

# 粒狀體試料의 空際比의 頻度分布

## The Frequency Distribution of Void Ratio of Granular Materials

都 德 鉉\*

Doh, Duk-Hyun

高 在 晚\*\*

Koh, Jae-Man

吳 圭 泰\*\*\*

Oh, Kyu-Tae

### Abstract

This study aims at scrutinizing the relationships among the frequency distribution of voids the relative density and the shear strength for the three types of different granular materials.

The main results summarized are as follows:

- (1) The frequency distribution of void ratio of glass beads can be approximated by the negative exponential distribution proposed by Shahinpoor (1981), while as the particle shape changes from spherical to angular the frequency of the denser voids decreases and the distributions are well presented by the beta distribution.
- (2) For all materials, the standard deviation of void ratio increases with decreasing both the relative density of the material and sphericity of particle.
- (3) It was found that shear strength of the material was a function of not only the mean void ratio and its standard deviation, but also of the shape of the probability density function of the distribution of void ratio. The more the frequency distribution of void inclines towards the denser voids, the higher the shear strength of the material and vice versa.

### 要 旨

3種의 粒狀體試料를 대상으로 空際比의 頻度分布, 相對密度 剪斷強度 등에 대한 試驗研究結果

(1) 유리알의 경우 空際比의 頻度分布는 Shahinpoor<sup>16)</sup>가 제안한 陰의 指數分布에 접근하며 粒子의 모양은 球形에서 角形의 順으로 變化되는 반면에 稠密한 空際의 頻度는 減少하며 Beta 分布로서 잘 나타냈다.

(2) 全 試料에서 空際比의 標準偏差는 試料의 相對密度와 粒子의 球形性이 감소함에 따라 증가하였다.

\* 正會員, 建國大學校 農科大學 農工學科 副教授

\*\* 正會員, 建國大學校 大學院 博士課程

\*\*\* 建國大學校 大學院 碩士課程

(3) 剪斷強度는 平均空隙比와 標準偏差의 함수일 뿐만 아니라 空隙比 分布의 確率密度函數이다.

(4) 空隙比의 頻度分布가 稠密한 空隙쪽으로 기울수록 試料의 剪斷強度는 더 크며 이의 逆도 또한 같다.

## 1. 序 論

粒狀土의 構造는 粗粒子의 空間的 配列과 空隙에 관련되어 있다.

따라서 Mogami<sup>6)</sup> Oda<sup>11,12,13,14)</sup>, Mahmood et al<sup>9)</sup> Mitchell et al<sup>5)</sup>, Petrakis<sup>15)</sup> 등은 粗粒子의 構造의 特性에 관한 研究를 통해 理論的, 實驗的으로 발전시켜 粗粒子의 力學的 舉動과 空間的 配列에 대한 相互關係를 糾明하고자 시도해 왔다.

특히 Mogami<sup>6)</sup>, Petrakis<sup>15)</sup> 등은 粗粒子의 力學的 舉動은 空隙比 또는 空隙比의 分布와 밀접한 관계가 있다고 하였다.

Mogami<sup>6)</sup>는 粗粒子의 內部摩擦角은 平均空隙比, 空隙比의 標準偏差 등에 관계가 있음을 밝힌 반면 Petrakis<sup>15)</sup>는 空隙比의 統計上의 分布를 고려하여 cyclic 單純剪斷試驗을 통한 건조 모래의 다짐정도를 豫測할 수 있다고 하였다. 이와같이 空隙의 分布와 剪斷強度와의 關係를 統計的인 측면에서 評價하는 경우가 많으며 空隙의 統計的인 分布는 空隙比의 頻度分布에 의하여 설명할 수 있다. 따라서 本研究에서는

① 粒狀體試料에 대한 空隙比의 頻度分布를 實驗的으로 決定하고 이들 分布上에서 球形과 角形 粒子特性의 영향 ② 古典統計學的 mechanical theory와 Boltzmann의 假說을 기초로 하여 Shahinpoor<sup>17)</sup>가 제안한 空隙比의 理論的 頻度分布와 實驗的 頻度分布의 비교 ③ 剪斷變形 過程에서 空隙比의 頻度分布에 대한 依存度를 규명하여 液狀化研究에 必要的 基礎資料를 提供하고자 시도하였다.

## 2. 空隙比의 頻度分布 결정방법

### 2.1 Voronoi Polyhedron에 의한 方法

본래 이 概念은 순수한 液體의 分子幾何學의

연구를 위해 유도된 것이며 Finney<sup>1,2)</sup>는 均等球形으로 充填된 것을 多面體로 간주하였다. 또한 Shahinpoor<sup>17)</sup>가 채택한 Voronoi Polyhedron은 均等球形의 粒子들로 구성된 2次元, 3次元의 空隙比의 分布에서도 이것을 幾何學的 分布 空間에 대한 容積(unit cell)으로 간주하고 이때 空隙比의 分布는 각각의 容積에 접하는 空隙比( $e_i$ )를 구하였다.

3次元의 Voronoi cell은 多面體인 반면에 2次元의 Voronoi cell은 多角形이다.

Fig. 1은 均等板狀(uniform disc)으로 充填된 代表的인 2次元의 Voronoi cell이다.

이 多角形의 특징은 幾何學的 構造에 따라 配位數(coordination number)와 邊數가 동일하다.

3次元의 Voronoi Polyhedron, 즉 cubic packing의 경우에 2次元의 Voronoi Polygon과 유사하며 정 6면체인 동시에 配位數도 6이다.

Finney<sup>1,2)</sup>는 각각의 Voronoi cell은 中央의 球形粒子 또는 disc에 完全히 접하고 있으며 2次元 Voronoi Polygon에서 각각의 多角形에 접한 空隙比( $e_i$ )는 다음 式에 의하여 구하였다.

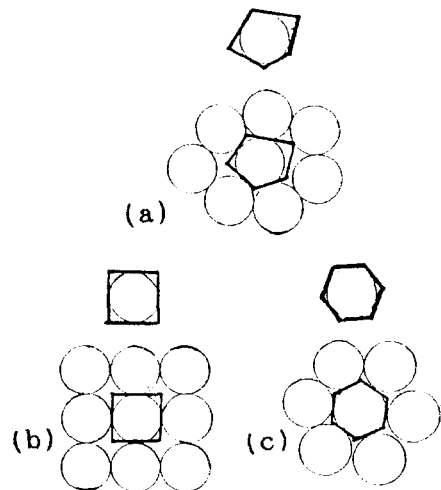


Fig. 1 Typical "Voronoi Cells" associated with various two-dimensional packings. (Shahinpoor, 1985).

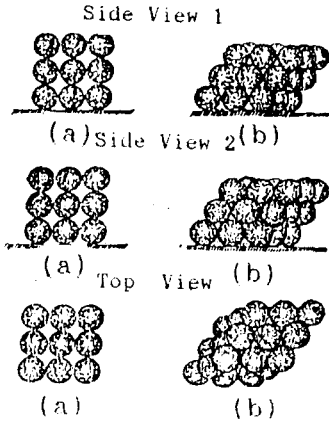


Fig. 2 Three-dimensional arrangements of uniform spheres (a) cubic packing, and (b) rhombohedral packing.

$$e_i = \frac{A_i - A_{si}}{A_{si}} \dots\dots\dots(1)$$

여기서,

$A_i$  : unit cell의 면적

$A_{si}$  : unit cell과 접한 disc의 면적

Shahinpoor & Shahrpass<sup>18)</sup>는 각 Cell을 optical scanner를 이용하여 2次元의 Monolayer에 대한 空隙比의 頻度分布를 결정하였다.

한편 式(1)과 같이 Voronoi Polyhedron의 空隙比( $e_i$ )는 다음 式에 의하여.

$$e_i = \frac{V_i - V_{si}}{V_{si}} \dots\dots\dots(2)$$

여기서,

$V_i$  : unit cell 또는 多面體의 체적

$V_{si}$  : unit cell로 싸인 球形의 체적

Shahinpoor<sup>16)</sup>는 均等球形 또는 disc의 結合이 가능한 모든 Voronoi cell을 檢討한 결과 Fig. 2와 같이 規則인 結合으로 構成되어 있다고 하였다.

또 0.909의 空隙比를 갖는 Cubic Packing은 粒子間의 마찰영향과 重力이 없기 때문에 均等球形의 結合이 될 수 있다고 하였다. 따라서 式(2)로 空隙比의 分布를 理論적으로 결정할 수 있다. 이것은 Oda<sup>11)</sup>의 研究結果와 최근의 實驗的인 結果의 0.909의 空隙比 보다 컸다.

이와 같이 球形이나 기타 시료의 3次元의 結合에 관한 空隙比의 頻度分布를 직접 결정하기는

매우 어려우나 2次元 結合에 관해서는 容易하다.<sup>9)</sup>

## 2.2 Oda의 方法

Oda<sup>12)</sup>는 薄片과 현미경을 이용하여 粒狀體에 관한 空隙比의 頻度分布를 결정하는 實驗的 方法을 제안하였으며 그 順序는 다음과 같다.

① Fig. 3과 같이 粒子들의 重心을 연결한 多角形을 하나의 unit cell로 한다.

② 각 多角形에 대한 空隙( $A_{vi}$ )와 粒子의 면적( $A_{si}$ )를 測定한다.

③ 각 多角形의 空隙比( $e_i$ )는 式(3)에 의한다.

$$e_i = \frac{A_{vi}}{A_{si}} \dots\dots\dots(3)$$

④  $e_i$ 의 頻度分布에 대하여 構造의 非等方性을 고려하여 垂直 및 水平斷面을 대상으로 (1)~(3)과정을 반복한다.

이 방법은 2.1項과는 달리 일반적이며 특별한 幾何學的의 구조가 되어야 할 필요는 없다.

$A_{vi}$ 과  $A_{si}$ 는 Planimeter나 Image Analyzer를 이용할 경우 다음과 같은 제한이 있다.

①  $e_i$  分布의 平均値( $e$ )는 薄片의 空隙比( $e_s$ )와 같지 않으며 그 分布値는 다음 式에 의한다.

$$e = \frac{1}{n}(e_1 + e_2 + \dots + e_n) \\ = \frac{1}{n}[(A_{v1}/A_{s1}) + (A_{v2}/A_{s2}) + \dots + (A_{vn}/A_{sn})] \dots\dots\dots(4)$$

$$e_i = \frac{A_{v1} + A_{v2} + \dots + A_{vn}}{A_{s1} + A_{s2} + \dots + A_{sn}} \dots\dots\dots(5)$$

式(4)(5)에 의한  $e$ 와  $e_s$ 는 서로 다르지만 만약  $A_{si}$ 가 각 多角形에서 같다면  $e$ 와  $e_s$ 는 같을

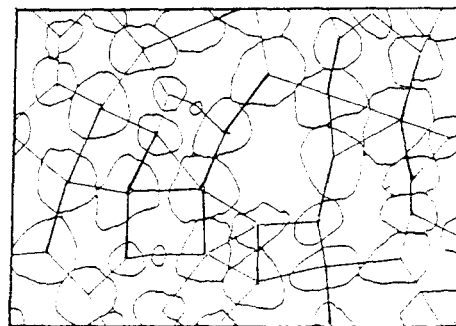


Fig. 3 Determination of frequency distribution of void ratio using Oda's method

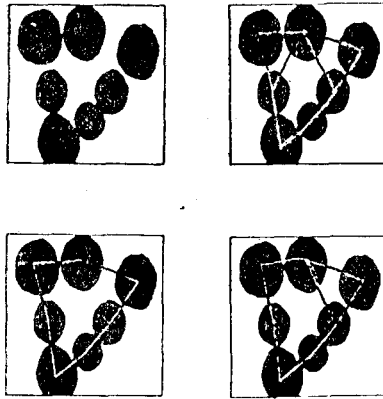


Fig. 4 Different suggestions to divide a loose packing of spheres into polygons using Oda's method.

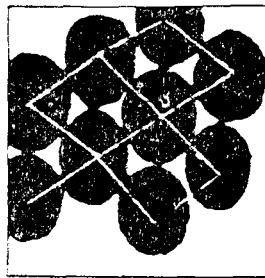


Fig. 5 A unique solution for dense packings of spheres using Oda's method.

수도 있다.

② 重心전정은 수행자의 판단에 좌우되며 느슨한 多角形의 분할방법을 예시하면 Fig. 4와 같다. 이 방법은 空隙比의 標準偏差( $\sigma_e$ )와 平均空隙比( $e$ ) 分布의 母數(parameter)에 영향을 줄뿐 薄片의 空隙比( $e_s$ )에는 영향을 주지 않는다. 반면에 稠密한 결합은 Fig. 5와 같이 多角形으로 분할하여 해석한다.

③ 그러나 이 방법은 Fig. 3과 같이 모든 粒子의 重心을 연결할 수 없으며 또 Computer로 완전자동화 할 수 없어 映像分析機의 이용을 권장한다.

④ 薄片에서 측정된 각 多角形의 空隙比( $e_s$ )는 3次元的 결합에 대응하는 公극비와 같을 필요는 없으며 薄片의 配向(orientation)에 따라 公극비는 正確值보다 작거나 클 수도 있다. 결과적으로

이는 公극비 분포와 最大 및 最少空隙比의 確率密度函數(probability density function)의 형태에 영향을 줄 수 있다.

### 3. 使用材料 및 試驗方法

#### 3.1 材料의 特性

##### 3.1.1 粒狀體 試料

球形性(Sphericity)과 Angularity와 같이 다른 粒子特性을 갖는 空隙比의 頻度分布를 결정하기 위해 다음과 같은 시료를 선정하였으며 物理的 特性은 Table 1과 같다.

① 同一粒徑의 유리알

② Ottawa 砂(C-90)

③ 漢江砂(#20); (현재 공사중인 올림픽대교 河床 30 cm 深度에서 채취)

Table 1. Physical properties of materials tested

Material	Distribution	Shape	Size (mm)	Mineral
Glass Beads	Uniform	spheres	2.0	glass
Ottawa Sand	Uniform	rounded	0.59-1.0	quartz
Han River Sand	Uniform	angular	0.59-1.0	quartz

Table 2는 公극비의 限界이며 최대公극비( $e_{max}$ )는 다음 방법으로 결정하였다.

Table 2. Limiting void ratios

Material	$e_{max}$	$e_{min}$
Glass Beads	0.72	0.54
Ottawa Sand	0.75	0.52
Han River Sand	1.02	0.80

① 시료를 6.35 cm(H) × 6.35 cm(D)의 원형 몰드에 넣는다.

② ①항의 몰드위에 同一值數의 몰드를 마주 부착시키고 거꾸로 한 후 다시 뒤집는다.

③ 몰드를 서로 분리시켜 남은 시료는 곧은날로 제거한 후 시료의 重量과 空隙比를 계산한다.

④ ①~③항의 과정을 4회 반복하여 公극비의 平均值를  $e_{max}$ 로 한다.

이 때  $e_{max}$ 는 ASTM<sup>4)</sup>에 의한 결과보다 매우

켰으며  $e_{min}$ 는 Pluviation 에 진동을 가해 결정하였다.

Ottawa 砂와 漢江砂의  $e_{min}$ 는  $e_{max}$ 을 측정한 몰드에 건조한 시료를 80cm(H)의 깔대기에 부어 측정하였으며 이때 얻어진  $e_{min}$ 는 표준다짐시험물드를 이용한 값보다 매우 작았다. 한편 유리알의  $e_{min}$ 는 스푼으로 시료를 몰드에 5층으로 나누어 넣은 후 수평진동을 가하였다. 이 과정을 4회 반복하여 얻은 空隙比의 平均値를  $e_{min}$ 로 하였다.

### 3.1.2 Epoxy

본 연구에 사용한 Epoxy는 Castolite AC로서 순수한 Epoxy는 粘性이 커서 Epoxy/Thinner의 混合이 불가피하였다. 그러나 혼합시에 Thinner에 氣泡가 混入되므로 Nye(10)는 모든 시료에 순수한 Epoxy를 침투시켰다.

본 시험에서는 양호한 시료제작이 가능하도록 Solution D를 선정하였으며 空隙(黑)과 粒子(白)의 명확한 對比가 되도록 검은물감을 혼합하였다.

Table 3은 Epoxy/Thinner 粘性을 나타낸 것이다.

**Table 3.** Viscosity of different epoxy/thinner solutions

Solution	Epoxy(%)	Thinner(%)	Viscosity(cps)
A	100	0	680
B	90	10	280
C	80	20	190
D	75	25	120
E	50	50	50

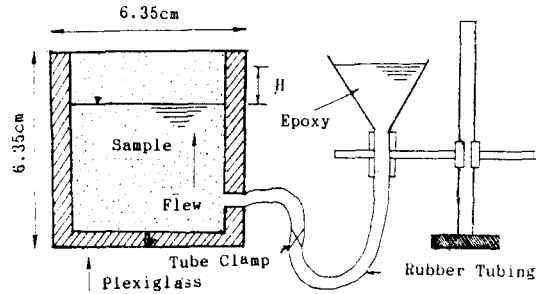
## 3.2 薄片의 제작

### 3.2.1 침투장치

Fig. 6과 같이 관측이 가능한 투명한 유리製品の 분할몰드를 사용하였으며 몰드內로 Epoxy를 침투시킬때 粒子配列이 교란되지 않도록 주의하였다.

Epoxy의 침투과정은,

① 몰드내에 얇은 플라스틱판을 부착하고 와세린을 발라 미끄럽게 한다. ② Epoxy는 1.5~2시간 간격으로 1.5cm의 매우 낮은 水頭下에서 침투시킨다. ③ 침투가 완료되면 튜브잠금쇠



**Fig. 6** The experimental set up

로 정지시켜 약 6시간동안 硬化시킨다. ④ 몰드를 분리하여 시료를 떼어낸다.

### 3.2.2 시료조제

前述한 목적을 위해 각 3가지 입상체 시료를 준비하였다.

① 100%의 相對密度(Dr)를 갖는 시료 즉,  $e_{min}$ 와 같은 稠密한 시료(D-Sample)

② 0%의 Dr를 갖는 시료 즉  $e_{max}$ 와 같은 느슨한 시료(L-Sample)

③ 50%의 Dr를 갖는 시료 즉,  $e_{min}$ 와  $e_{max}$ 의 평균에 접근하는 시료(M-Sample)

이며 각 시료의 부호는 Table 4와 같다.

**Table 4.** A Summary of all samples prepared

Material	Sample code	Void ratio	Density (gm/cm <sup>3</sup> )	Dr(%)
Glass Beads	GD	0.54	1.90	100
	GM	0.62	1.81	55
	GL	0.72	1.71	0.0
Ottawa Sand	OD	0.52	1.75	100
	OM	0.62	1.63	56
	OL	0.75	1.52	0.0
Han River Sand	HD	0.80	1.47	100
	HM	0.87	1.41	68
	HL	1.02	1.30	0.0

L 및 D-Sample은  $e_{min}$ ,  $e_{max}$ 의 결정방법과 동일하며 M-Sample은 스푼으로 몰드에 넣은 후 원하는 공극비가 얻어질 때까지 수직으로 세워 흔든다.

### 3.2.3 薄片

薄片은 岩石薄片을 준비하는 標準方法에 準하

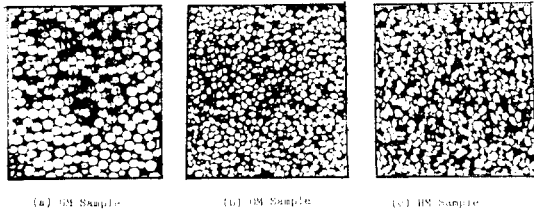


Fig. 7 Photograph for a vertical thin section

여 Syracuse Univ. 地質研究所의 機資材를 活用 하였으며 그 準備과정은 Nye<sup>10)</sup>에 의해 상세히 설명된 바 있다.

각 시료의 構造의 非等方性을 分析하기 위해 시료의 중심부를 0.04~0.07 mm의 두께로 잘라

사각형(5 cm×4 cm)으로 만들었다. 이 때 각 斷面에는 대략 100~150 개의 粒子가 分布되어 있었으며 Fig. 7은 유리알 및 Ottawa 砂, 漢江砂 薄片의 대표적인 예이다.

### 3.3 映像分析機의 利用

$A_1$ 와  $A_2$ 를 측정하기 위해 Fig. 8(Photo. 1 참조)와 같은 Image-Plus System을 이용한 Video Image 작업과정은 다음과 같다.

(1) 사진 혹은 薄片을 Camera 바로 밑에 놓으면 映像은 Camera monitor에 나타나며 Fig. 9는 OM 시료의 垂直薄片을 확대한 사진이다.

(2) Camera에서 얻어진 映像은 計數화된 映像으로 전환되어 컴퓨터에 記憶된다. 또 Grey

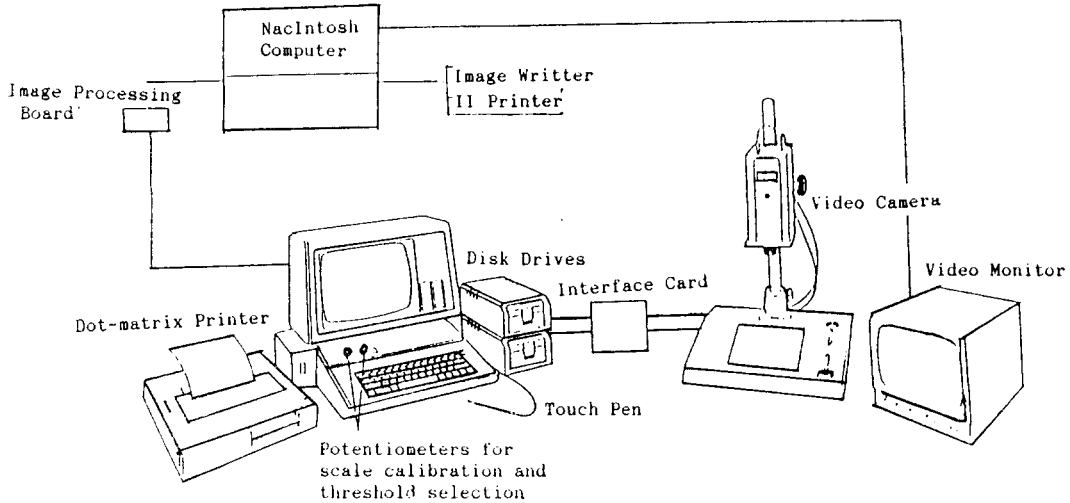


Fig. 8 System Configuration Image Analysis with MacIntosh Computer

내어 垂直( $V_1, V_2$ ) 및 水平( $H_1, H_2$ ) 斷面의 박편을 준비하였다.

유리알의 粒徑은 비교적 커서 映像分析機로 직접 관측할 수 있기 때문에 空隙(黑)과 粒子(白)간의 對比는 뚜렷한 반면 Ottawa 砂와 漢江砂의 경우는 粒子의 境界가 불투명하였다.

Nye<sup>10)</sup>는 空隙과 粒子간의 對比는 단면의 두께가 얇을 경우에는 매우 어렵다고 하였다.

그러나 그는 확대사진을 이용하지 않고서도 薄片의 크기를 粒子의 크기에 따라 변화시켰다. 예컨대, Ottawa 砂와 漢江砂의 정사각형 薄片斷面(2 cm×2 cm)을 8배로 확대하였고 유리알은 직

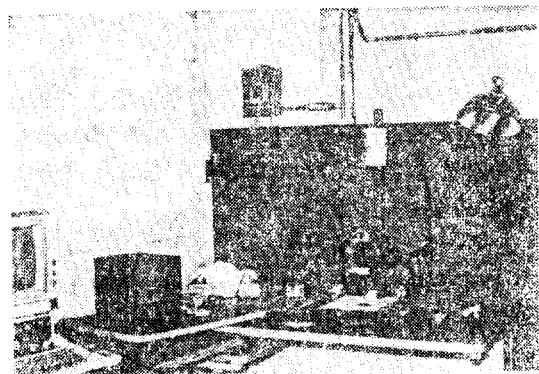


Photo 1 Video camera



Fig. 9 An enlarged photograph for a part of a vertical section from sample OM

shade가 計數化된 영상은 數值化된 Grey level로 환산된다. 이 때 비교적 어두운 회색은 적은 값을 갖는다. 이러한 영상을 Grey-scale image라 한다. Fig. 10은 Fig. 9에 Outline한 부분의 대표적인 Grey-scale image를 나타낸 것이다.

(3) 黑白의 영상은 Grey-scale image에 이용할 수 있는 Grey level에 대하여 上下限界를 설정하므로써 기억된 Grey level로부터 만든다. 黑白의 영상에서 선정된 한계에 있는 數值化된 Grey level(brightness)의 Grey scale image에 있는 모든 점들이 Computer graphs에서 白色으로, 그리고 Grey-scale image 상에서 기타 점들은 黑色으로 나타난다. 黑白의 영상 중에서 白色 부분이 測定하고자 하는 부분이다. Fig. 10 b)는 Fig. 10 a)의 Grey-scale image를 영상분석기로 얻은 대표적인 흑백 영상이다. 본 연구에 이용된 Image plus system은 Grey-scale image와 흑백영상을 수정하여 입력된 것을 Grey scale image와 흑백상을 對比하기 위해 결합되며 이

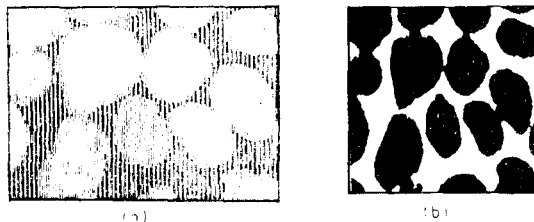


Fig. 10 (a) A grey-scale image produced by the image analyzer for the out lined part in the photograph shown Fig. 4.1 and (b) the corresponding binary image.

때 0(흑)에서 64(백)까지 서로 다른 Grey scale로 구분되지만 스크린상에서는 단지 16 Grey level로 나타낸다.

## 4. 結果 및 考察

### 4.1 유리알의 實驗結果

#### 4.1.1 空隙比의 實驗的 頻度分布

Oda<sup>11)</sup>의 방법을 이용하여 空隙比의 頻度分布를 實驗的으로 결정하고자 Table 4와 같이 9개 시료를 대상으로 하였으며 構造의 非等方性의 영향을 分析하기 위하여 4개의 薄片( $V_1, V_2, H_1, H_2$ )을 선정하여 비교한 결과 Fig. 11과 같다.

Fig. 12는 GD, GM, GL 시료의 영상분석기에 의한 공극비의 頻度分布를 나타낸 것이다.

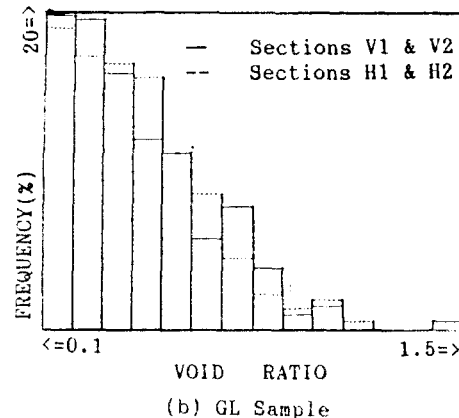
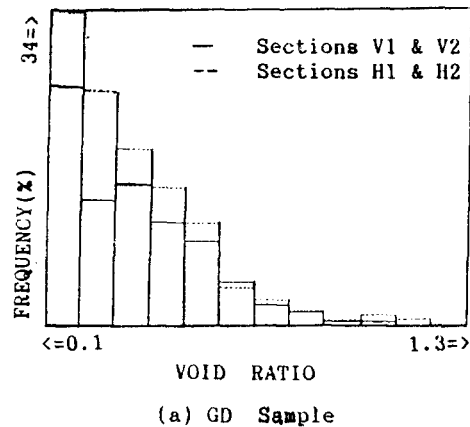
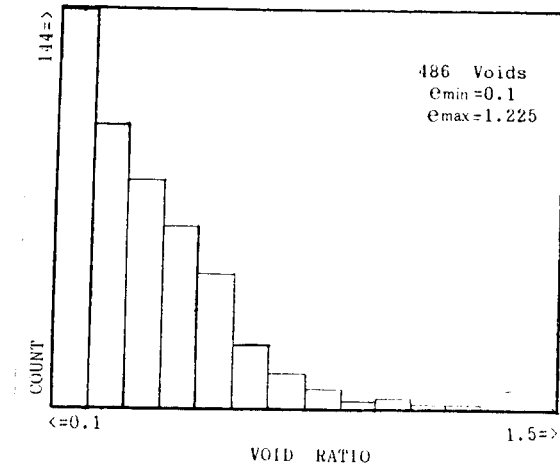
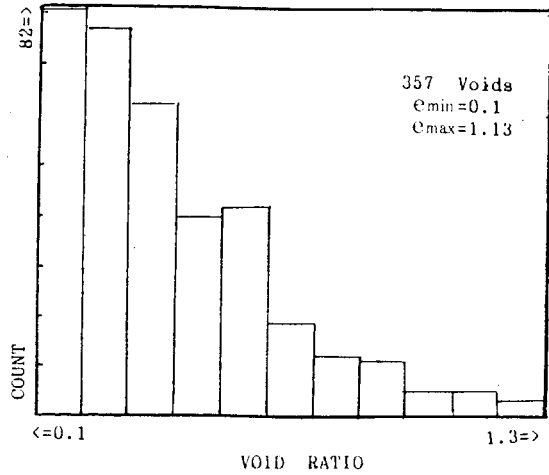


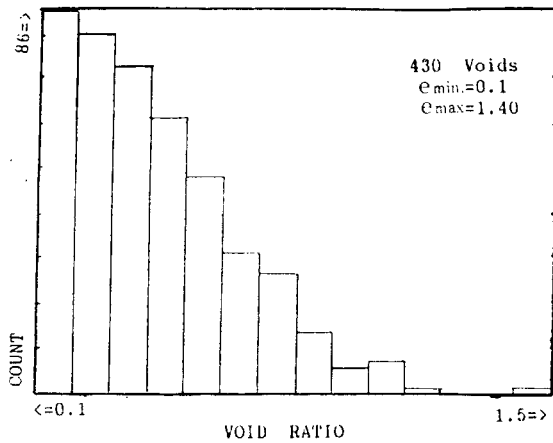
Fig. 11 Comparison between frequency distribution of void ratio obtained from vertical thin sections to that obtained from horizontal sections



(a) GD Sample



(b) GM Sample



(c) GL Sample

Fig. 12 Histogram of frequency distribution of voids ratio for sample glass beads, (class length-0.1.)

비교적 조밀한 空隙比쪽으로 기울었고 대개음 (Negative)의 指數分布로 나타내지며 그 식은 다음과 같다.<sup>17)</sup>

$$f(e) = \frac{\lambda \text{Exp}(-\lambda e)}{\text{Exp}(-\lambda e_{\min}) - \text{Exp}(-\lambda e_{\max})} \dots (6)$$

$(e_{\min} \leq e \leq e_{\max})$

상수  $\lambda$ 는 다음식에 의해 결정된다.

$$e = \lambda^{-1} + \frac{e_{\min} \text{Exp}(-\lambda e_{\min}) - e_{\max} \text{Exp}(-\lambda e_{\max})}{\text{Exp}(-\lambda e_{\min}) - \text{Exp}(-\lambda e_{\max})} \dots (7)$$

위 實驗的 分布의  $\sigma_e, e, e_{\min}, e_{\max}$ 는 Table 5와 같다. 여기서 시료의  $Dr$ 가 증가함에 따라 指數分布의 實驗值  $\lambda$ 가 증가하였다.

식 (6)은 空隙比의 指數分布의 實驗值  $\lambda$ 에 대하여 Fig. 11에서 보인 實驗的 頻度分布에 잘 일치하며 그로부터 얻어진 回歸曲線은 Fig. 13과 같다.

그림에서 비교적 느슨한 空隙 보다 稠密한 空隙의 頻度증가를 의미하는 것이다.

결과적으로  $\lambda$ 는 粒狀體 試料의 相對密度를 측

Table 5. Summary of statistical parameters for glass beads

Samples	Dr (%)	$e_{\min}$	$e_{\max}$	$e$	$\sigma_e$	$\lambda$
GD	100	0.1	1.22	0.34	0.19	3.54
GM	55	0.1	1.13	0.38	0.22	2.64
GL	0.0	0.1	1.4	0.41	0.23	2.40

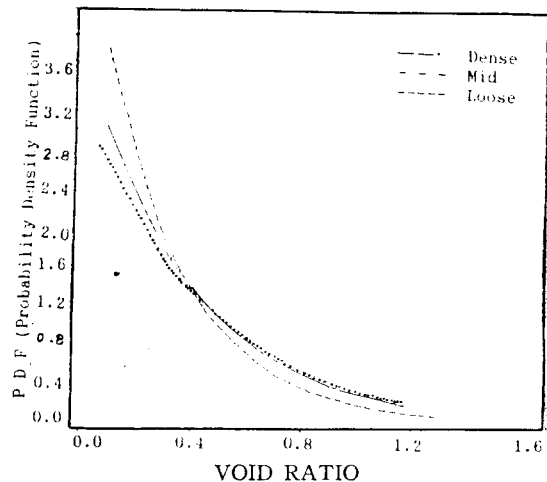


Fig. 13 Regression curves for frequency distribution of void ratio for glass beads.



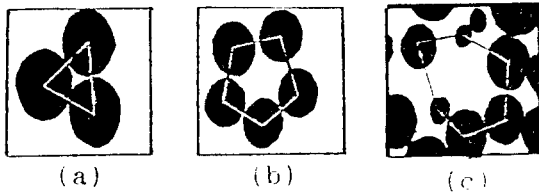


Fig. 14 Typical dense and loose voids observed in thin sections of glass beads.

정하여 결정하며  $Dr$ 가 증가함에 따라  $\lambda$ 도 증가한다.

標準偏差( $\sigma_e$ )는  $Dr$ 가 감소함에 따라 약간 증가하였다. 이 결과는 균등한 유리알을 대상으로 한 Oda<sup>10)</sup>의 실험치와 일치하였다.  $\sigma_e$ 의 증가는 非等方性 시료의 구조에서도 증가하며<sup>5),11)</sup> 이것은 느슨한 시료가 조밀한 시료보다 더욱 非等方性 시료임을 의미한다.

$e_{min}$ 은 3종의 시료에서 일정하였으며 Fig.1(c)와 같이 가장 조밀한 Hexagonal packing의 공극비에 해당하는  $e_{min}$ 은 0.1이다(Fig. 14(a))

均等球形으로 구성된 시료의  $e_{min}$ 은 0.35임을 제시한 것에 유의 해야한다. 이것은 非等方性的 느슨한 配列의 대표적인 薄片을 의미하는 것이다.

#### 4. 1. 2 理論的 分布와 實驗的 分布와의 比較

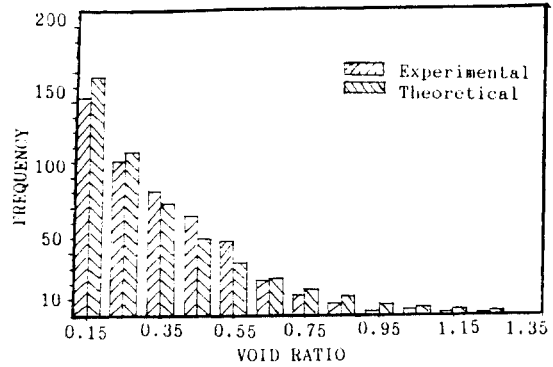
空隙比의 實驗的 分布로부터 결정된 統計的인 媒介變數  $e_{min}$ ,  $e_{max}$ ,  $\bar{e}$ 는 식 (6)과 (7)을 이용하여 공극비의 理論的인 頻度分布를 계산하였다.

이들 分布間의 比較는 Fig. 15와 같다.

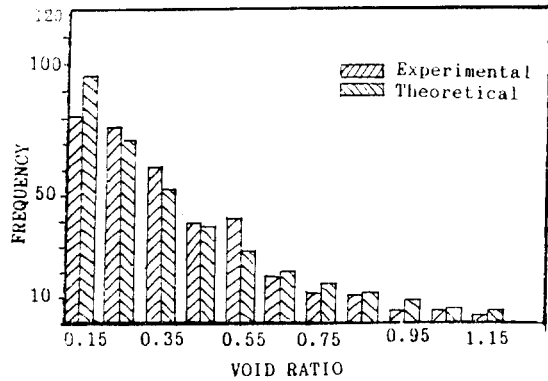
理論的인 分布의  $\lambda$ 는 3종의 시료에서 實驗的 分布의  $\lambda$ 보다 크게 나타난 것은 理論的 分布가 稠密한 空隙의 頻度를 과대평가하는 것을 의미한다.

식 (6)이 3가지 시료에 관한 첫級間( $0.1 \leq e \leq 0.2$ )에서 空隙의 頻度를 과대평가된 것을 Fig. 15에서 명백히 알 수 있다. 그러나 薄片에서 얻은 空隙比의 實驗的 頻度分布는 薄片의 영향으로 3次元 試料의 精確한 空隙比의 頻度分布를 나타낼 수 없다.

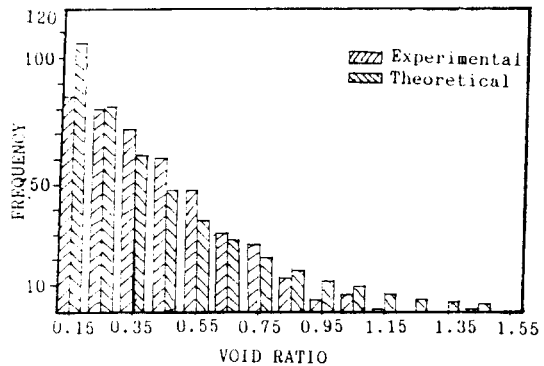
空隙比의 精確한 頻度分布는 薄片으로부터 얻은 것보다 더 조밀한 공극을 갖는다고 하여도 무방하며 결국 指數分布가 精確한 分布로서 적합



(a) Sample : GD



(b) Sample : GM



(c) Sample : GL

Fig. 15 Comparison between the theoretical and the experimental distribution of void ratio

하다고 할 수 있다.

위의 2가지 分布를 比較하기 위하여  $\chi^2$ 의 適合性(goodness-of-fit) 檢定을 한 결과 有意水準 1%에서 3種의 시료는 모두 양호하였으나 空隙

이 중간정도인 시료에서 5%의 有意水準이 나타났다. 일반적으로 5%의 수준은 시료의  $e_{min}$ 을 과소평가한 것으로 空隙比 分布의 確率密度函數의 양상에 영향을 미칠 수도 있다.

Table 2에 따르면  $e_{max}$ 는 각 시료마다 다소 차이가 있지만 중간정도의 조밀한 시료의  $e_{max}$ 는 거의 같은 반면에 느슨한 시료의  $e_{max}$ 는 다른 시료의  $e_{max}$  보다 매우 컸으며  $e_{max}=1.4$ 는 느슨한 시료에서 나타났다. 1.4의 공극비를 갖는 유일하게 큰 공극비는 느슨한 시료에서 발견된 것은 우연한 일이다.

이는 느슨한 시료에 대한 空隙比 頻度分布가  $1.2 \leq e \leq 1.4$ 에서 不連續임을 Fig. 11(c)에서 알 수 있다.

따라서  $e_{max}$ 의 편차는 느슨한 시료에서는 중요하지 않다. 3종의 시료에서 같은  $e_{max}$ 로 나타났다.

Fig. 13은 조밀한 空隙比와 느슨한 空隙比에 관련된 대표적인 조밀 또는 느슨한 空隙의 상태를 나타낸 것이다.

Fig. 13(b)에서 粒子의 配列은 cubic packing보다 더 느슨한 것 같지만 이것은 均等球形의 임의의 결합으로 될 수 있는 가장 느슨한 결합은 아니다.

이 결과 粒狀體의 配位數는  $Oda^{(11)}$ 의 결과와 일치하였다.

#### 4.2 Ottawa 砂의 實驗結果

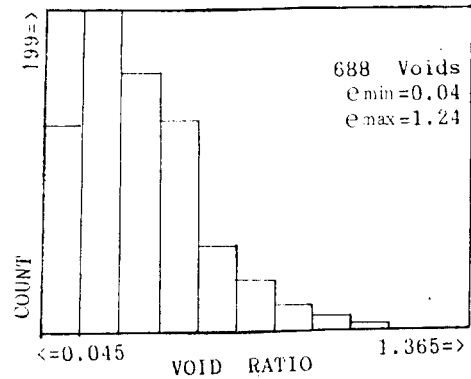
Fig. 16은 시료 OD, OM, OL에 대한 空隙比의 頻度分布이다. 分布의 양상은 보다 조밀한 공극비 쪽으로 기울었으나 이 양상은 조밀한 공극의 빈도에서 많은 감소로 인해 陰(Negative)의 指數分布에 접근할 수 없다. 조밀한 공극에서 頻度減少는 입자로 인한 감소 때문이다.

이와 유사한 分布는 둥근입자로 구성된 粒狀體試料에 관해  $Oda^{(12)}$ 에 의하여 보고 되었다.

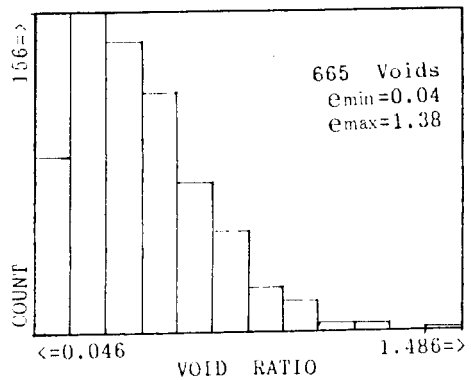
위에 나타난 分布는 다음과 같이 Two-Parameter distribution으로 접근시킬 수 있다.

$$f(e) = \frac{r(\alpha + \beta)(e - e_{min})^{\alpha-1}(e_{max} - e)^{\beta-1}}{r(\alpha)r(\beta)(e_{max} - e_{min})^{\beta-1}} \dots (8)$$

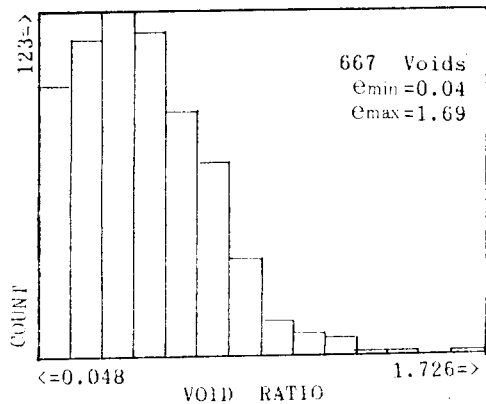
한편 Beta 分布는 實驗的 分布에 적합하며 3종의 시료에 대한 回歸曲線은 Fig. 17과 같다.



(a) OD Sample



(b) OL Sample



(c) OM Sample

Fig. 16 Histogram of frequency distribution of void ratio for sample Ottawa Sand, (Class length=0.12.)

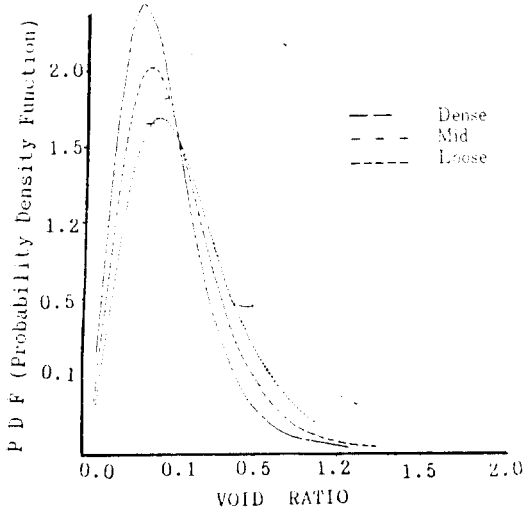


Fig. 17 Regression curves for frequency distribution of void ratio for Ottawa Sand

回歸曲線의 媒介變數  $\alpha$ 와  $\beta$ 는 實驗의 分布의 媒介變數  $e_{min}$ ,  $e_{max}$ ,  $\sigma_e$ ,  $\bar{e}$ 와 함께 Table 6에서  $Dr$ 가 증가함에 따라  $\alpha$ ,  $\beta$ 가 증가하고 있으며  $Dr$ 가 감소됨에 따라  $\sigma_e$ 가 증가하였다. 이것은 시료가 서로 非等方性 構造에서 증가함을 의미하고 있다.

또한  $e_{min}$ 은 유리알의 모든 시료와 같이 Ottawa 砂의 모든 시료에서도 일정하였다. 결과적으로  $e_{min}$ 은 단지 입자의 특성에 좌우되는 시료의 성질을 의미하고 있다. 그러나  $Dr$ 의 감소에 따라  $e_{max}$ 가 증가하고 있다는 것은 주목할만한 일이다.

$Dr$ 의 감소로 인한  $e_{max}$ 의 증가를 유리알의 경우와 비교함이 경우에 따라 더욱 중요하다.

이것은 큰 空隙의 발생빈도가 球形 粒子로 구성된 시료보다 둥근 粒子로 구성된 시료에서 더 큼을 의미하고 있다. 즉, 큰 공극은 둥근 粒子나 모난 粒子로 구성된 시료에서 더욱 안정하다

Table 6. Summary of statistical parameters for Ottawa Sand

Sample	Rd	$e_{min}$	$e_{max}$	$e$	$\sigma_e$	$\alpha$	$\beta$
OD	100	0.04	1.24	0.20	0.20	1.7	5.7
OM	56	0.04	1.38	0.40	0.22	1.7	5.2
OL	0.0	0.04	1.69	0.44	0.25	1.5	4.9

고 하는 것은 타당하다. 실제 球形粒子의 시료는 둥글거나 모난입자로 구성된 시료 보다 쉽게 압밀된다고 알려졌다.

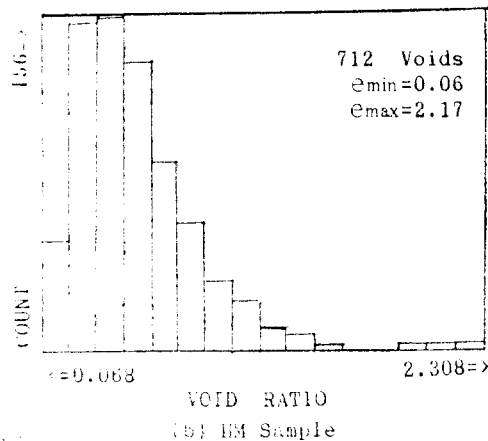
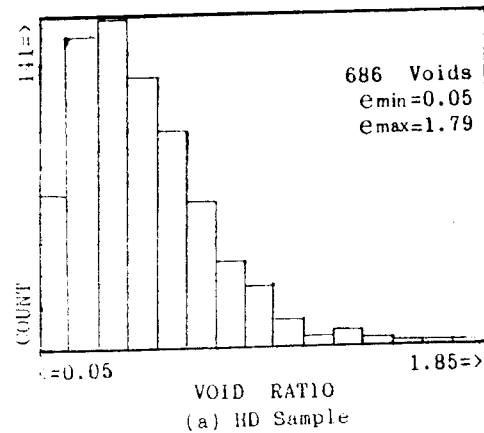
### 4.3 漢江砂의 實驗結果

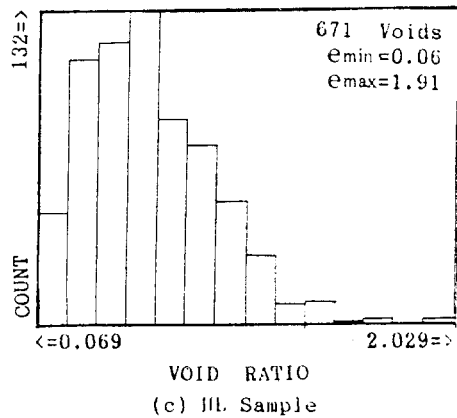
Fig. 18은 HD, HM, HL 시료에 대한 空隙比의 頻度分布이며 다음과 같은 몇가지 變化를 제외하고 Ottawa 砂의 양상과 유사하였다.

(1) 이 分布는 보다 조밀한 空隙쪽으로 약간 기울었다.

(2) 비교적 稠密한 空隙의 頻度에서 현저한 減少를 보였으며 같은  $Dr$ 에서 다른 粒狀體 試料과 비교할 때 漢江砂의 모든 시료에서  $e_{max}$ 가 현저하게 증가하였다.

空隙比가 증가된 것은 시료에 크고 많은 空隙의 형성과 粒子角의 영향에 기인한 것이라고 할

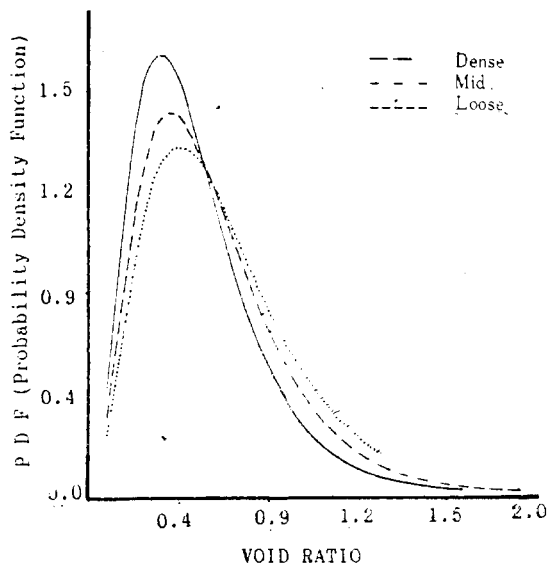




**Fig. 18** Histogram of frequency distribution of void ratio for Sample (a) Class length—0.12, (b)(c) Class length—0.14

**Table 7.** Summary of statistical parameters for crystal silica sand.

Sample	Dr (%)	$e_{min}$	$e_{max}$	$e$	$\sigma_e$	$\alpha$	$\beta$
HD	100	0.05	1.79	0.46	0.27	1.6	5.6
HM	68	0.06	2.17	0.53	0.285	1.8	7.0
HL	0.0	0.06	1.92	0.59	0.30	1.6	4.5



**Fig. 19** Regression curves for frequency distribution of void ratio for Han River Sand

수 있다.

漢江砂의 實驗的 分布의 母數  $\lambda$ 는 Ottawa 砂의  $\lambda$ 와 같은 방식으로 결정되며 그 결과는 Table 7과 같다.

Fig. 19는 위의 分布에 대한 回歸曲線이다.

漢江砂의  $\sigma_e$ 는 같은 Dr에서 모든 시료와 비교하면 Ottawa 砂나 유리알 보다 훨씬 높다.

그 이유는 유리알이나 Ottawa 砂 보다도 不均一한 試料이기 때문이다.

Table 8은 각 시료의 薄片에서 얻은 空隙比를 비교할 것이다.

**Table 8.** Comparison of void ratio obtained from thin sections to that derived physically for all samples.

Sample	Void ratio		Volume fraction		Error in volume fraction (%)
	Physically derived	Thin section	Physically derived	Thin section	
GD	0.54	0.39	0.65	0.72	10
GM	0.62	0.44	0.61	0.69	13
GL	0.72	0.48	0.58	0.67	17
OD	0.52	0.39	0.66	0.72	10
OM	0.62	0.45	0.61	0.69	12
OL	0.74	0.50	0.57	0.66	16
HD	0.80	0.50	0.55	0.66	20
HM	0.87	0.59	0.53	0.62	17
HL	1.02	0.66	0.49	0.60	21

#### 4.5 直接剪斷試驗 結果

空隙比의 頻度分布에서 粒狀體의 力學的 特性의 관련성을 究明하기 위해 3種의 試料에 대하여 直接剪斷試驗을 실시하였다. 이 시험은 거의 100%의 Dr를 갖는 매우 稠密한 시료를 중심으로 실시하였으나 이와 같은 試料를 계속적으로 준비하는 것은 불가능하였다. 한편 이 시험은 0.5, 1.0, 2.0, 4.0 kg/cm<sup>2</sup>의 垂直應力下에서 실시한 결과 모든 시료가 초기수축이 되는 단계에 있어서 실제 일정한 體積狀態에 도달할 때까지 팽창하였고 漢江砂는 다른 시료보다도 큰 初期收縮이 일어났으며 또한 다른 시료보다도 큰 空隙을 지니고 있었다.

剪斷變形의 增加로 인하여 다른 시료보다 體

積膨脹이 상대적으로 큰 경향을 보였다.

Table 9는 각 시료의  $\phi$ 와  $\sigma_c$ 와의 관계이다. 여기서  $\phi$ 는 漢江砂, Ottawa 砂, 유리알의 순으로 작아졌다.

Table 9. Relationship between  $\phi$  and  $\sigma_c$ .

Material	Dr(%)	$\sigma_c$	$\phi$
Glass Beads	100	0.19	25
Ottawa Sand	100	0.20	30
Crystal Silica	100	0.27	36

Fig. 20은 Holubec & D'Appolonia의 실험치와 본 연구의 결과를 비교한 것이다.

여기서  $\phi$ 는  $\sigma_c$ 의 증가와 더불어 증가하며 이는 構造的 非等方性的 증가와 함께  $\phi$ 가 증가한다는 것을 의미한다.

이들 관계는 서로 다른 粒子特性을 갖는 시료의  $\phi$ 와는 비교할 수 없지만 각 시료에 대하여 유사한 관계를 얻을 수 있다.

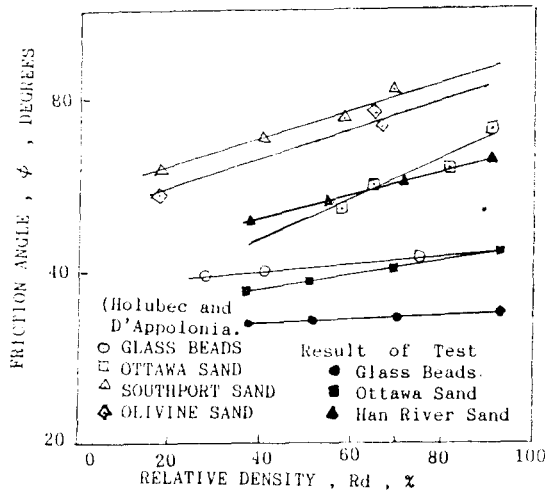


Fig. 20 Effect of particle shape on angle of internal friction

## 5. 結 論

3種의 粒狀體 試料를 대상으로 空隙比의 頻度分布, 相對密度, 剪斷強度 등에 대한 試驗研究 結果는 다음과 같다.

1. 유리알의 경우 空隙比의 頻度分布는 Sha-

hinpoor<sup>19)</sup>가 제안한 陰의 指數分布에 접근하며 粒子의 形狀은 球形에서 角形의 순으로 變化되는 반면에 稠密한 公극의 頻度는 減少하며 Beta 分布로서 잘 나타났다.

2. 모든 시료에서 空隙比의 標準偏差는 相對密度와 입자의 球形性이 감소함에 따라 증가하였다.

3. 最少空隙比는 각 시료에서 일정하고 시료의 상태에는 좌우되지 않는다. 그러나 입자의 球形性이 감소함에 따라 감소하였다.

4. 最大空隙比는 相對密度와 球形性의 감소에 따라 증가하였으나 유리알의 경우 큰 公극의 公극의 容易性으로 인하여 相對密度의 감소에 따라 증가하지 않는다.

5. 剪斷強度는 평균公극비와 標準偏差의 함수일 뿐만 아니라 公극비 分布의 確率密度函數이다. 그리고 조밀한 公극쪽으로 公극비의 頻度分布가 기울어 질수록 剪斷強度는 더 크며 이의 差도 또한 같다.

## References

1. Finney J.L.: Random Packings and The Structure of Simple Liquids, (1): The Geometry of Random close Packing., Proc. R. Soc. London A 319, 1970, pp.479~493.
2. Finney J.L.: Random Packings and The Structure of Simple Liquids, (2): The Molecular Geometry of Simple Liquids., Proc. R. Soc. London A495, 1970, pp.495~507.
3. Mahmood A. Mitchell J.K. and U. Limdbolm.: Effect of specimen preparation method on grain arrangement and laboratory testing., ASTM STP 599, 1976, pp.169~192.
4. Mehdiratta G.R. and G.E. Ttiandafilidis, Minimum and Maximum densities of granular materials., Geotech. Testing Journal, Vol. 1, No.1 1978, pp.34~40.
5. Mitchell J.K. Chatoian J.M. and G.C. Carpenter, The influence of sand fabric on liquefaction behavior., report No. TE 76-1, Univ of California, Berkeley, 1976.
6. Mogami T., A statistical theory of mechanics of granular materials. Jour. Fac. of Engrg.

- Univ. of Tokyo ser(B) Vol.28, 1966, No. 2, pp.65~79.
7. Mogami T. and G. Imai, Granular mechanics, Gihoda, 1969, pp.893~1036(in Japanese).
  8. Mogami T. and G. Imai, On the failure of the granular material., Soils and found. Vol. VII No. 3. 1967.
  9. Murphy C.P. Bullock P. and R.H. Turner, The measurement and Characterization of voids in soil thin sections by image analysis., part 1 Principles and Techniques, Soil science 28, pp. 498~504, 1977.
  10. Nye. H.K., Soil Fabric & Permeability, Fulfillment of Master Thesis. Syracuse Univ.(1985)
  11. Oda, M., Coordination number and its relation to shear strength of granular material., Soils and found. Vol.12 No. 1 1972a pp.1~8.
  12. Oda. M., Fabric and their effects on the deformation behaviors
  13. Oda. M., Initial fabrics and their relations to mechanical properties of granular material, Soils and found. Vol. 12, No.1 1972a pp.1~8.
  14. Oda. M., Deformation mechanism of sand in triaxial compression test., Soils and found. Vol. 12, No. 4, 1972b. pp.45~63.
  15. Petrakis E., A statistical model predict compaction of dry sand during cycle simple shear loading., Model and application, pp.1~182, 1983.
  16. Shahinpoor M., Statiscical mechanical considerations on storing., Bulk solids handling, Vol. 1, No.1, pp.264~268, 1981.
  17. Shahinpoor M., Exact bounds on average granular pressures in a General Bin Model., Appli. Math. Modelling., Vol.5, pp.192~213.
  18. Shahinpoor M. and Shahrpass A., Frequency distribution of voids in mono-layer of randomly packed equal spheres., Bulk solid handling, Vol. 2, No. 4, 1982, pp.825~838.

(접수일자 1988.6.16)