

# 유한요소법에서의 rp 형에 관한 연구

A rp Method in Finite Element Analysis

유 형 선\*, 안 상 호\*\*  
H. S. Yoo, S. H. An

## ABSTRACT

During recent years, a great deal of interest has emerged on the use of adaptive approaches and a posteriori estimates in finite element method. The results are intended to be used to improve the quality of finite element solution by changing the location of the nodes within a fixed number of degrees of freedom - so called r method -, and by increasing the order of polynomial approximation with the new degrees of freedom - p method.

This paper deals with error analysis that contains the basic theory and method of deriving error estimates and adaptive processes applied to finite element solutions underlying the rp method that is the combination of r and p method of finite element. It is shown that we can obtain more accurate solution by applying the method to the 2-dimensional heat transfer problem.

### 기 호 설 명

$A_k$  : 요소의 면적  
 $C$  : 임의의 양의 상수  
 $h$  : 대류 열전도계수  
 $k$  : 형상함수의 차수  
 $k_x, k_y$  :  $x, y$  방향의 열전도계수  $W/m^2 \cdot C$   
 $M$  : 요소의 총수  
 $N_i$  : 형상함수  
 $n_x, n_y$  :  $x, y$  방향에서의 바깥방향 수직벡터 성분  
 $Q$  : 내부 열원

$T$  : 온도  $^{\circ}C$   
 $T_{\infty}$  : 대기온도  $^{\circ}C$   
 $\bar{X}_k$  : 요소의 기하학적 중심  
 $X_k$  : 유한차원 공간  
 $\beta$  : 매개 변수  
 $\Omega$  : 전체 영역  
 $\nu$  : 반복 횟수

### 1. 서 론

오늘날 유한요소법은 공학에서 다루어지는 다양한 형태의 미분 방정식을 해석하는데 많

\* 인하대학교 자동차공학과

\*\* 인하대학교 대학원

이 사용되고 있으며, 최근에는 보다 정확한 유한요소해를 얻기 위하여 많은 연구가 이루어지고 있다.

전·후오차해석법 또는 적응해석법 등으로 일컬어지는 이러한 연구는 해석의 전·후에 발생하는 오차를 예견하며 이를 수용할 수 있는 한계내에 있게하는 형태로 수행되고 있다.

1978년에 I. BABUSKA와 W. C. RHEIN-BOLDT에 의해 후오차해석법<sup>1)</sup>을 제시한 이후 지금까지 후오차해석법과 적응해석법에 관한 많은 연구가 진행되어 왔다. 이러한 해석법에는 몇가지 기본적인 방법<sup>2)3)</sup>이 있다. 첫째는 이미 존재하는 유한요소를 같은 형태의 요소로 세분하는 것(h법)이고, 둘째는 유한요소의 형상함수 차수를 증가시키는 것(p법)이다. 셋째는 이 두가지를 혼합한 높은 정도의 해를 얻을 수 있는 hp<sup>4)</sup>법이 있다. 그리고 유한요소의 절점을 최적의 위치로 변화시키는 r법이 있다.

본 연구에서는 자유도 수의 커다란 증가를 억제하고 요소의 수를 변화시키지 않는, r법과 p법을 혼합한 rp법을 지금까지 많은 연구에서 다른 방법의 적용시 사용해온 L형 영역에 열전달 문제를 적용시킴으로서 r법이나 p법을 사용했을 때와 rp법을 사용했을 때의 온도분포 변화상태, 오차의 수렴율 및 수렴속도를 비교 검토함으로써 rp법의 장점을 파악코저 하였다.

## 2. 이론적 배경

### 2.1 오차의 크기

미분 방정식의 정해를  $u$ 라 하고 이에 대응하는 유한요소해를  $u_h$ 라 할 때 식(1)과 같이 표현되는 오차  $e$ 는

$$e = u - u_h \quad \dots\dots\dots (1)$$

가장 널리 사용되면서 r법, p법 그리고 rp법에 모두 적용되는 에너지 norm의 형태로 다음 조건을 만족하여야 한다.<sup>5)6)</sup>

$$\|u - u_h\| \leq Ch^{min(m-1, p)} \quad \dots\dots\dots (2)$$

여기서  $h$ 는 가장 큰 요소의 직경이고  $p$ 는 함수의 차수이며  $m$ 은 특이점에서의 차수의 크기이다.

### 2.2 오차측정법

에너지 norm에서 오차는 다음과 같이 정의된다.<sup>7)</sup>

$$\|u - u_h\|_{E(\Omega)} \stackrel{def}{=} \sqrt{U(u - u_h)} \quad \dots\dots\dots (3)$$

여기서  $U$ 는 strain 에너지이다. 그러므로  $\|u - u_h\|$ 은 오차의 근호의 평균치 제곱과 밀접한 관련이 있으며 p법이나 h법의 경우에는 다음식의 형태로 나타낼 수 있다.

$$\|u - u_h\|_{E(\Omega)} \leq k/N^\beta \quad \dots\dots\dots (4)$$

여기서  $k$ 와  $\beta$ 는 양의 상수이고  $N$ 은 자유도의 수이다.

### 2.3 유한요소 근사값

미분 방정식 정해  $u$ 가 충분히 매끈하다고 할 때 유한차원공간  $X_h$ 에서의 함수를 사용하여 보간이 가능하다. 이런 함수를  $u_1$ 라 하면 다음식이 성립한다.

$$\|u - u_h\| \leq C\|u - u_1\| \quad \dots\dots\dots (5)$$

이 결과는 유한요소법의 수렴율 측정 및 절점 최적화 문제에 사용된다.

### 2.4 적응 해석법

새로운 절점을 구하기 위한 r법은 다음의 조건을 만족시켜야 한다.<sup>8)9)</sup>

$$f_k = h_k |u|_{k+1, K}^2 = Const \quad \dots\dots\dots (6)$$

절점의 위치는 절점 근처 요소의  $f_k$ 의 값에 의하여 결정된다. 만일  $f_k$ 의 크기가 평균치보다 크면 요소  $K$ 주위로 절점이 이동하여  $h_k$ 의 크기가 감소한다. 절점은 항상 같은 수의 요소에 의하여 공유되어 있기 때문에 절점의 이동폭은 상대적으로  $f_k$ 의 값에 의존한다.  $v$ 번째 반복 후, 변한 새로운 절점의 위치는 다음과 같이 나타낸다.

$$X_n^{v+1} = \frac{\sum_{k \in (N)} \bar{X}_k^2 (F_k/A_k)^v}{\sum_{k \in (N)} (F_k/A_k)^v} \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$F_k \equiv A_k^e |u|_{k+1, K}, \quad \beta = k$$

$$+ h(T - T_\infty) = 0$$

여기에서,  $X_n^{n+1}$ :  $n$  번째 결점의 새로운 위치  
 $\{N\}$ :  $x$ 를 포함하는 요소들의 집합  
 $A_k$ : 요소의 면적 벡터

또한, p법은 각 요소의 오차를 계산한 후, 오차가 큰 요소  $K$ 를 검색하여 요소  $K$ 의 절점의 수를 증가시킨다.

### 3. 해 석 예

본 연구의 rp법을 적용시키기 위해 선정한 경계의 연속과 불연속을 포함하는 2차원 L형 모델을 Fig.1에 도시하였다. Fig.1의 경계는 0°C로 고정시켰으며 단위 면적당 발열량은 2로 하고 열전달계수  $k_x = k_y = 1$ 로 가정하였다. Fig.2는 L형 모델을 정사각형 형태로 유한요소화시킨 것이다.

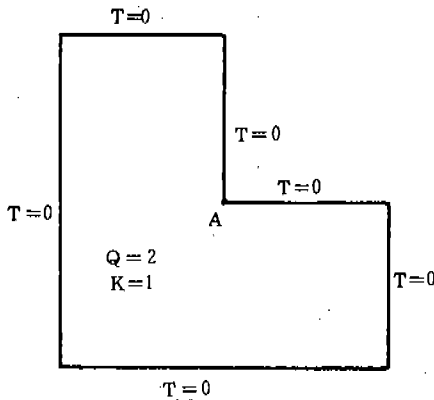


Fig.1 L-shaped domain

#### 3.1 지배방정식

rp법을 적용하기 위한 열전달 문제의 지배방정식은 다음과 같다.

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \tilde{Q} = 0 \quad \dots\dots (8)$$

이에 따른 경계조건은 다음과 같다.

경계  $s_1$  에서  $T = T(x, y)$

경계  $s_2$  에서  $k_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y + q$

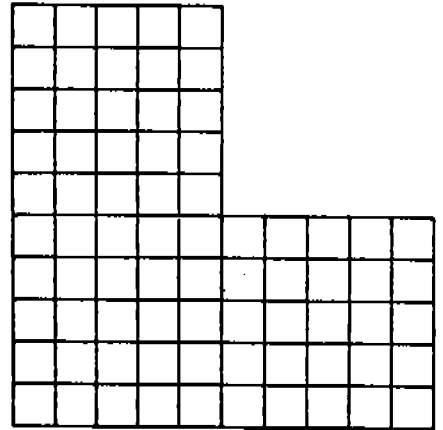


Fig.2 Discretized domain

#### 3.2 유한요소법의 정식화

주어진 미분 방정식의 해를 구하기 위해 Galerkin 방법을 적용하여 행렬식으로 표현하면 다음과 같다.

$$[K_c] \{T\} = \{Q\} \quad \dots\dots\dots (9)$$

여기서,

$$K_{cij} = \iint \left( k_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + k_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy$$

$$Q_i = \iint \tilde{Q} N_i dx dy - \int_{s_2} [q + h(T - T_\infty)] N_i dS$$

#### 3.3 오차의 크기

유한요소의 오차와 보간 오차는 norm과 seminorm을 이용해서 측정할 수 있다. 2차원의 경우 norm의 형태는 다음과 같다.<sup>7)</sup>

$$\|u\|_{m,D} = \left\{ \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 \leq m} \left( \frac{\partial^{(\alpha_1 + \alpha_2)} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}} \right)^2 dx \right\}^{1/2} \quad \dots\dots (10)$$

또한, seminorm의 형태는 다음과 같다.

$$\|u\|_{m,D} = \left\{ \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = m} \left( \frac{\partial^{(\alpha_1 + \alpha_2)} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}} \right)^2 dx \right\}^{1/2} \quad (11)$$

이와 같은 norm과 seminorm은 제공한 뒤에 적분이 가능하므로 매우 편리하다.

#### 3.4 실험 예

격자점을 최적 상태의 위치로 재배치시키는 r법, 상대적으로 오차가 큰 요소를 요소의 기

하학적 중심에서 각변의 중점을 연결시켜 한 요소를 몇개의 요소로 세분화시키는 h법, 그리고 유한요소해의 오차가 상대적으로 큰 요소의 형상함수 차수를 증가시키는 p법중, 본 연구에서는 어느정도 밖에 오차를 줄일 수 없는 r법의 단점을 보완하고 무한히 오차를 줄일 수 있는 p법을 서로 조합한 rp법을 채택하였다. Fig. 3은 rp법의 전체적인 구성을 나타내는 흐름도로서, 경계온도는 0°C이고 내부 열원이 2로 균일하게 작용하였으며 요소의 길

이는 1로서 한 요소당 4개의 절점수를 갖도록 하여 r법을 실행시킨 후 오차가 허용범위 내에 수렴하게 되면 p법을 실행하도록 하였다. p법에서는 오차가 상대적으로 큰 요소의 절점의 수를 4개에서 8개로, 또 절점수가 8개인 요소에서는 12개로 증가시키면서 실행하였다. 본 연구에서는 편의상 1회 반복시 오차가 가장 큰 요소의 형상함수의 차수를 증가시키는 방법을 채택하였다.

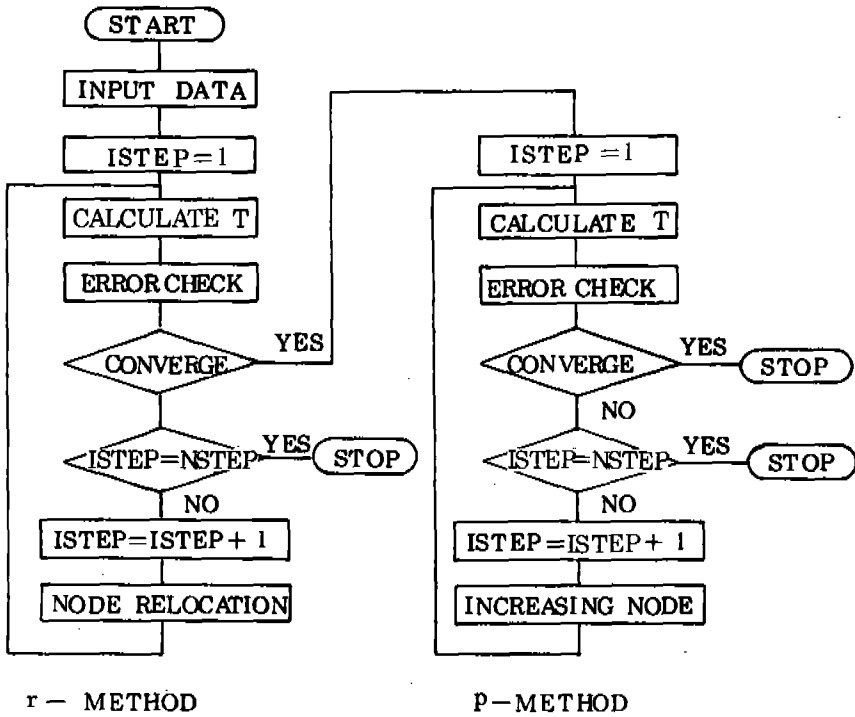


Fig. 3. Flow chart for r-p method

#### 4. 결과 및 고찰

동일한 문제해석에 r법, p법, rp법을 실행시켰을 때 L형 영역내의 절점변화 상태를 Fig. 4에 도시하였다. Fig. 4-a는 r법에 의해 이루어진 절점의 변화를 나타낸 것으로 오차의 크기는 5번의 반복실행결과  $0.5756 \times 10^{-6}$ 에서  $0.3044 \times 10^{-6}$ 으로 감소했으며 절점의 위치가 이동하여 오차가 큰 요소의 면적이 감소했음을 알 수 있다. Fig. 4-b는 p법에 의해 절

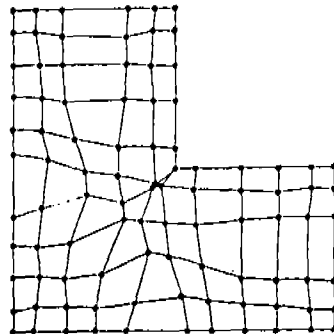


Fig. 4-a Location of nodes by r method



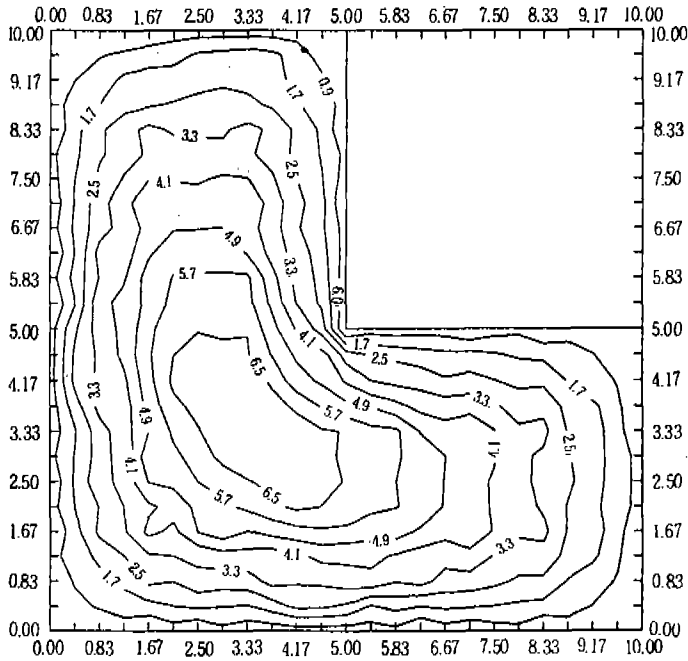


Fig. 5-b Temperature Distribution by using rp method

은 각 방법의 수렴율을 나타낸 것으로 r 법이  
나 p 법에서보다 rp 법에서 보다 효과적으로  
오차가 감소함을 알 수 있었다.

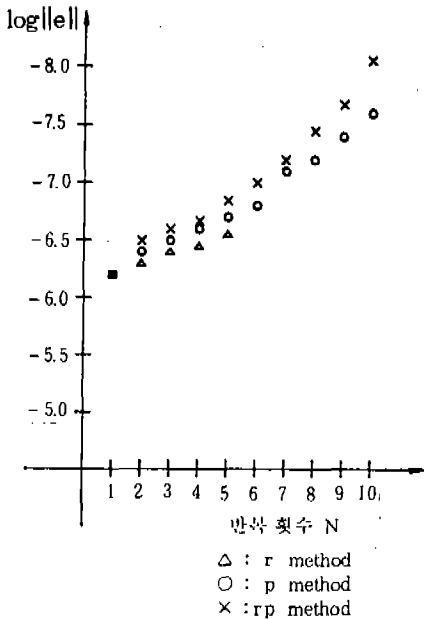


Fig. 6 Convergence rate of r, p, rp method

### 5. 결 론

본 연구는 L형 영역의 열전달 문제를 유한 요소법의 후오차해석법인 r 법, p 법, rp 법에 적용시킴으로서 격자의 최적화와 후오차해석을 제시하였고 이를 프로그램화하였으며 다음과 같은 결론을 얻었다. 격자의 최적화를 평가하는 r 법을 사용함으로써 오차를 영역내에 균일하게 분포시켰으며 최적의 격자점을 찾을 수 있었고, p 법을 사용함으로써 r 법보다 오차가 현저히 감소하였으며, rp 법을 사용함으로써 최적의 격자점을 알 수 있었고, 또한 오차가 큰 부분의 형상함수의 차수를 증가시켜 절점의 수를 증가시켜 계산함으로써 모든 요소의 오차를 균일하게 분포시켜 보다 안정된 해를 얻을 수 있었다. 온도 또한 r 법이나 p 법보다 세밀하게 파악할 수 있었다. 따라서 r 법이나 p 법만을 사용하는 것보다 rp 법을 사용하는 것이 유한요소의 해를 구할 때보다 효율적이며 안정된 해를 얻을 수 있었다. 이런 결과를 기초로 하여 본 연구의 rp 법은 유한요

소법을 이용하는 응력해석문제나 그외의 다양한 공학해석에 효과적으로 적용될 것으로 사료된다.

## 후 기

본 연구는 1988년도 문교부 학술연구 조성비에 의한 자유공모과제로 선정되어 연구되어 졌으며 이에 감사를 드린다.

## REFERENCES

1. I. Babuska and W.C. Rheinboldt, "A posteriori error estimates for the finite element method", *Internat. J. Numer. Meths. Engrg.* 12(1978) 1597-1615.
2. Eric B. Becker, Graham F. Carey and J. Tinsley Oden, "Finite element, Vol.I-IV", Prentice-Hall, Inc. (1981)
3. Noboru Kikuchi, "Finite Element Method in Mechanics", Cambridge Univ. of Press. (1986) 25-114.
4. Noboru Kikuchi, "Adaptive grid-design methods for finite element analysis", Univ. of Michigan (1985)
5. D.W. Kelly, J.P. de S.R. Gago, O.C. Zienkiewicz and I. Babuska, "A posteriori error analysis and adaptive processes in the finite element method: part I - error analysis", *Internat. J. Numer. Meths. Engrg.* 19 (1983) 1593-1619.
6. J.P. de S.R. Gago, D.W. Kelly, O.C. Zienkiewicz and I. Babuska, "A posteriori error analysis and adaptive processes in the finite element method: part II - adaptive mesh refinement", *Internat. J. Nemer. Meths. Engrg.* 19 (1983) 1621-1656.
7. B.A. Szabo and D.A. Dunavant, "An adaptive procedure based on the p-version of the finite element method", *Specialists, Conf. Univ. of Maryland* (1980)
8. A.R. Diaz, Noboru Kikuchi and J.E. Taylor, "A method of grid optimization for finite element method", *Computer methods in applied mechanics and engineering* 41 (1983) 29-45.
9. O.C. Zienkiewicz, D.W. Kelly, J.P. de S.R. Gago and I. Babuska, "Hierarchical finite element approaches, error estimates and adaptive refinement", *Proc. Third Conf. On Mathematics of Finite Elements and Applications, Brunel Univ., U.K.* (1981)