다. 이것은 $F=1$ 과 $\lambda=1/3$ 을 가정하여 구한 것이므로 새로운 안전율 $F=1.102$ 와 $\lambda=1/3$ 를 사용하여, 다시 반력을 계산

한다. 이와 같은 반복계산은 안전율이 수렴할 때까지 계속 수행한다. 본 예제에서는 $\lambda=1/3$ 에 대한 안전율이 1, 1.102, 1.069, 1.079, 1.076, 1.077, 1.076 으로 되어 수렴안전율이 1.0765 이며 이 수렴안전율에 대한 반력 $R=7108$ 이다. 그러나 이 반력은 하중 $Q=7120$ 과 일치하지 않으므로 여기서 새로운 λ 값을 가정하여 다시 반력과 안전율을 구한다. Table 1은 이와 같은 반복수행에 의한 λ , 수렴안전율 및 반력산정의 결과를 보여주며, 본 예제에서 R 과 Q 가 동일한 경우는 $\lambda=0.35, F=1.085$ 이므로 이 값이 정역학적으로 일치하는 해(Statically consistent solution)가 된다.

Table 1 λ and converged F

λ	Converged F	$R(KN)$
1/3	1.0765	7108
0.35	1.0854	7120
0.37	1.0965	7137
0.40	1.1140	7166

4. 간편해석법의 비교

Hardin의 간편법을, 내적평형을 만족시키지 못하는 기존의 간편법 중 Simplified Bishop method와 비교분석하였다.

먼저, 유효수직응력의 산정법에 따른 안전율 값을 비교하기 위하여 Fig. 7과 같은 사면의 예제에서 원점을 5m 아래로 이동시켜 원형활동면

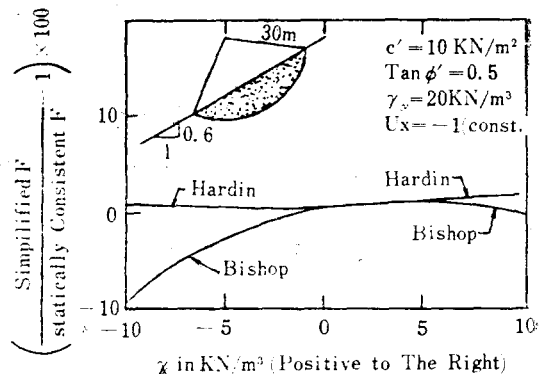


Fig. 9. Comparison of simplified methods.

이 a, d, f 점을 지나며 그 반지름이 26.93 m 이고 사면의 강도정수 $c=20\text{KN/m}^3$, $\tan \phi'=0.65$ 인 경우에 대한 해를 구하였다. Hardin의 해석법에 따라 식 (22) 및 식 (7)에서 식 (15)를 사용하면 $F=1.31$ 이고 Simplified Bishop method에 의하여 식 (24)와 같은 유효수직응력식으로 구한 안전율은 1.28이다. 이와 같이 두 해석법에 의한 안전율은 유효수직응력 $\sigma'(x)$ 의 산정법에 따른 차이가 크지 않으므로 안전율산정은 반복계산이 필요없는 Hardin의 해석을 사용하는 것이 편리하다.

한편, 지진에 의하여 지반자체의 수평운동력이 발생하는 경우, Hardin의 해석에서는 유발된 동적수평력을 등가수평체적력 r_x 로 변환하여 고려하였다. 이러한 Hardin의 간편법과 수평체적력이 고려되지 않은 Simplified Bishop method의 안전율에 대하여 지진계수 α_0 (지진발생시 중력가속도에 대한 수평가속도의 비)의 변화에 따른 해석정도를 Fig. 9와 같은 예제를 통하여 분석하였다. 여기서 α_0 의 범위를 -0.5 에서 0.5 로 하였으며 이에 대한 등가수평체적력 r_x 는 -10 에서 10KN/m^3 에 해당된다. 그림에서와 같이, r_x 의 변화에 따른 두 간편법의 편차 백분율을 고찰해 보면 Hardin의 간편법은 r_x

의 전범위에 걸쳐 최대 0.5%의 편차율을 보여 정해에 근사한 반면 Simplified Bishop method는 부(-)수평체적력이 커질수록 편차율이 급증하며 $r_x=-10\text{KN/m}^3$ 에서 약 10% 정도에 이른다. 따라서 지진 등에 의한 수평력을 고려해야 할 경우, Hardin의 사면안정해석법이 월등히 우수함을 알 수 있다.

5. 결 언

Hardin이 제안한 Lever arm equilibrium method는 활동사면에서의 내적평형을 만족시킬 뿐만 아니라 부정정문제를 정정화시킨 새로운 사면안정해석이다. 또한 이 해석법은 임의의 파괴활동형상에 대한 해석이 가능하며 특히 활동면이 원형인 경우, 간편법을 사용하여 반복계산없이 안전율을 쉽게 구할 수 있는 장점이 있다. 한편 수평체적력을 고려함으로써 지진 등에 의한 안정해석이 가능하며 이 경우, 간편법에 의한 결과가 기존의 Simplified Bishop method보다 정해에 매우 근사한 것으로 나타나 지반의 수평운동을 고려할 경우 특히 우수한 사면안정 해석으로 평가되고 있다.

참고문헌

1. Hardin, B.O., and Hardin, K.O., "A New Statically Consistent Formulation for Slope Stability Analysis", *Proceedings of the IV International Symposium on Landslides*, Toronto, September, 1984.