

油压管路에서 切换밸브 反復操作에 따른 衝擊压力 發生 現象에 관한 研究

鄭 容吉*, 廉 萬午**, 李 珍杰***, 李 一永****

A Study on Pressure Surge Accompanied by Repeated Valve Operation in Oil Hydraulic Pipeline

Y. G. Jung, M. O. Yum, J. K. Lee and I. Y. Lee

ABSTRACT

In a large scale oil hydraulic system having repeatedly operated actuator, such as a large scale forging press, pressure surges often occur due to the recombination of oil column in a return line attached to the downstream side of a directional control valve. Especially, the pressure surges appear very severe ones at a certain valve operating frequency. These pressure surges restrict the operating frequency of the hydraulic system. But related reports on the above mentioned phenomenon are rarely to be found. In this study, therefore, the authors investigate the exact reason why such severe pressure surges occur at a certain range of valve operating frequency. The study is performed by experiment and numerical computation on the relationship between pressure surges and valve operating frequency.

記號說明

A : 管路의 斷面積
a : 管路內의 音速
B : $a/(gA)$
 C^+, C^- : 特性曲線
D : 管路의 內徑
f : 管摩擦損失係數
g : 重力加速度

H : 壓力水頭
 h_f : 管路 單位 길이當의 壓力水頭 損失
L : 管路길이
N : 管路 分割數
 N_B : 氣泡內 氣스의 物數
 P_o : 밸브 上流端 어큐물레이터內的 壓力
 P_r : 밸브 下流端 어큐물레이터內的 壓力
 P_1 : 밸브 1 回操作時 油柱의 再結合에 따른

* 통영수산전문대학 기관학과
** 경남대학교 공대 기계공학과
*** 부산대학교 공대 정밀기공과
**** 부산수산대학 기관학과

P_1' : 壓力上昇値 ($x = 5 \text{ m}$)
 : 밸브 反復操作時 油柱의 再結合에 따른
 壓力上昇値 ($x = 5 \text{ m}$)
 Q : 流量
 T : 絶對溫度
 t : 時間
 Δt : 時間増分
 t_1 : 밸브 開放 持續時間
 t_2 : 밸브 閉鎖 持續時間

V : 平均流速
 V_0 : 初期 平均流速
 W : 空洞의 體積
 x : 管路의 軸方向 거리
 Δx : 거리의 間격 ($\Delta x = L/N$)
 γ : 作動流體의 比重量
 ψ : 內挿比
 添字 A, B, C, D, P : 格子點

1. 緒 論

最近 大型 産業機械를 구동시키는 動力源으로 油壓裝置가 널리 使用되고 있다. 이러한 油壓裝置에서는 裝置의 大型化 및 高速化에 수반하여 制御流量이 많아지고 制御밸브의 操作時間 또한 매우 빨라지게 되었다. 따라서 여기에 사용되는 大型 油壓裝置에서 切換밸브 操作時에 流體過渡現象이 발생할 경우 큰 사고로 이어질 위험이 있다. 一例로서 大型 自由鍛造프레스 구동용 油壓裝置에서는 大流量의 方向制御를 切換밸브의 開閉에 의하여 高速으로 反復하면, 切換밸브로부터 油 탱크로 회귀하는 管路에서 큰 衝擊音과 振動이 발생하는 경우가 있다. 이러한 衝擊音의 발생은 切換밸브 操作周波數가 어느 한도 이상의 값으로 되었을 때 더욱 격심하게 되며, 이것이 切換밸브의 周波數를 制約하여 油壓시스템 전체의 作動能率을 저하시키는 원인이 되고 있다. 따라서 自由鍛造프레스와 같은 大型 油壓시스템에서는 현장에서의 경험에 의하여 切換밸브 操作周波數를 낮게 설정함으로써 과도한 衝擊壓力의 발생을 회피하여 사용하고 있으나, 衝擊壓力 발생의 精確한 原因은 아직 究明되어 있지 않다. 따라서 上記의 問題는 大型 油壓裝置의 性能改善을 위해서는 선결되어야 할 重要한 研究 課題라고 생각된다.

그런데, 切換밸브를 反復操作하는 경우 밸브

下流側에서 발생하는 衝擊音 및 振動은 切換밸브 操作周波數가 변화함에 따라 매우 달라진다는 사실을 현장 기술자의 提言 및 저자의 예비 實驗을 통하여 확인하였다. 이것은 切換밸브 操作에 따라 발생하는 衝擊壓力이 밸브操作 周波數와 밀접하게 관련되어 있음을 의미하고 있다. 그러나 현재까지 切換밸브 反復操作 周波數가 管路內 過渡現象에 미치는 영향에 관한 研究報告는 거의 全無한 실정이다.

따라서 本 研究에서는 油壓管路의 切換밸브 反復操作에 따른 衝擊壓力發生現象의 生成機構를 究明할 목적으로, 切換밸브의 操作周波數 變化에 따른 壓力波形的 變化를 實驗 및 數值解析 結果를 통하여 考察하였다.

2. 實驗裝置 및 方法

Fig.1은 自由鍛造프레스 구동용 油壓시스템에서 主 실린더, 主 切換밸브 및 油탱크를 연

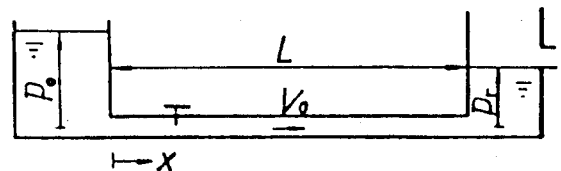


Fig.1 Pipe model for experiment and computation

결하는 管路 (油 회귀管路) 를 나타내는 모델이며, 이 모델을 대상으로 하여 實驗 및 數值解析을 행한다. 實驗裝置의 개략을 Fig.2에 나타내었다. 管路上流端의 定壓源으로는 油壓펌프, 릴리프 밸브 및 어큐레이터를, 下流端의 油 탱크 (定壓탱크)로는 릴리프 밸브와 어큐레이터를 사용하며, 이들 두 어큐레이터 사이에 切換밸브가 설치된 實驗管路를 연결한다. 實驗管路로는 內徑이 12.7 mm, 길이가 25 m인 銅管을 사용하였다. 切換밸브는 管路上流端으로부터 5 m의 위치에 설치하였다. 壓力測定 지점은 上流端으로부터 5 m (밸브直後) 및 15 m의 지점이며, 壓力測定에는 스트레인지지식 壓力變換器를 사용하였다. 油壓作動油로는 40°C에서 動粘度 45.5 cSt, 25°C에서 比重 0.866인 市販의 油壓作動油를 사용하였다.

切換밸브는 復動形 電磁밸브이며, 이 切換밸브를 Fig.3에 나타낸 바와 같이 開放狀態 持

續時間 t_1 및 閉鎖狀態 持續時間 t_2 를 임의의 값으로 설정하여 계속적으로 操作시킬 수 있는 밸브制御器를 設計, 製作하여 사용하였다.

切換밸브 開放狀態에서 管路上流端 및 下流端에 설치된 어큐레이터내의 壓力를 소정의 값으로 설정하여 管路內 흐름이 定常流가 되게 한 後 밸브制御器로 切換밸브를 操作하여 實驗管路에 流體 過渡現象을 발생시킨다.

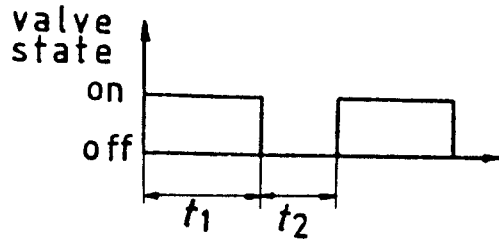
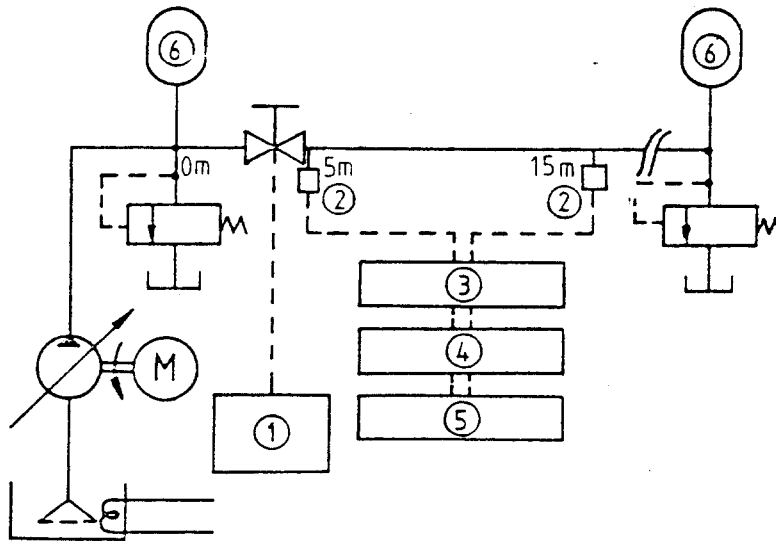


Fig.3 Valve operating state



- | | |
|-----------------------|----------------|
| 1.valve controller | 4.memory scope |
| 2.pressure transducer | 5.X-Y plotter |
| 3.strain amplifier | 6.accumulator |

Fig.2 Schematic diagram of experimental apparatus

이 때의 壓力變動을 밸브 下流側의 각 壓力測定지점에 설치한 壓力變換器로 計測하고, 그 信號를 스트레인增幅器, 메모리스코프를 거쳐 X-Y플로터에서 기록하였다. 밸브 開放持速時間 t_1 과 閉鎖持續時間 t_2 는 밸브의 開閉에 소요되는 時間에 비하여 상당히 길다고 간주하여, t_1, t_2 의 값은 메모리스코프상에 기록된 壓力波形으로부터 測定하였다.

3. 數值解析

Fig.1 과 같은 管路모델에서 管路內의 흐름을 1次元 흐름으로 가정한 경우의 運動方程式과 連速方程式은 다음과 같다.

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} + g \cdot h_f = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + V \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

여기서 V 는 管路內平均流速, t 는 時間, x 는 管路上의 軸方向 거리, g 는 重力加速度, H 는 壓力水頭, h_f 는 管路 單位길이당 壓力損失水頭, a 는 管路內 壓力波의 傳播速度를 나타낸다. 위의 두 式을 特性曲線法의 手法에 의하여 常微分方程式으로 변환하고, 特性曲線 C^+, C^- 線上에서 差分化하면 다음 式으로 된다.

$$C^+ : H_P = C_P - B \cdot Q_P \quad (3)$$

$$C^- : H_P = C_M + B \cdot Q_P \quad (4)$$

여기서 $C_P = H_A + B \cdot Q_A - h_f$

$$C_M = H_B - B \cdot Q_B + h_f$$

이고, $B = a/(gA)$, A 는 管路斷面積, Q 는 流量, 첨자 A, B, P 는 각각 特性曲線上의 格子點을 나타낸다.

本 實驗에서는 對象流體의 粘度가 상당히 높아서 管路內흐름이 완전히 層流領域이며, 따라서 h_f 의 계산에는 管路斷面上의 流速分布를 고려한 非定常層流 壓力水頭 損失式의 高速計算法⁽¹⁾을, 空泡體積의 計算에는 가스離散化모델⁽²⁾을 사용한다. (附錄參照)

計算은 切換밸브가 全開狀態이고 管路內흐름이 定常流인 管路境界條件에서 시작한다. 이 때 管路上의 壓力水頭勾配는 定常 管摩擦 損失水頭 및 밸브에서의 定常 損失水頭를 고려하여 결정한다. 切換밸브 開閉에 소요되는 시간은 Fig.3 에 나타난 밸브 開放 및 閉鎖 持續時間 t_1, t_2 에 비하여 매우 짧으므로 本 研究에서는 切換밸브의 開閉가 순간적으로 일어나는 것으로 간주한다. 切換밸브가 閉鎖된 상태에서는 管路가 切換밸브를 境界로 하여 두 구간으로 나누어 지므로, 이 두 구간의 管路를 별개의 것으로 간주하여 각각의 管路에 대하여 上記의 特性曲線法을 적용하여 計算을 수행한다. 어느 시점에서 切換밸브를 急 開放했을 때의 切換밸브에 대한 境界條件을 Fig.4 에 나타내었다. 이 때 밸브에서의 壓力水頭 및 流量은 定常狀態의 오리피스식인 式(5)와 Fig.4의 管路①에서 C^+ 선상의 式(3), 管路②에서 C^- 선상의 式(4)를 연립으로 풀어서 구한다.⁽³⁾

$$Q_{P1} = Q_{P2} = \text{sign}(C_{P1} - C_{M2}) \frac{Q_0}{\sqrt{\Delta H_0}} \sqrt{|H_{P1} - H_{P2}|} \quad (5)$$

式(5)에서 첨자 1, 2 는 Fig.4 의 管路①, ②를 나타내며 ΔH_0 및 Q_0 는 각각 밸브 全開時 밸브 前後의 壓力水頭差 및 定常流量을 나타낸다.

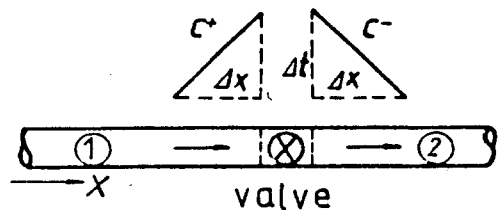


Fig.4 Boundary condition of the directional control valve

4. 實驗結果 및 考察

Fig. 5 (a), (b)는 切換밸브의 1회操作(단지切換밸브의 急閉鎖로 管路內흐름을 정지시킴)과 反復操作(밸브 制御器로 밸브의 閉鎖, 開放操作을 反復함)에 따른 過渡時의 管路內 壓力波形的 一例를 나타낸 것으로 (a)는 壓力測定 지점이 밸브직후 ($x = 5\text{ m}$), (b)는 管路 중앙지점 ($x = 15\text{ m}$)인 경우이다. 이 때 上流端 定壓탱크壓力 $P_0 = 1.15\text{ MPa abs}$, 下流端 定壓탱크壓力 $P_r = 0.3\text{ MPa abs}$, 初期 定常流速 $V_0 = 2.12\text{ m/s}$ 로 설정하였다. Fig. 5에서

①은 切換밸브를 1회操作한 경우로 切換밸브 閉鎖에 의해 밸브 直後에 空洞이 발생하고, 이 空洞은 管路內 油柱가 逆流함에 따라서 마침내 消滅하여 再結合壓力 上昇波形(1회째 再結合)이 나타나며, 그 후 점차로 壓力波가 消滅되는 과정을 나타내고 있다. Fig. 5에서 ②, ③, ④는 管路內의 流動條件을 ①과 동일한 狀態로 두고 밸브 制御器를 사용하여 切換밸브의 閉鎖持續時間 t_2 를 점점 짧게한 경우(이 때 t_1 은 t_2 보다 충분히 길게 설정하였음)의 壓力波형이다. 즉, ②는 管路內의 油柱가 2회째 再結合할 때에 切換밸브를 開放한 경우이고, ③은 2

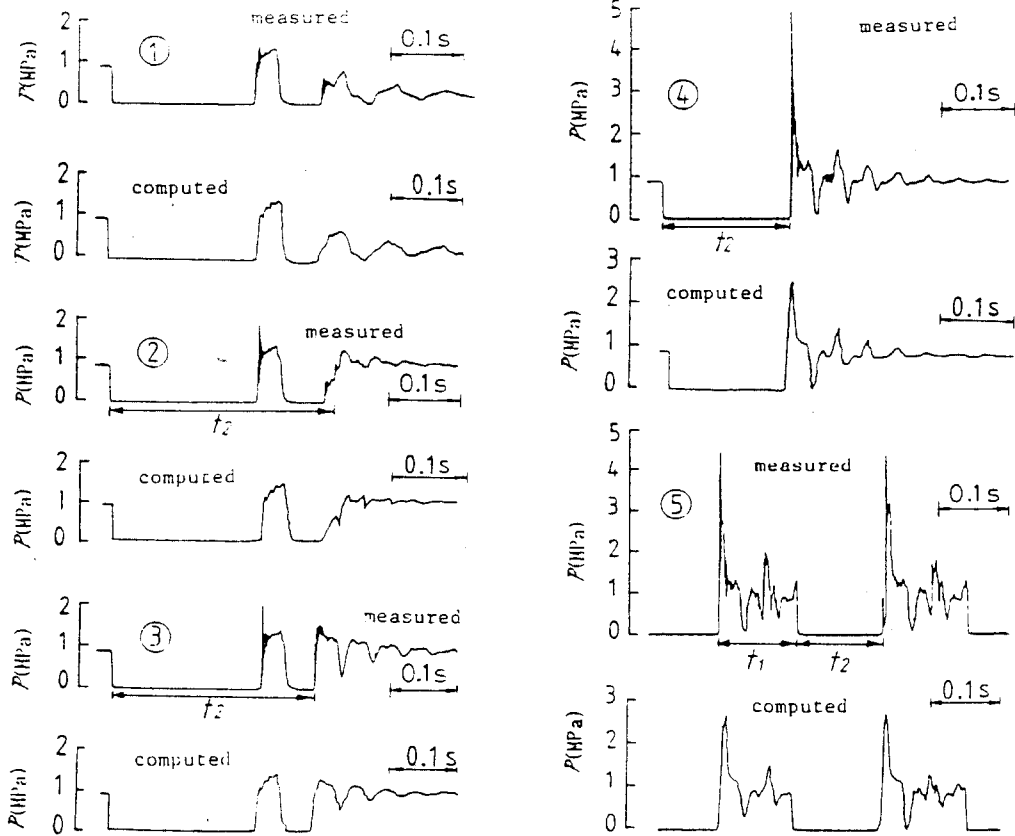


Fig. 5(a) Comparison of experimental results with computed results ($P_0 = 1.15\text{ MPa abs}$, $P_r = 0.3\text{ MPa abs}$, $V_0 = 2.12\text{ m/s}$, $x = 5\text{ m}$)

回째 再結合 直前に 切換밸브를 開放한 경우이며, ④는 t_2 를 더욱 짧게하여 1회째 再結合 以前の 캐비테이션 持續狀態에서 切換밸브를 開放한 경우이다. 여기서 ②, ③의 경우는 切換밸브 開放時의 壓力上昇値가 切換밸브 1回操作時 ①와 비슷한 정도이나, ④의 경우는 切換밸브 1回操作時 壓力上昇値의 數倍에 달하는 衝擊的인 壓力이 발생함을 나타내고 있다. 또 ④의 경우는 ②, ③의 경우에 비하여 매우 큰 衝擊音이 수반되었다. Fig.5 ⑤는 ④에서와 마찬가지로 1회째 再結合 이전에 切換밸브를 開放하되 ④에 비하여 밸브 開放持續時間 t_1 을 밸브 閉鎖持續時間 t_2 와 비슷한 정도로 하여 切換밸브를 反復操作한 경우의 壓力波形이다. 이

경우 每 t_1 에서의 壓力波形은 비교적 再現性이 양호하였으며, 그 때의 衝擊的인 壓力上昇値는 t_1 값에 관계없이 ④의 경우에서와 同程度의 값을 나타내었다. 또한 Fig.5 ①~⑤에는 實驗値와 함께 特性曲線法을 사용하여 얻은 計算結果도 나타내었다. 이들 각각의 경우 計算値는 實驗値와 비교적 잘 일치함을 알 수 있다. 그러나 ①~⑤의 壓力波形(實驗値)에는 제1回 再結合 初期에 극히 단시간 동안 尖頭波가 기록되어 있으며, 특히 ④, ⑤의 경우는 絶對値가 매우 큰 尖頭波가 나타나 있지만 計算結果에는 이러한 尖頭壓力波는 空洞의 消滅 末期에 管路內의 微小氣泡가 급격히 崩壞함에 起因하는 것으로 생각된다.⁽⁴⁾

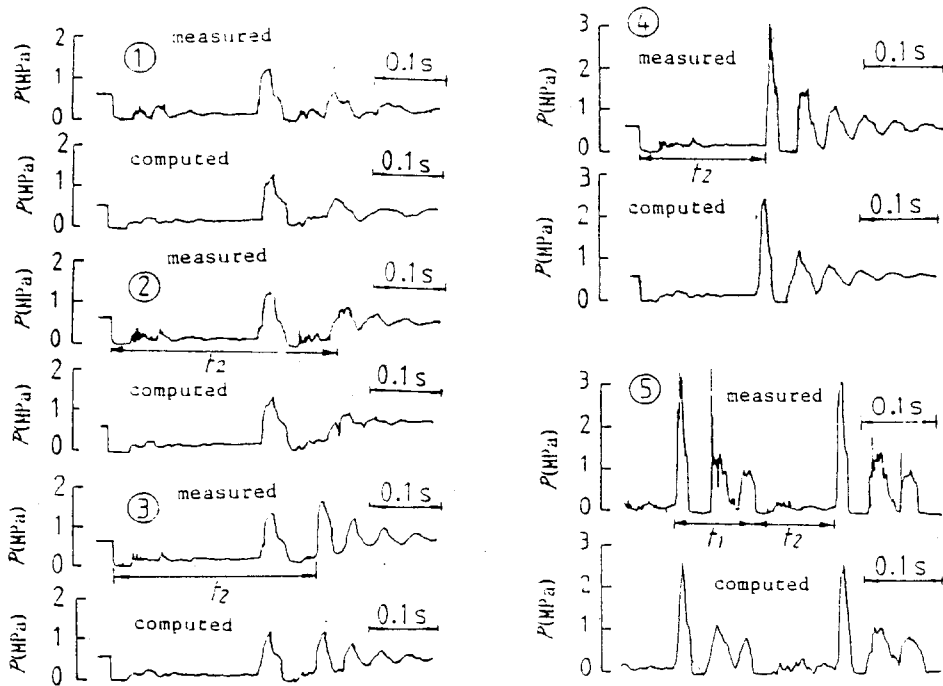


Fig. 5 (b) Comparison of experimental results with computed results ($P_0 = 1.15$ MPa abs, $P_r = 0.3$ MPa abs, $V_0 = 2.12$ m/s, $x = 15$ m)

本 研究에서 행하는 特性曲線法에 의한 計算에서는 微小氣泡의 거동이 고려되지 않으며, 따라서 여기서는 尖頭壓力波의 計算은 불가능하다.

앞의 Fig.5 ①~⑤의 각 壓力波形을 비교해 보면 ④, ⑤의 경우에는 ①, ②, ③의 경우에서 보다 매우 큰 衝擊壓力이 발생하며 그 원인을 流速 및 空洞體積의 變化를 통하여 考察하기로 한다. Fig.5에서 切換밸브 開放時에 絶對值가 매우 큰 衝擊壓力이 발생하는 ④의 경우와, 그다지 큰 衝擊壓力이 발생하지 않는 ③의 경우를 선택하여 過渡時의 壓力, 平均流速 및 空洞體積의 變化에 대한 計算值를 Fig.6에 나타내었다. Fig.6(a)는 Fig.5 ③의 경우에 대한 計算值 ($x = 5 m$)로, 切換밸브가 개방되는 시

기는 空洞이 존속하는 시기이기는 하지만 Fig. 6(a)③에 나타낸 바와 같이 空洞體積이 微小하므로 밸브 開放에 따른 流速변화도 Fig.6(a)②에서와 같이 근소하며, 따라서 그다지 큰 壓力上昇이 일어나지 않는다. 이에 반하여 Fig.6(b)에서는 切換밸브 閉鎖時기가 油柱의 1회째 再結合 이전이며, 따라서 이때는 Fig.6(b)③에서와 같이 空洞體積이 상당히 커서 流速변화도 급격하며 (Fig.6(b)②), 급격한 壓力上昇이 발생함을 알 수 있다. 따라서 Fig.6(b)에서는 油柱가 分離한 後 자연적으로 再結合하는 경우(Fig. 5(a)①)와는 상당히 상이한 物理的인 상황이 발생하며, 급격한 空洞崩壞로 인하여 발생하는 衝擊壓力과 崩壞末期의 微小氣泡 消滅時의 尖頭

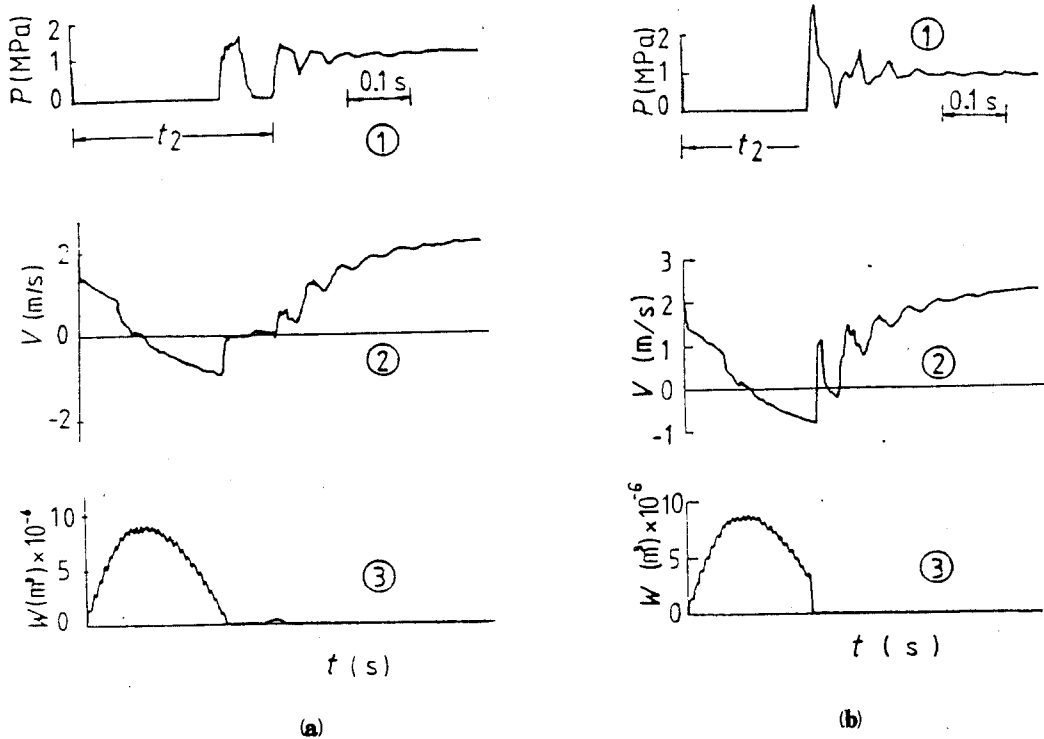


Fig.6 Computed values of pressure ①, mean velocity ② and cavity volume ③ (the same physical conditions with Fig.5(a) ③, $x = 5m$)

壓力波까지 겹쳐서 絶對值가 매우 큰 衝擊壓力과 衝擊音이 발생하는 것으로 생각된다.

Fig. 7은 切換밸브의 1回操作 및 反復操作에 따른 壓力上昇値와 管路內 初期 平均流速과의 關係를 나타낸 것이다. 下流側 定壓탱크 壓力 P_r 를 0.3MPa abs로 設定하고 上流側 壓力을 조절함으로써 流速을 變化시켰을 때의 밸브直後 ($x = 5m$)에서 측정된 再結合 壓力上昇値이다. 밸브 反復操作時의 밸브閉鎖持續時間 t_2 는 캐비테이션 持續時間(空洞 持續時間)의 약 80%로 設定하였으며, t_1 은 t_2 보다 충분히 긴 시간으로 設定하였다. 그림에서 □은 1回操作, ○은 反復操作時를 나타내며, 破線은 最高壓力上昇値를; 實線은 再結合壓力上昇値(메모리스크프상에 기록된 壓力波形을 時間軸 方向으로 擴大시켰을 때 高周波狀의 尖頭壓力上昇部分을 제외한 再結合 初期 壓力上昇値)를 나타낸다. 그림에서, 最高壓力上昇値(破線)는 流速變化에 따른 變化가 작는데 비하여 再結合壓力上昇値(實線)는 初期 平均流速이 증가할수록 증가하며, 이러한 경향은 切換밸브 反復操作時에 더욱 顕著해짐을 알 수 있다.

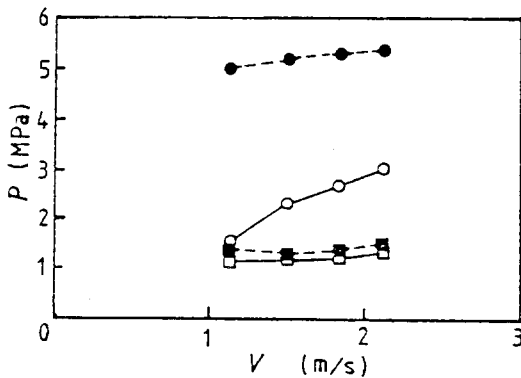


Fig. 7 Relation between flow velocity and pressure surge (○: repeated, □: non-repeated, ---: max. pressure, —: oil column recombination pressure, $P_r = 0.3 \text{ MPa abs}$, $x = 5m$)

Fig. 8은 切換밸브 反復操作時 t_2 가 管路內 過渡現象에 미치는 영향을 나타낸 것이다. 實驗은 下流端 定壓탱크의 壓力을 0.3MPa abs, 流速을 각각 1.15 m/s, 1.53 m/s, 2.12 m/s로 設定하여 행하였다. 이 때 t_1 은 t_2 보다 충분히 길게 設定하였다. 그림에서 縱軸은 切換밸브 反復操作時의 再結合壓力上昇値(P'_1)와 1回操作時의 再結合壓力上昇値(P_1)의 比를 나타내고 있다. 여기서 再結合壓力上昇値란 用語의 정의는 위의 Fig. 7에서와 같다. 그림에서 t_2 가 캐비테이션 持續時間보다 큰 領域에서는 P'_1/P_1 의 값이 1 정도이지만 t_2 가 캐비테이션 持續時間보다 짧은 領域에서는 P'_1/P_1 의 값이 顕著하게 커짐을 알 수 있다. 일반적으로 流體 管路系의 設計時에 고려하는 最高壓力値로는 上記의 P_1 값을 사용하고 있으나, 本 研究에서와 같이 反復操作되는 切換밸브를 갖는 管路系에서는 t_2 의 크기에 따라서는 Fig. 7 및 Fig. 8에 나타낸 바와 같이 P_1 의 數倍에 달하는 壓力이 발생할 수도 있으므로 本 研究에서 논의한 사항들은 管路設計時에 고려해야 할 중요한 因子가 됨을 알 수 있다.

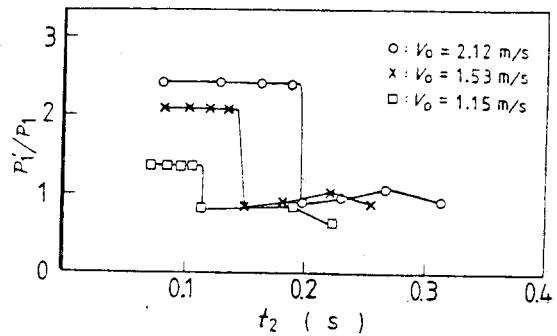


Fig. 8 Relation between t_2 and P'_1/P_1 ($P_r = 0.3 \text{ MPa abs}$, $x = 5m$)

5. 結 論

油壓管路에서 切換밸브의 1回操作 및 反復操作에 따라 발생하는 管路內 流體過渡現象에 따

른 壓力上昇現象에 대하여 實驗과 數値解析을 통하여 엄밀히 검토하였으며, 여기서 얻어진 結果를 要約하면 다음과 같다.

1. 切換밸브 反復操作時 管路內 流體過渡現象에 수반하여 絶對值가 매우 큰 衝擊壓力이 발생할 수 있으며, 이때의 最高壓力 上昇值는 切換밸브 1回操作時의 最高壓力 上昇值의 數倍에 달한다.

2. 切換밸브 反復操作時의 最高壓力 上昇值가 切換밸브 1回操作時보다 매우 큰 값으로 되는 경우는 밸브 閉鎖持續時間이 切換밸브 1回操作時의 캐비테이션 持續時間보다 짧은 경우이다.

3. 切換밸브 反復操作時 발생하는 絶對值가 매우 큰 衝擊壓力의 生成機構를 過渡時의 管路內 空洞體積 變化 및 平均流速 變化에 대한 考察을 통하여 합리적으로 설명하였다.

4. 切換밸브 反復操作時 流體過渡現象에 수반하여 발생하는 壓力上昇現象은 特性曲線法을 사용한 數値解析을 통하여 비교적 정확하게 예측할 수 있음을 확인하였다.

參考文獻

- 1) 香川利春 外 3人, 1983, “特性曲線法における非定常層流壓力損失の高速高精度計算法”, 日本機械學會論文集(B), 49卷 pp.2638-2644.
- 2) Wylie, E.B., 1984, “Simulation of Vaporous and Gaseous Cavitation”, Trans. of ASME, Journal of Fluids Engineering, Vol. 106.
- 3) Wylie, E.B. and Streeter, V.L., 1983, “Fluid Transient”, FEB Press, Ann Arbor, pp.31-65.
- 4) 藤川重雄, 赤松映明, 1983, “キャピテーション氣泡の拳動(實驗)”, 日本學術會議キャピテーションに関するシンポジウム論文集(第3回), pp.77-88.

附 録

特性曲線法에 의한 管路內 過渡現象 解析法

本 研究에서는 特性曲線法을 이용한 液柱分離 解析에서 管路內에 分布하는 가스가 計算斷面에 集中되어 있는 것으로 近似한 가스離散化 모델을 사용한다. 管路內의 計算斷面에는 計算始作時부터 微小氣泡(혹은 空洞)가 존재하며 氣泡內에는 蒸氣와 가스가 混在하고 있다고 가정한다. 또한 가스는 等溫變化한다고 가정한다. 따라서 다음의 관계식들이 얻어진다.

$$P_g W = N_B k T \quad (\text{부-1})$$

$$H = (P_V + P_g) / \gamma \quad (\text{부-2})$$

여기서 P_g 는 氣泡內 가스의 分壓, W 는 空洞의 體積, N_B 는 氣泡內 가스의 몰數, k 는 氣體定數, T 는 絶對溫度, P 는 絶對壓力, P_V 는 作動流體의 蒸氣壓, γ 는 作動流體의 比重量을 나타낸다.

空洞의 體積變化는 計算斷面에서의 連續方程式인 식(부-3)으로 나타낼 수 있다.

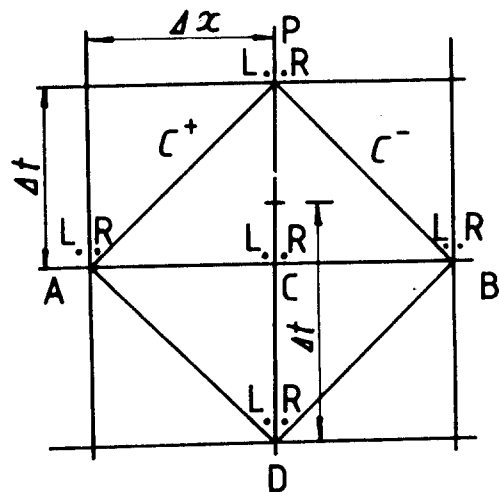


Fig.9 Grid for gas discrete model

$$\frac{dW}{dt} = Q_R - Q_L \quad (\text{부-3})$$

여기서 t 는 時間, Q_R 및 Q_L 은 각각 計算斷面 上下流側의 流量을 나타낸다.

式(부-3)의 數值積分에는 Fig.9에 나타낸 特性格子上的 格子點 P, D 사이에서 內插에 의해 式(부-3)을 差分化한 式(부-4)를 사용한다.

$$W_P = W_D + 2\Delta t \{ \psi(Q_{PR} - Q_{PL}) + (1-\psi)(Q_{DR} - Q_{DL}) \}$$

$$0 < \psi \leq 1, \quad \psi = \Delta t' / (2\Delta t) \quad (\text{부-4})$$

여기서 W_P 및 W_D 는 각각 Fig.9의 格子點 P, D에서의 氣泡體積, ψ 는 內插比, Q_{PR} , Q_{PL} , Q_{DR} , Q_{DL} 는 각각 格子點 P, D에서의 上下流側 流量을 나타낸다.

이상의 式(부-1), 式(부-2) 및 式(부-4)와 本文의 式(3), 式(4) 및 式(5)를 연립으로 풀어 H_P , Q_{PR} , Q_{PL} , W_P 를 구한다.