

내연기관 CRANKSHAFT의 응력계산

Stress Calculation for I.C Engine Crankshaft

고 병 식*
Byeong Sik Ko

1. 서 론

내연기관에서 crankshaft는 piston에 작용하는 수직 gas force 및 관성력을 회전력으로 바꾸어 주는 역할을 한다. 그러므로 engine 작동중 높은 부하를 반복적으로 받기 때문에 이에 견딜 충분한 stiffness를 유지해야 한다.

Engine의 stroke 운동시에 gas force와 관성력이 변하고 crankshaft의 형상이 복잡하므로 실제적으로 응력계산은 간단하지 않다.

여기에서는 crankshaft에 작용하는 하중과 반력을 계산하고 crankshaft의 stress 및 safety factor를 계산하여 crankshaft를 설계하는 방법을 설명하고자 한다. 근래 FEM에 의한 stress analysis를 많이 수행하나, loading condition을 주기 위해서는 classical method에 의해서 구할 수 있다. 이외에 FEM에 의한 modal analysis와 결합시에도 loading condition과 boundary condition의 정확을 기하기가 어려운 문제도 있다. Classical method에 의한 analysis결과에 의해 상당한 stress concentration이 발생될 때에만 detail design을 위해 FEM에 의한 analysis가 필요하다.

2. 계산절차

Crankshaft의 경우 bending과 torsion을 동시에 받는 복합하중 상태이므로 이의 해석을 위해서는 bending stress와 torsional stress를 각각 계산하여 equivalent stress를 구해야 한다. Bending stress와 torsional stress를 계산하기 위해 crank angle에 따른 cylinder 내부압력이 실험적 또는 이론적으로 계산되어야 한다. 또한 crankshaft에 부착된 damper의 damping coefficient, 기타 alternator나 bearing에 의한 damping coefficient도 계산되어야 한다. Fig. 1은 crankshaft의 전체적인 응력계산절차를 나타낸다.

3. BENDING STRESS

Bending stress계산을 위해서는 각각의 cylinder가 firing order에 따른 phase만이 차이 날 뿐 720도를 주기로 관성력과 gas force가 반복되므로 1개의 crankthrow에 대해서만 해석한다.

Crankshaft의 Bending stress analysis를 위해 다음과 같은 가정을 한다.

- single crankthrow unit

* 정회원

- 3 point loading 상태인 simply supported beam
- 주위 crank의 force, moment 무시

3.1 GAS FORCE 및 관성력

Piston에 작용하는 gas force F_p 는

$$F_p = (\text{area of piston}) \times (\text{expected pressure at specific rpm})$$

$$= \pi/4 * D^2 * P(\theta) \dots\dots\dots (1)$$

이고, piston에 작용하는 inertia force F_i 는

$$F_i = (\text{reciprocating mass} + \text{rotating mass}) \times (\text{piston acceleration})$$

$$= -M_T * R * \omega^2 * (\cos \theta + \lambda \cos 2\theta) (2)$$

- 여기에서 θ : crank angle
- M_T : reciprocating mass + rotating mass
- ω : angular velocity
- R : half stroke
- L : conrod의 center 간 거리
- D : piston의 단면 직경
- λ : R/L 이다.

3.2 NOMINAL BENDING STRESS

Gas force 및 관성력에 의한 bending stress 계산은 crankshaft를 simply supported beam으로 가정하여 total force는 pin의 중심점에 적용한다. 보통 bending stress를 계산하는 부위는 crankweb mid-length, crankpin fillet과 crankpin mid-length이다. Gas force와 관성력에 의한 반력을 구하여 위의 3부위에서의 bending moment M 을 구한 후 nominal bending stress는 다음과 같이 구한다.

$$\sigma_{\text{nominal}} = M/S \dots\dots\dots (3)$$

- 여기에서 M : bending moment
- S : section modulus (=section polar moment/max. distance)이다.

3.3 FORM FACTOR

Crankweb 및 fillet 부위의 stress concentration factor는 Lowell의 계산방식 또는 Arai의 계산에 의해 구해진다.^(1,2)

Crankpin mid-length 부위의 stress concentration factor는 oil hole에 의한 notch effect가 나타나며, 이 역시 Lowell의 계산방식에 의해 구해진다. 이에 따른 fatigue notch factor β 는 다음과 같이 구한다.

Notch sensitivity η 는

$$\eta = (\beta - 1) / (\alpha - 1) \dots\dots\dots (4)$$

이므로

$$\beta = 1 + \eta(\alpha - 1) \dots\dots\dots (5)$$

이고 notch sensitivity η 는 재료에 따라 달라진다.

위의 fatigue notch factor β 를 구해진 bending stress와 앞으로 계산될 torsional stress에 곱하여 notch effect를 고려한 bending stress 및 torsional stress를 구한다.

4. TORSIONAL STRESS ANALYSIS

4.1 Gas force 및 관성력에 의한 Torque

4.1.1 Gas force에 의한 pressure Torque

Gas force에 의한 Torque T_p 는 다음과 같이 나타난다.

$$T_p(\theta) = P(\theta) * A * R * (\sin \theta + 1/2 \lambda \sin 2\theta) \dots\dots\dots (6)$$

여기서 $P(\theta)$: crank angle θ 에 대한 cylinder 내압

- A : $\pi/4D^2$: bore section area
- R : half stroke : $\lambda = R/L$
- L : conrod center 간 거리이다.

4.1.2 관성력에 의한 Inertia Torque
관성력에 의한 inertia torque T_i 는

$$T_i(\theta) = - M_T * R * \omega^2 * (\cos \theta + \lambda \cos 2\theta) *$$

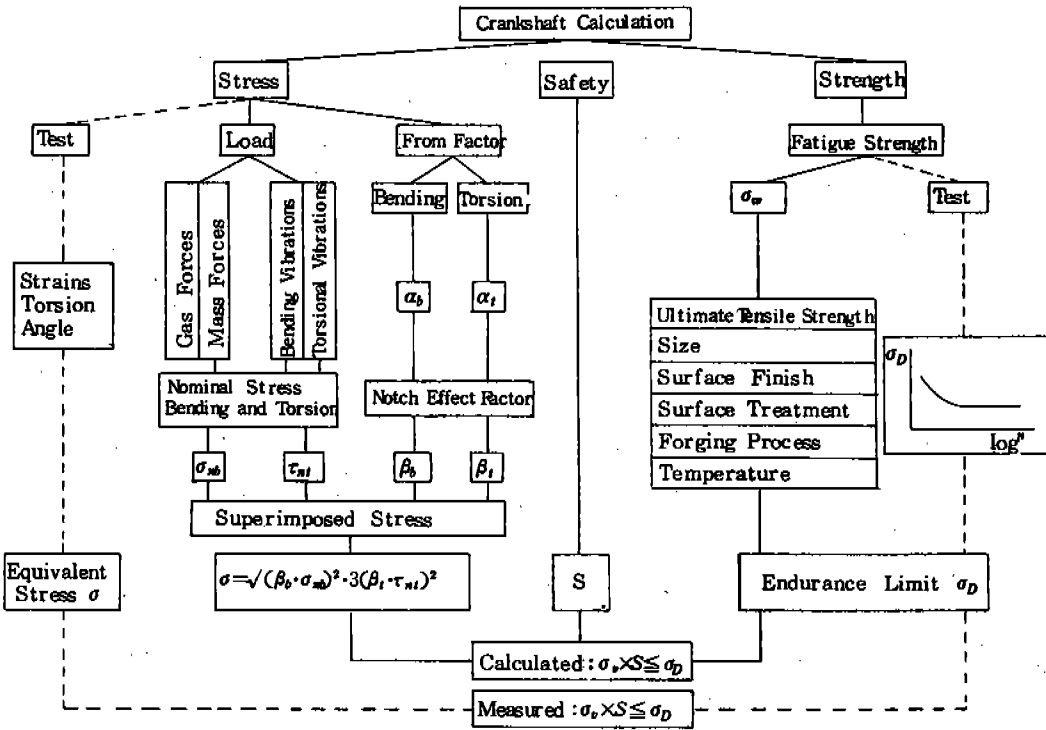


Fig.1 Procedure for Stress Analysis of the Crankshaft

- σ_v : Equivalent stress
- σ_w : Fatigue strength
- σ_D : Endurance limit
- σ_a : Alternating stress
- σ_{nb} : Nominal bending stress
- n : Number of cycles

- τ_{nt} : Nominal torsional stress
- α_b : Stress-concentration factor (bending)
- α_t : Stress-concentration factor (torsion)
- β_b : Notch effect factor (bending)
- β_t : Notch effect factor (torsion)
- s : Safety-factor

$$R * (\sin \theta + 1/2 \lambda \sin 2 \theta) - M_T * R * \omega^2 * (-0.25 \lambda \sin \theta + 0.5 \sin 2 \theta + 0.75 \lambda \sin 3 \theta + 0.25 \lambda \sin 4 \theta) \dots \dots \dots (7)$$

expansion의 경우에는 half order의 형태가 나타난다(1/2, 3/2, 5/2, etc.) 4stroke engine gas torque의 Fourier series expansion의 경우에는 다음과 같은 형태를 갖는다.

전체 왕복 질량 M_T 는

$$T_P = A_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} \{ A_n \cos(n\theta/2) + B_n \sin(n\theta/2) \} \dots \dots \dots (8)$$

$$M_T = M_P + M_S$$

여기서 M_P : piston assembly mass
 M_S : conrod small end mass 이다.

여기서 $A_n = 1/2\pi \int_0^{4\pi} T_P(\theta) \cos(n\theta/2) d\theta$
 $n = 0, 1, 2, \dots$
 $B_n = 1/2\pi \int_0^{4\pi} T_P(\theta) \sin(n\theta/2) d\theta$
 $n = 1, 2, \dots$ 이다.

4.1.3 Fourier series expansion
 4 stroke engine의 경우에는 gas torque는 720 도의 주기를 가지며, 2 stroke engine의 경우에는 360 도의 주기를 갖는다. 그러므로 4 stroke engine gas torque의 Fourier series

이 때 $P(\theta)$ 는 relative pressure이다.
 Inertia torque는 주기가 360도이며 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$T_i = A'_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} \{ A'n \cos(n\theta) + B'n \sin(n\theta) \} \dots\dots\dots (9)$$

여기서 $A'n = 1/\pi \int_0^{2\pi} T_i(\theta) \cos(n\theta) d\theta$
 $n = 0, 1, 2, \dots$

$B'n = 1/\pi \int_0^{2\pi} T_P(\theta) \sin(n\theta) d\theta$
 $n = 1, 2, \dots$ 이다.

Eqns (8), (9)를 결합하면 total torque T_t 는

$$\begin{aligned} T_t &= T_P + T_i \\ &= (A_0/2 + A'_0/2) + \sum_{n=1}^{\infty} \{ A'n \cos(n\theta/2) + A'n \cos(n\theta) + B'n \sin(n\theta/2) + B'n \sin(n\theta) \} \\ &= A''_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} \{ A''n \cos(n\theta/2) + B''n \sin(n\theta/2) \} \\ &= A''_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} Cn \sin(n\theta/2 + \phi n) \dots (10) \end{aligned}$$

여기서 $Cn = \sqrt{(A''n)^2 + (B''n)^2}$
 $\tan \phi n = A''n/B''n$
 ϕn 은 phase angle 이다.

보통 engine torque 의 Fourier expansion 에서는 $n = 24$ 까지만 사용한다.

4.2 MODE 해석

Crankweb 및 counterweight 의 inertia 를 구하기 위해 과거에는 수작업을 행 하였으나, 근래에는 CAD system 의 사용으로 간단하고 정확하게 구할 수 있다. Crankweb 와 counterweight 외에 crankpin mass, conrod bigend mass 및 translational mass 에 의한 영향도 lumped mass 로 고려하여 total moment of inertia 를 구한다. Crankthrow 의 torsional stiffness 를 구하기 위한 classical determination method 로서는 Carter's formula 와 Ker Wilson's formula 가 가장 많이 사용한다.

Carter's formula :

$$Le = D^4 \{ [(2a + 0.8b)/(D^4 - D_1^4)] + \{ 0.75c/(d^4 - d_1^4) \} + \{ 1.5R/(bw^3) \} \} \dots\dots\dots (11)$$

Ker Wilson's formula :

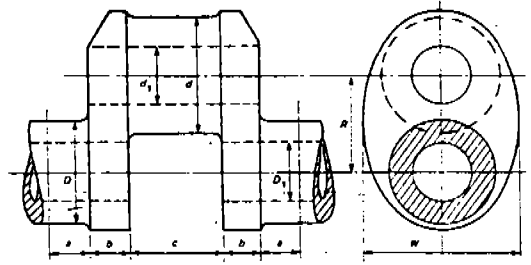


Fig.2 Crankthrow Parameters for Calculating Torsional Stiffness

- L_e : equivalent length of shaft, D outside and D_1 inside diameter
- D : outside diameter of shaft journal
- D_1 : inside diameter of shaft journal
- d : diameter of crankpin
- d_1 : diameter of hole in crankpin
- a : half journal length
- b : web thickness
- c : crankpin length
- W : width of crank webs
- R : crank radius

$$Le = D^4 \{ [(2a + 0.4D)/(D^4 - D_1^4)] + \{ (c + 0.4d)/(d^4 - d_1^4) \} + \{ (R - 0.2(D + d))/(bw^3) \} \} \dots\dots (12)$$

위의 각 parameter 들은 Fig. 2 에 나타난 parameter 들이다.

위의 식에서 Le 는 main bearing center 간 의 crankthrow 와 동일한 stiffness 를 갖는 직경 D 인 solid shaft 의 길이이다. 이에 따라 stiffness Kt 는 다음과 같이 구해진다.

$$Kt = I_p * G / Le \dots\dots\dots (13)$$

- 여기에서 I_p : shaft section polar moment of inertia
 $= \pi * D^4 / 32$
- D : journal diameter
- G : shaft material shear modulus

Damping 의 경우 기존의 engine 은 modal testing 에 의한 damping factor 를 구할 수 있으며, 그렇지 않은 경우에는 damping coefficient 를 수식으로 구하여야 한다.^(3,4)

전체적으로 위의 절차에 따라 crankshaft

system은 그림 3에 제시한 mass-spring-damper system으로 귀착된다. 이 system의 eigenvalue와 eigenvector를 구하여 1-node mode와 2-node mode shape를 구한다. 일반적으로 node는 flywheel과 마지막 cylinder 간에서 나타낸다.

4.3 TORSIONAL STRESS

Shaft에 나타나는 shear stress q_{total} 은 mean transmission stress q_{mt} 와 alternating vibratory stress q_{vib} 의 합으로 나타낸다.

$$q_{total} = q_{mt} + q_{vib} \dots\dots\dots (14)$$

여기에서 mean transmission stress q_{mt} 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$q_{mt} = T_{out} / (\pi / 16 * D_{min}^3) \dots\dots\dots (15)$$

여기서 T_{out} : output torque or (no. of cylinder) \times (Zeroth term in Fourier series expansion)

D_{min} : minimum shaft diameter

아래의 계산절차는 alternating vibratory stress q_{vib} 를 계산하기 위한 방법을 제시한다.

4.3.1 General theory

Free end의 unit degree amplitude에 대해 각각의 shaft section (span)에서의 stress는 다음과 같이 나타낼 수 있다. (3,5,6)

$$q^* = \Sigma (J_q \omega^2 \beta_q) * \pi / 180 / (\pi / 16 * D_{min}^3) \dots\dots\dots (16)$$

여기서 $\Sigma (J_q \omega^2 \beta_q)$ = torque per radian 이다.

만일 q_{max} 이 가장 큰 stress라면 해당 span에서의 stress는

$$\pm q_{max} = \pm \theta_1 * q^*_{max} \dots\dots\dots (17)$$

여기서 $\pm \theta_1$ = crankshaft free end에서의 'half total swing' 이다.

4.3.2 Vibration amplitudes at resonance

Damping action은 많은 factor에 의해 결정되므로, engine damping이 존재하는 eng-

ine system의 stress estimation은 근사치만을 구할 수 있다. 가장 적은 error를 수반하는 stress prediction formula는 Ker Wilson's square root formula와 Shanon's formula이며, 여기에서는 Ker Wilson's square root formula를 사용한다.

Vibration amplitude at mass No. 1:

$$\pm \theta_1 = 500 \sqrt{(\theta_s / q^*_{n})} \text{ [degrees]} \dots\dots\dots (18)$$

여기서 q^*_{n} = stress at node per degree amplitude at mass No. 1

θ_s = equivalent static deflection at mass No. 1 [degree] 이며 θ_s 는 다음과 같은 식에서 유도된다.

$$\theta_s = 180 / \pi * |T_m| A R_o \Sigma \vec{\beta} / \omega_n \Sigma (J \beta^2) \text{ [degrees]} \dots\dots\dots (19)$$

여기서 $|T_m| A R_o$ = m-th order resultant component of tangential torque

$\Sigma \vec{\beta}$ = phase-vector sum
 ω_n = natural frequency
 $\Sigma (J \beta^2)$ = equivalent engine inertia
 $[= J_p \beta_p^2 + \Sigma_{cyl} (J \beta^2) + J_f \beta_f^2]$
 J_{cyl} = inertia per cylinder
 J_p = pulley inertia
 J_f = flywheel inertia

Stress q_n 은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$q_n = \theta_1 q^*_{n} \text{ or } q_n = 500 \sqrt{(q^*_{n} \theta_s)} \dots\dots\dots (20)$$

여기서 q^*_{n} = stress at node per degree amplitude at mass No. 1이다. 이 때 β 는 engine system의 modal vector를 나타낸다.

4.3.3 Vibration amplitudes at non-resonant speeds (finite damping case)

만일 N_c = critical running speed = F/n
 N = speed on flank of critical
 θ_s = equivalent static amplitude
 F : natural frequency of engine

n : critical speed order number 이면
 Flank amplitude θ_n 은 다음과 같이 구할수
 있다.

$$\pm \theta_n = \frac{1}{\sqrt{[1/\theta_s^2 * \{1 - (N/N_c)^2\}^2 + \{1/\theta_1^2 \text{ res} * (N/N_c)^2\}]} \text{ [degrees]} \quad (21)$$

여기서 θ_s = equivalent static ampli-
 tude

$\theta_1 \text{ res}$ = vibration amplitude
 [degrees] at resonance
 peak 이다.

이 방법은 resonance condition에서 벗어난
 상태에서 적용한다.

$$(N/N_c \leq 0.85 \text{ or } N/N_c \geq 1.15)$$

Non-resonant speed에서 stress는 아래의
 수식으로 나타낼 수 있다.

$$q_n = q_{\text{res}} * \theta_{1n} / \theta_{1 \text{ res}} \quad (22)$$

5. FATIGUE STRENGTH

5.1 ENDURANCE LIMIT

먼저 mean endurance limit \bar{S}_e' 는

$$\bar{S}_e' = \text{UTS} \times (\text{endurance limit ratio}) \quad (23)$$

이지만 Rotating-beam specimen의 결과를 직
 접적으로 실제의 기계부품에 사용하는 것은
 어렵기 때문에 위의 mean endurance limit를
 modify하여 기계부품의 특성에 맞는 endur-
 ance limit를 구한다.⁽⁷⁾

$$S_e = k_a * k_b * k_c * k_d * k_e * k_f * S_e' \quad (24)$$

여기서 S_e = endurance limit of mechani-
 cal element

S_e' = endurance limit of rotating-
 beam specimen

k_a = surface factor

k_b = size factor

k_c = reliability factor

k_d = temperature factor

k_e = modifying factor for stress
 concentration

k_f = miscellaneous-effects factor

만일 계산된 stress 값에 β 값을 곱했을 경
 우에는 $k_e = 1$ 로 사용된다. crankshaft의 경
 우 rolling force에 의한 endurance limit 증
 가도 고려해야 한다. Full fillet rolling 시
 endurance limit는 아래와 같이 나타난다.⁽⁸⁾

$$\sigma_d = \pm K \{ 0.42 * \text{UTS} + 39.3 \} \times \{ 0.264 + 1.073 * D_p^{0.2} + (785 - \text{UTS}) / 4900 + 196 / \text{UTS} * \sqrt{R} \} \quad (25)$$

여기서 UTS : Ultimate Tensile Strength
 [MPa]

D_p : pin diameter [mm]

R : fillet radius [mm]

K : production process factor
 0.93 for steel casting
 1.0 for free form forging
 1.05 for continuous grain
 flow forging and drop forging

5.2 SAFETY FACTOR

앞서 계산한 bending stress와 torsional
 stress를 이용하여 Von-Mises stress를 계산
 하면 다음과 같다.

$$\sigma_{\text{equiv}} = \pm [\sigma^2 x + 3 \tau^2 yz]^{1/2} \quad (26)$$

$$\sigma_x = f_b \text{ mean} + f_b \text{ alt}; \tau_{yz} = f_s \text{ mean} + f_s \text{ alt} \quad (27)$$

$$f_{\text{equiv mean}} = 1/2 (\sigma_{\text{equiv max}} + \sigma_{\text{equiv min}})$$

$$f_{\text{equiv alt}} = 1/2 (\sigma_{\text{equiv max}} - \sigma_{\text{equiv min}})$$

보통 safety factor를 구하기 위해 사용하는
 criterion인 modified Goodman diagram은 실
 험 data중 가장 안전한 data만을 사용한 것이
 며, Gerber parabolic diagram은 test data의
 mean path를 나타낸다.

Goodman diagram은 다음 두 방정식의
 combination이다.

$$\sigma_m / \text{UTS} + \sigma_a / \sigma_d = 1 \quad (28)$$

$$\sigma_m / \sigma_y + \sigma_a / \sigma_y = 1 \dots\dots\dots (29)$$

여기서 UTS = Ultimate Tensile Strength
 σ_d = endurance limit
 σ_y = yielding strength 이다.

Gerber parabolic diagram은 다음과 같다.

$$\sigma_a / \sigma_d + (\sigma_m / UTS)^2 = 1 \dots\dots\dots (30)$$

Gerber diagram과 같은 nonlinear theory 는 Test data의 mean path를 나타내기 때문에 failure를 예측할 때에는 더욱 유용하다. Safety factor를 구하기 위해서 safety factor를 n이라 하면 Goodman diagram사용시에는

$$n1 = \sigma / (\sigma(1 + \sigma_m / UTS)) \dots\dots\dots (31)$$

$$n2 = \sigma / (\sigma_m + \sigma_a) \dots\dots\dots (32)$$

에서 작은 값을 safety factor로 취하고 Gerber parabolic diagram이용시에는

$$\sigma_a / n / \sigma_d + (\sigma_m / UTS)^2 = 1 \dots\dots\dots (33)$$

에서 safety factor n을 구한다.

6. CUMULATIVE THEORY

Crankshaft와 conrod같이 rpm에 따라 mean stress와 alternating stress가 변하는 component의 수명예측을 위해서는 cumulative fatigue damage theory가 필요하다. n cycle동안 단일응력만을 받는 것이 아닌 n_1 cycle동안은 σ_1 , n_2 cycle동안은 σ_2 의 응력을 받는 물체를 가정할 때 safety factor를 예측하기가 어려워진다. 이 경우에 많이 쓰이는 이론식이 Palmgren - Miner cycleration summation theory 또는 Miner's rule 이다.

수학적으로 Miner's rule은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$n_1 / N_1 + n_2 / N_2 + \dots + n_i / N_i = 1 \dots\dots (34)$$

여기서 n : 응력 σ 가 가해지는 cycle수
 N : 응력 σ 가 가해질때의 life이다.
 위의 Miner's rule에 의해 engine의 전체적인 running기간 동안의 engine 수명을 예

측할 수 있다.

7. 계산결과

Maximum cylinder내압이 75 bar인 자동차용 engine에 대해 analysis를 수행한 결과 engine speed가 높아질수록 safety factor는 감소하는 추세를 나타낸다. Engine speed 3000 rpm에서 safety factor는 1.94, 4000

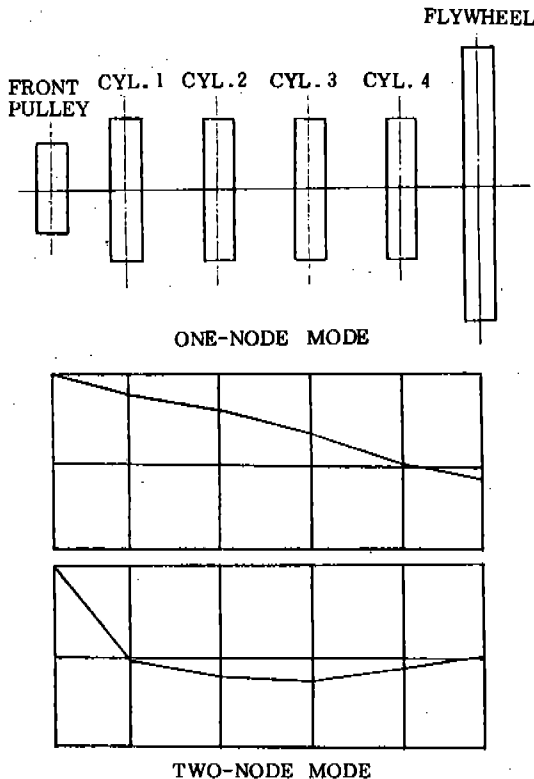


Fig.3 Modal Vectors in 1-Node, 2-Node Mode

rpm에서 safety factor는 1.57이며 6000rpm에서 safety factor는 1.30이다. 사용된 fatigue criterion은 Goodman criterion이며, 외곽의 포물선은 Gerber criterion이다. 그림 3은 1-node, 2-node mode에서의 modal vector를 나타내며, engine speed 3000, 4000, 6000rpm에 따라 crank fillet부위의 bending stress, torsional stress 및 safety factor를

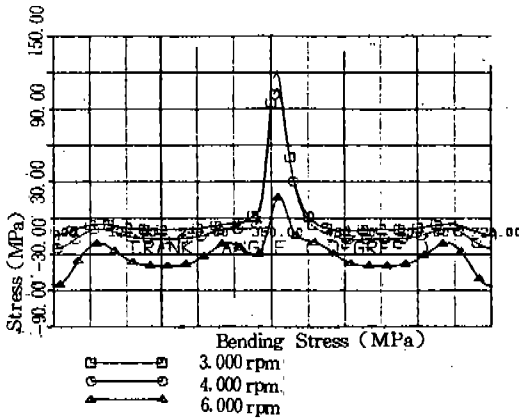


Fig.4 Bending Stress at the Several RPM

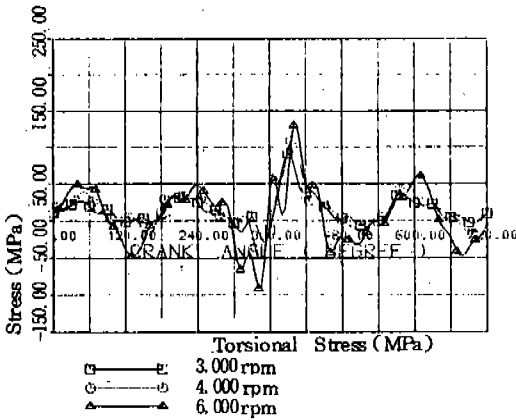


Fig.5 Torsional Stress at the Several RPM

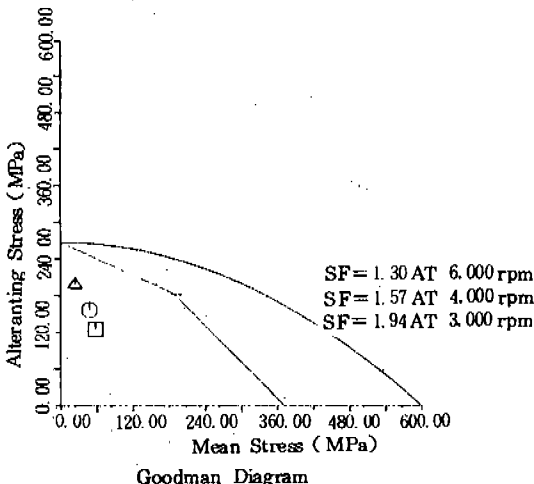


Fig.6 Goodman Diagram and Safety Factor

그림 4 ~ 그림 6에 나타내었다.

Crankshaft를 구성하는 재료의 Ultimate tensile strength(UTS)는 600 Mpa이며, endurance limit는 60 MPa이다.

본 계산에 사용된 engine의 IMEP는 다음과 같다.

RPM	IMEP(N/mm ²)
1000	0.8138
2000	1.2414
3000	1.3517
4000	1.3310
5000	1.0344
6000	0.3724

또한 사용된 각 parameter의 값은 다음과 같다.

- surface factor = 0.76 for machined surface-finish and UTS=600 MPa
- size factor = 0.87 : Dmin = 43 mm
- reliability factor = 1 : 50% reliability
- temperature factor = 1
- miscellaneous factor = 1

Fillet radius가 1.3 mm이고 UTS가 600 MPa인 crankshaft의 crankpin fillet 부위에서의 endurance limit는 continuous grain flow forging and drop forging인 경우 296 MPa이며, yielding stress는 372 MPa이다.

8. 결 론

1. 앞에서 전개한 bending 및 torsional stress 계산방법에 따라 해석하고자 하는 engine Crankshaft의 stress를 구할 수 있다.

2. 위의 방법에 따라 stress를 구한 후 detail design 및 analysis를 위해 앞서 구한 torsional stress를 applied torque로 변환시킨 후 FEM에 의한 stress계산 및 modal analysis를 수행할 수 있다.

3. Example에서와 같이 engine의 running RPM이 증가할수록 cylinder내압의 감소에 따라 bending stress의 mean stress의 al-

ternating stress는 감소한다. 그러나 cylinder 내압과 inertia load의 영향을 동시에 받는 torsional stress는 RPM이 증가하면 inertia load에 의한 영향이 증가하여 torsional stress는 증가한다.

4. 이러한 stress 해석의 결과에 따라 crankshaft의 design변경을 할 수 있는 data를 얻을 수 있고, 나아가서 crankshaft의 형상최적화를 기할 수 있다.

5. 전체적인 해석절차는 Holzer's tabulation method를 변형하여 사용했으며 향후 더 발전된 방법이 나오기를 기대한다.

REFERENCES

1. Chapin M. Lowell
The Crankshaft : Designing for Structural Strength and Fatigue Resistance
2. R. E. Peterson
Stress Concentration Factor
3. E. J. Nestorides (Ed.)
A Handbook on Torsional Vibration
Cambridge Univ. Press (1958)
4. LRC Lilly (Ed.)
Diesel Engine Reference Book
Butterworths (1985)
5. R. J. Harker
Generalized Methods of Vibration Analysis Wiley- Interscience Pub. (1983)
6. P. Kreuter and F. Pischinger
Status of Rules and Methods for Assessment of stresses in Crankshafts of I. C. Engines
SAE 851197 (1985)
7. Joseph E. Shigley and Larry D. Mitchell
Mechanical Engineering Design McGRAW-HILL (1983)

8. Tadashi Kamimura
Effects of Fillet Rolling on Fatigue Strength of Ductile Cast Iron Crankshaft SAE 852204(1985)

APPENDIX

Torque per radian $\Sigma(Jq \omega^2 \beta_q)$ 의 유도

Fig.7과 같은 multi-mass-spring system을 생각하자.

q-th mass의 acceleration이 a_q 라면 q-th mass가 받는 virtual external force F_q 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} M_1 \omega^2 a_1 + M_2 \omega^2 a_2 + \dots + M_q \omega^2 a_q \\ = M_1 \omega^2 a_1 [m_1 + m_2 a_2/a_1 + \dots + m_q a_q/a_1] \\ = M_1 \omega^2 a_1 [m_1 + m_2 \beta_2 + \dots + m_q \beta_q] \\ = (M_1 \omega^2 a_1) \sum_{i=1}^q \{m_i \beta_i\} \\ = a_1 \sum_{i=1}^q \{M_i \omega^2 \beta_i\} \end{aligned}$$

위의 식에서 F_q 는 1st mass의 변위 a_1 에 비례하므로 $\sum_{i=1}^q \{M_i \omega^2 \beta_i\}$ 은 단위변위당 FORCE이다.

같은 원리로 torsional-multi-mass-spring system에 대해서도 적용할 수 있다. 단순히 mass M 을 mass moment of inertia J 로 치환하면 된다.

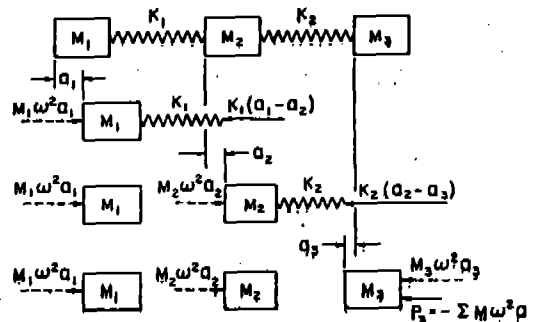


Fig.7 Multi-Mass System for Holzer Analysis