

有限要素法을 이용한 齒車의 接觸 應力 解析

이대희*** · 최동훈* · 임장근** · 윤갑영*

*한양대학교 공과대학 기계설계학과

**한양대학교 공학대학 기계공학과

***한양대학교 대학원 기계공학과

An Analysis of the Contact Problem between Mating Involute Gear Teeth Using Finite Element Method

Lee Dae Hee*** · Choi Dong Hoon* · Lim Jang Keun** · Yoon Gab Young*

*Han Yang Univ. Dept. of Mechanical Design and Production Eng.

**Han Yang Univ. Dept. of Mechanical Eng.

***Han Yang Univ. Graduate School Dept. of Mechanical Eng.

ABSTRACT

A general and efficient algorithm is proposed for the analysis of the frictionless elastic contact problems. It utilizes a simplex-type algorithm with a modified entry rule and incorporates finite element method to obtain flexibility matrices.

The algorithmic solution is compared with the Hertzian solution for the contact problem between two cylinders to prove its accuracy and the contact problem between pin and piston rod is solved and compared with the numerical results of Frankavilla and Zienkiewicz to demonstrate the generality and effectiveness of the suggested algorithm.

The contact problem between mating involute gear teeth at the worst load position is considered. The computed contact stress is smaller than the result of Hertz's theory applied to the contact between two kinematically equivalent discs and the contact area is larger than that of Hertz's theory.

1. 序 論

B. C. 2600년경 中國에서 齒車를 사용한 이래 齒車는 높은 效率로 動力과 運動을 傳達하는 重要한 手段으로 사용되어 왔다. 이러한 齒車의 設計에 있어서 考慮되어야 할 因子는 疲勞 現象에 의해 이의 破斷을 일으키는 굽힘 應力, pitting을 유발하는 接觸 應力, 마모량을 結定하는 潤滑油膜의 두께,

scoring을 誘發하는 潤滑油내의 最大 局所 溫度 上昇이다. 이중에서도 接觸 應力이 設計 制限 條件이 되는 피치선 速度가 存在하게 되어 齒車의 接觸 應力을 자세하게 解析할 必要가 있다.

一般的으로 彈性體의 接觸 應力 解析은 1882年 Hertz(1)에 의해서 表面이 매끄러운 一般의 2次 曲面을 가진 두개의 等方性 彈性體가 垂直荷重을 받는 接觸 問題를 解析하여 接觸面積, 接觸應力 分布 및

強體 變位를 구한 것으로부터 시작되었다. 그 후 1939年 G. Lundberg(2)와 1947年 C. Cattaneo (3)가 2次 曲面보다 複雜한 幾何學的 形狀을 가진 彈性體간의 接觸 問題를 解析하였고, 1956年 H. D. Conway(4)는 異方性 彈性體간의 接觸 問題를 解析 하였다. 또한 1974年 K. A. Nuri(5)는 Hertz 문제 를 실험하여 그의 실험결과와 잘 부합되는 이론식을 구하였다.

彈性論을 이용한 接觸 問題의 解析은 단순한 形狀 에만 適用이 可能하므로, 一般的 形狀의 物體 사이의 接觸 問題 解析을 위한 數置의 方法들이 提案되 었다. 1971年 T. F. Conry와 A. A. Seireg(6)가 垂直荷重을 받고 있는 一般的 接觸 問題를 効課의 으 解析하는 算法을 開發하였으며 1975年 A. Francavilla와 O. C. Zienkiewicz(7), 1981年 T. D. Schdeva, C. V. Ramakrishnann과 R. Natarajan(8)는 有限要素法을 이용하여 flexibility matrix를 구해 接觸 問題를 거의 線形화 하여 반복 법을 導入하여 풀었다.

本 研究에서는 一般的 形狀을 가진 彈性體 사이의 摩擦을 무시한 接觸 問題를 解析하기 위하여 有限要素法을 이용한 効率의인 方法을 提示하고 垂直荷重 을 받는 齒車의 接觸 應力 解析을 하고자 한다.

2. 解析 이론

本 研究에서의 接觸 問題를 解析하기 위해 假定된 事項은 다음과 같다.

- 1) 接觸 영역에서는 摩擦을 무시할 수 있다.
- 2) 變形量이 작다.
- 3) 接觸 物體는 線形 彈性論을 따른다.
- 4) 매끄러운 표면의 접촉이다.

2-1. 變形에 대한 適合 條件式

Fig. 1에서와 같이 豫想된 接觸 영역의 임의의 점 에서 u^1, u^2 를 物體 1, 2의 垂直 變位 벡터라 하면 變形 후의 適合 條件은 (1)식과 같이 된다.

$$\epsilon = \underline{u}^1 + \underline{u}^2 + d \quad (1)$$

物體 2는 剛體 運動이 拘束되어 있고 物體 1만이 剛體 運動 變位가 있다고 假定하면 豫想 接觸點에서 物體 1의 變位는 剛體 運動 變位와 彈性 變形의 합

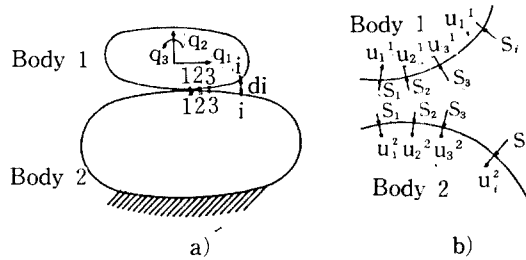


Fig.1. Geometry of contacting bodies.

이 되어 (2)식과 같이 된다.

$$\underline{u}^1 = \underline{u}_e^1 + \underline{A} \underline{q} \quad (2)$$

또한 彈性 變形은 接觸力 s 에 의한 變位와 外力 t 에 의한 變位의 합이므로 (3)식과 같이 된다.

$$\underline{u}_e^1 = \underline{F}^1 \underline{s} + \underline{v}_e^1 \quad (3)$$

物體 2에서도 物體 1에서와 같이 (4)식으로 쓸 수 있다.

$$\underline{u}_e^2 = \underline{F}^2 \underline{s} + \underline{v}_e^2 \quad (4)$$

影響係數 行列 F 에서 影響係數 F_{ij} 는 節點에 單位 荷重을 주었을 때 節點에서의 垂直 變位를 나타 낸다. 그러므로 變形 후의 대응되는 豫想 接觸點 사이의 間隔은 (5)식으로 나타낼 수 있다.

$$\epsilon = \underline{B} \underline{e} + \underline{A} \underline{q} + a \quad (5)$$

여기서 $\underline{B} = \underline{F}^1 + \underline{F}^2$

$$\underline{a} = \underline{v}_e^1 + \underline{v}_e^2 + \underline{d}$$

2-2. 平衡 條件式

假想 일의 원리를 이용하여 物體 1에 대한 平衡 條件式은 (6)식으로 나타낼 수 있다.

$$\underline{A}^T \underline{s} + \underline{H}^T \underline{t} = 0 \quad (6)$$

2-3. 接觸 條件

임의의 豫想 接觸點 k 에서 接觸이 이루어지면 接觸力이 存在하게 되어 接觸力 s_k 가 0인 반면 대응하는 豫想 接觸點 사이의 間隔 ϵ_k 가 0보다 크게 된다. 그러므로 接觸 條件은 (7)과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \epsilon_k = 0 \text{ 이면 } s_k &> 0 \\ \epsilon_k > 0 \text{ 이면 } s_k &= 0, \quad k=1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (7)$$

이제 두 物體 사이의 摩擦을 무시할 수 있는 彈性

接觸 問題는 다음과 같은 非線形 連립방정식을 만족 하는 \underline{s} , $\underline{\varepsilon}$, \underline{q} 를 구하는 問題로 수식화 할 수 있다.

$$\begin{aligned} -\underline{B} \underline{s} - \underline{A} \underline{q} + \underline{\varepsilon} &= \underline{a} \\ -\underline{A}^T \underline{s} &= \underline{H}^T \underline{t} \end{aligned} \quad (8)$$

either $s_k = 0$ or $\varepsilon_k = 0, k=1, 2, \dots, n$
 $s_k \geq 0, \quad \varepsilon_k \geq 0, k=1, 2, \dots, n$

3. 彈性 接觸 問題의 解法

3-1. 影響 係數의 計算

任意 形狀의 彈性 接觸의 境遇 影響 係數 行列 \underline{F} 를 구하기 위하여 有限要素法을 適用한다. 解析하고 자 하는 모델을 有限要素화 하여 剛性 行列 \underline{K} 를 구하고 이것의 逆行列을 구해 모든 節點에 대한 影響 係數 行列을 구할 수 있다. 그러나 接觸 問題 解析을 위해 필요한 影響 係數 行列 \underline{F} 는 接觸面에 국한된 극히 일부의 節點에 대한 것으로, 이와 같은 경우 frontal method를 專用하는 것이 効率的이다. 分割된 要素의 各 節點에서 剛性 行列은 주위를 둘러싼 要素에 의해서만 影響을 받는다는 점을 이용하여 必要한 節點에서의 剛性 行列만을 남기고 租合과 정에서 예상 接觸 영역 밖의 剛性 行列은 消去된다. 이렇게 하여 必要한 節點에서의 응축된 剛性 行列을 구할 수 있고 이의 逆行列을 計算하여 필요한 影響 係數 行列을 구하였다.

本 研究에서는 參考 文獻(9)에서 紹介된 一般의 frontal method를 修正하여 必要한 影響 係數 行列을 구하였다.

3-2. 最適화 問題로의 變換

2장에서 數式화된 接觸 問題를 効率的으로 임의 變數 \underline{Z} 를 導入하여 (9)式과 같은 最適화 問題로 變換할 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{minimize } & \sum_{k=1}^{n+r} Z_k \\ \text{subject to } & -\underline{B} \underline{s} - \underline{A} \underline{q} + \underline{\varepsilon} + \underline{Z}_1 = \underline{a} \\ & -\underline{A}^T \underline{s} + \underline{Z}_2 = \underline{H}^T \underline{t} \end{aligned} \quad (9)$$

either $s_k = 0$ or $\varepsilon_k = 0$
 $s_k \geq 0, \quad \varepsilon_k \geq 0, \quad Z_k \geq 0$

where

$$\begin{aligned} (k=1, \dots, n) \text{ for } s_k \text{ and } \varepsilon_k \\ (k=1, \dots, n+r) \text{ for } Z_k \\ \underline{Z}_1 = [Z_1, Z_2, \dots, Z_n] \\ \underline{Z}_2 = [Z_{n+1}, Z_{n+2}, \dots, Z_{n+r}] \end{aligned}$$

위의 最適화 問題는 $s_k=0$ 또는 $\varepsilon_k=0$ 이 되어야 하는 條件 때문에 線形計画法으로는 풀 수 없으나 線形計画法의 entry rule을 바꾼 修正된 線形計画法 (6)을 이용하면 매우 効率적으로 解를 구할 수 있다. 이와 같이 하여 얻어진 解는 各 節點에서의 힘 이므로 接觸 壓力를 구하기 위하여 有限要素法에서 사용되었던 보간 함수를 이용하여 接觸된 節點에서의 接觸 壓力를 구한다.

4. 해석 결과 및 고찰

齒車의 接觸 應力 解析을 하기 위해 有限要素法을 이용하여 齒의 形狀의 接觸 物體 사이의 彈性 接觸 問題를 解析할 수 있는 算法을 開發하였으며 提案된 算法을 이론해가 存在하는 두개의 실린더 사이의 接觸 問題와 Piston rod-Pin 사이의 接觸 問題에 適用해 既存의 結果와 比較하여 精確성과 유용성을 보인

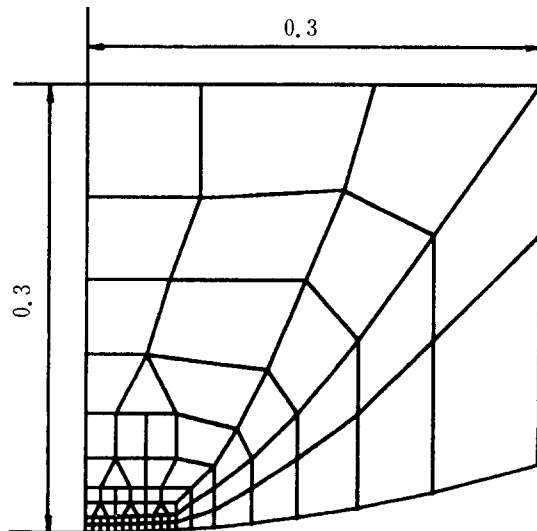


Fig.2. Finite element mesh for the contact between two cylinders(plane strain case)
 Dimensions in m

Table 1. Material properties of cylinders

	Modulus of Elasticity (E)	poisson's ratio (ν)
cylinder 1	206 GPa	0.3
cylinder 2	206 GPa	0.3

후 齒車의 接觸 應力 解析을 하였다.

4-1. 두개의 실린더 사이의 接觸 問題

두개의 실린더 사이의 接觸 問題는 이론해가 存在 하기 때문에 본 研究 解析 方法의 精確성을 검토하기 위해서 解析하였다.

接觸된 두 物體의 形狀과 치수 및 有限 要素 모델을 Fig.2에 圖示하였고 物性値는 Table 1에 表記하였다.

有限 要素로는 1차 및 2차의 보간 함수를 갖는 Isoparametric 要素를 택하여 要素의 선택에 따른 解의 精確성이 검토되었으며 영역의 變化, 要素 크기에 따른 解의 精確성도 검토되었다.

外部 荷重이 單位 두께당 472.4MN의 壓縮力이 作用할 때 解析 영역의 變化에 따른 이론해와의 比較가 Fig. 3에 나타나 있으며, 영역이 실린더 반경의 0.3배 이상에서는 이론해와의 最大 誤差가 2% 이하로 나타났다. 要素 크기에 따른 이론해와의 比較가

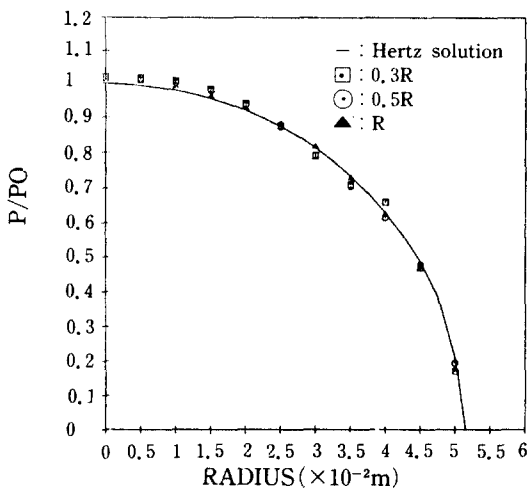


Fig.3. Contact pressure distribution for two cylinders according to the change of analytic domain

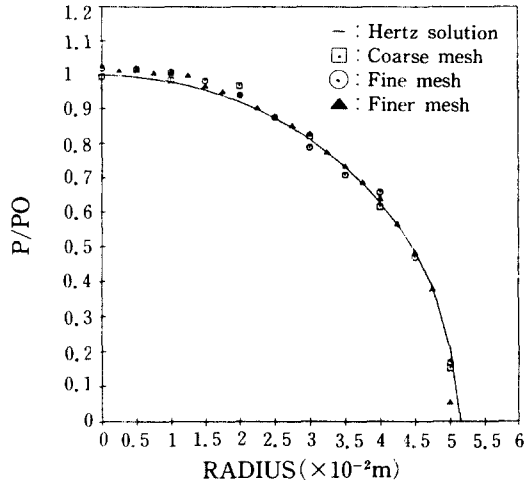


Fig.4. Contact pressure distribution for two cylinders according to the change of mesh size

Fig.4에 나타나 있으며 要素 크기가 작아짐에 따라서 이론해와의 誤差가 작아짐을 알 수 있었고, 가장 거친 要素 크기에서도 最大 誤差가 2% 이하였다. 要素선택에 따른 結果가 Fig.5에 나타나 있으며 2차 보간 함수를 이용하여 구한 結果가 1차 보간 함수를 이용한 結果보다 精確함을 알 수 있었다.

4-2. Piston rod와 Pin 사이의 接觸 問題

Piston rod와 Pin 사이의 接觸 問題는 接觸 영역이 比較적 큰 問題로 解析하기 어려운 問題 중의 하

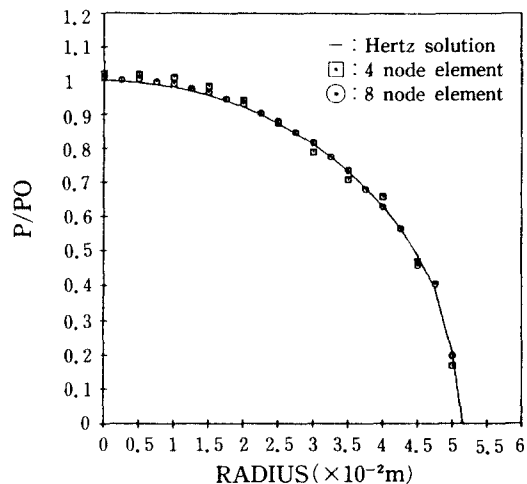


Fig.5. Contact pressure distribution for two cylinders according to the choice of element

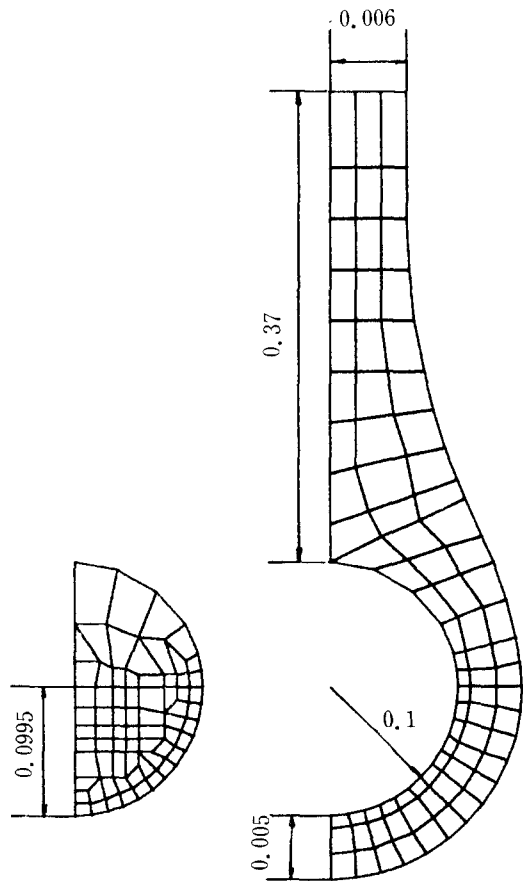


Fig.6. Finite element mesh for the contact between a piston rod and a pin(plane stress case)
Dimensions in m

Table 2. Material properties of piston rod and pin

	Modulus of Elasticity (E)	poisson's ratio (ν)
piston rod	206 GPa	0.3
pin	206 GPa	0.3

이다.

接觸하는 두 物體의 形狀과 치수 및 有限 要素 모델은 Fig.6과 같고, 物性値는 Table 2에 표기하였다.

이 問題를 解析하기 위하여 有限 要素는 1차와 2차 보간 함수를 갖는 Isoparametric 要素를 선택하여 실린더 사이의 接觸 問題에서와 같이 要素 선택

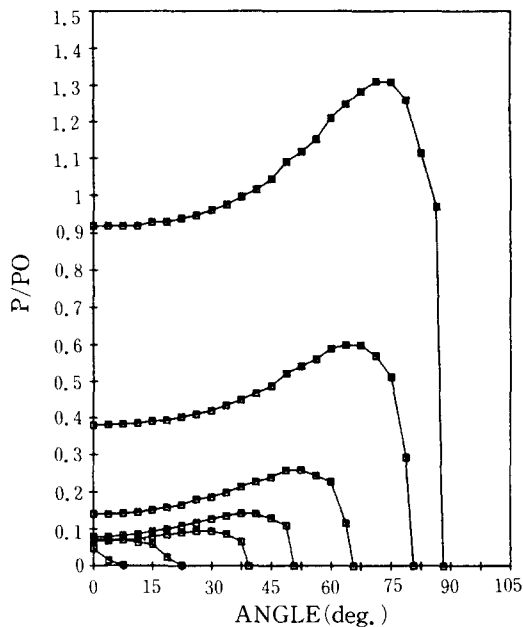


Fig.7. Contact pressure distribution for piston rod problem

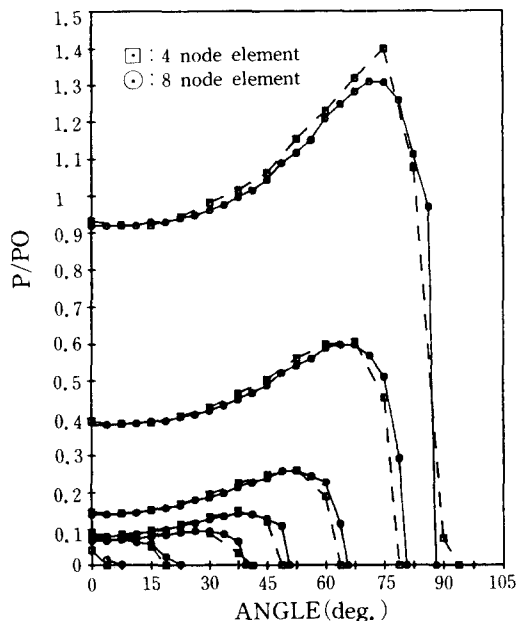


Fig.8. Contact pressure distribution for piston rod problem according to the choice of element

에 따른 解의 精確성을 검토하였다.

이 問題는 平面 變形 狀態로 假定하였으며, 外部 荷重이 Piston rod 上部面에 0.5KN, 4KN, 10

KN, 18 KN, 40 KN, 120 KN, 300 KN의 引長力이 각각 作用하는 경우를 解析하였다.

Fig.7에 圖示한 解析 結果는 Frankavilla와 Zienkiewicz(7)의 結果와 일치하고 있으며 荷重이 增加함에 따라 接觸영역에서 Hump가 나타남을 알 수 있었다.

有限 要素 선택에 따른 結果는 Fig.8과 같으며 1 차 要素보다 2차의 보간 함수를 갖는 Isoparametric 要素를 사용하는 것이 보다 정확함을 알 수 있었다.

5. 齒車의 接觸 應力 解析

5-1. 最大 荷重點(worst-load position)의 決定

過去에 이루어졌던 齒車의 接觸 應力 解析은 先端에 最大 荷重이 걸리는 條件을 最大 荷重 條件으로 가정하여 齒車의 接觸 應力 解析이 이루어졌으나 대부분의 齒車들은 接觸率이 1.4 이상이기 때문에 先端 荷重 條件이 最大 荷重 條件이 아니고 두쌍의 齒의 接觸에서 한쌍 接觸으로 넘어 갈 때가 最大 荷重 條件이 되며 한쌍의 齒가 全 荷重을 받게 된다. 이와 같은 條件의 最大 荷重點의 위치를 구하는 방법을 Fig.9에 圖示하였다(10).

5-2. 인벌루트 齒車 사이의 初期 間隔 計算

接觸 問題 解析에 있어 初期 間隔은 가장 중요한 因子로서 특별히 正確하게 구할 필요가 있다.

본 研究에서는 5-1項에서 決定한 最大 荷重點으로부터 기어와 피니언의 인벌루트 曲線상의 호의 길이가 같은점을 대응하는 豫想 接觸點으로 선정하였다.

初期 間隔은 最大 荷重點에서 기어와 피니언의 共

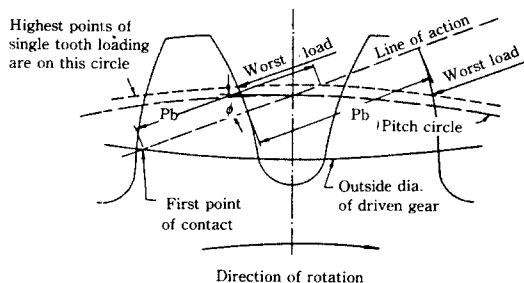


Fig.9. Worst-load position

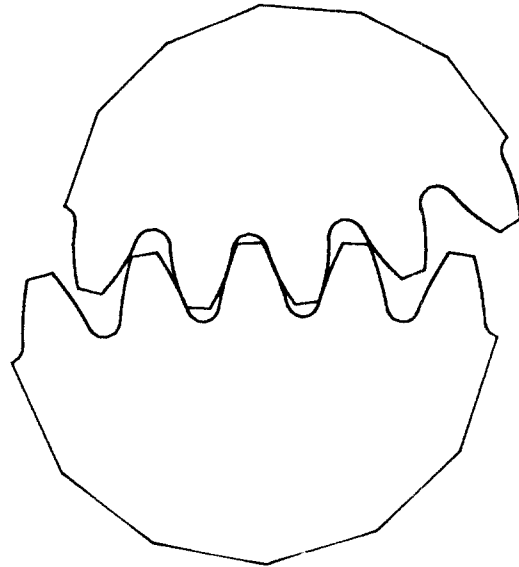


Fig.10. Mating gear teeth

通 接線을 구하고 이 共通 接線과 기어의 豫想 接觸點에서의 法線과의 교점 그리고 피니언의 대응하는 豫想 接觸點에서의 法線과의 교점을 구하여, 기어와 피니언의 豫想 接觸點과 각각의 교점과의 거리의 合을 初期 間隔으로 하였다.

5-3. 接觸 應力 解析

맞물리는 齒車의 形狀을 Fig.10에, 기어와 피니언에 대한 有限 要素 모델을 Fig.11, 12에 圖示하였고 치수와 物性值를 Table 3에 表記하였다.

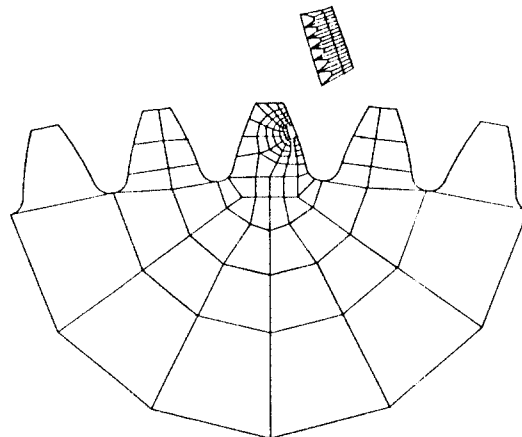


Fig.11. Finite element mesh of gear

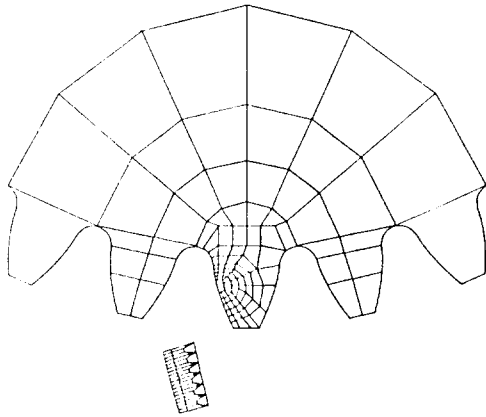


Fig.12. Finite element mesh of pinion

Table 3. Material properties and Dimensions of Gears

	Gear	Pinion
Modulus of Elasticity (E)	206 GPa	206 GPa
poisson's ratio (ν)	0.3	0.3
Module (M)	5	5
No. of Tooth (Z)	60	30
Pressure angle (ϕ)	20deg.	20deg.

두개의 실린더 사이의 접촉 문제, piston rod-pin 사이의 접촉 문제의 해석 결과 有限要素로는 1차보다 2차의 보간 함수를 갖는 Isoparametric 要素를 선택하는 것이 適合하므로 2차의 보간 함수를 갖는 isoparametric 要素를 택하였다.

外部 荷重은 最大 荷重點에 2KN, 4KN, 6KN의 荷重이 각각 作用할 때 이에 따른 결과를 Fig.13에 圖示하였다. 여기서 종축은 接觸 壓力과 最大 接觸 壓力과의 비이며, 횡축은 接觸 길이와 모듈의 비이다.

解析 結果, 처음 接觸된 荷重點 부근에서는 接觸 應력이 Hertz 식에 의한 結果 보다 다소 작은 값을 보이며 接觸 영역이 最大 荷重點에서 피치점 方向으로 좀 더 크게 나타남을 알 수 있었다. 이 特性은 荷重點에서 기어와 피니언의 曲率 半徑에 相當하는 두개의 원판으로 이상화하여 解析한 Hertz 이론에 比하여 본 解析은 실제 인벌루트 曲線을 가진 두

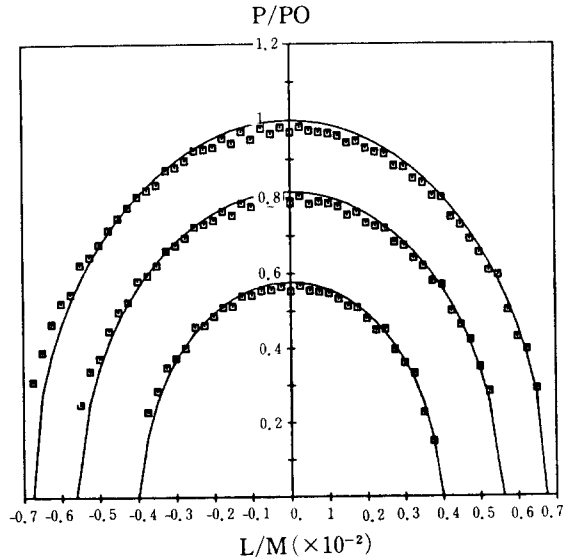


Fig.13. Contact pressure distribution for two gears

齒車의 接觸으로 취급한 結果로 思料되며 實際로 피치점에서의 初期 間隔이 피치점 반대 方向으로의 初期 間隔보다 작으므로 피치점 方向으로 接觸 영역이 크게 나타남이 타당하다고 생각된다.

6. 結 論

본 研究에서는 有限 要素法을 이용하여 임의의 形狀의 接觸 物體간의 摩擦이 없는 彈性 接觸 問題를 解析할 수 있는 算法을 提案하였으며, 提案된 算法을 이론해가 存在하는 두개의 실린더간의 接觸 問題에 適用하여 그 精確성을 확인하였으며, piston rod-pin 사이의 接觸 問題에 適用하여 그 유용성을 보였다.

또한 提案된 算法을 齒車의 接觸 問題에 適用하여 最大 荷重點에서의 接觸 應력과 接觸 영역을 구하였으며, 運動學적으로 동등한 두개의 원판에 적용한 Hertz의 식에 의한 結果보다 最大 荷重點에서의 接觸 應력의 크기가 작게 나타나고, 接觸 영역의 크기는 Hertz 식의 結果보다 크며 피치점 方向으로 좀 더 크게 나타남을 알 수 있었다.

後 記

이 연구는 1987년도 한국과학재단의 신진연구비 지원하에 이루어졌으며, 관계자에 감사드립니다.

記號說明

- A 豫想 接觸點에서의 kinematic transformation matrix
- d 두 物體의 最初 間隔 벡터
- F¹, F² 物體 1, 2의 影響 係數 行列
- H 外力이 가해지는 점에서의 kinematic transformation matrix
- n 豫想 接觸點의 수
- P_b 法線 피치
- q 剛體 運動 變位 벡터
- r 剛體 運動 變位の 자유도 수
- s 接觸力 벡터
- t 外力 벡터
- u¹, u² 物體 1, 2의 垂直 變位 벡터
- u_e¹, u_e² 接觸力에 의한 物體 1, 2의 彈性 變位 벡터
- v_e¹, v_e² 外力에 의한 物體 1, 2의 彈性 變位 벡터
- Z 임의 變數 벡터
- ε 變形 후의 두 物體의 間隔 벡터
- φ 壓力角

REFERENCES

(1) H. Hertz, English translations in H. Hertz, "Miscellaneous Papers", translated by D.E. Jones and G.A. Schott, Macmillan, New York,

1896, pp.146-162, 163-183.
 (2) G. Lundberg, "Elastische Berührung Zweier Halbraume", Forsch. Ingenieurw., 10, 1939, pp. 201-211.
 (3) C. Cattaneo, "Teoria del contatto elasiico in seconda approssinazione", Unive. Rome, Rend., Mat. Appl., 6, 1947, pp.504-512.
 (4) H.D. Conway, "The Pressure Distribution Between Two Elastic Bodies in Contact", Z. Angew. Math. Phys., 7, 1956, pp.460-465.
 (5) K.A. Nuri, "Normal Approach Between Curved Surface in contact", Wear, Vol.30, No. 3, Dec., 1974, pp.321-335.
 (6) T.F. Conry and A. Seireg, "A Mathematical Programming Method for Design of Elastic Bodies in Contact", ASME, J. of Appl. Mech., Jung 1971, pp.387-392.
 (7) A. Francavilla and O.C. Zienkiewicz, "Note on Numerical Computation of Elastic contact Problems", Int. J. Numer. Methods eng., Vol.9, No.4, 1975, pp.913-924.
 (8) T.D. Sachdeva, C.V. Ramakrishnan and R. Natarajan, "A Finite Element Method for the Elastic Contact Problems", ASME, J. of Trans. Nov. 1981, pp.456-461.
 (9) Bruce M. Irons, "A frontal solution program for Finite Element Anaysis", Int. J. for Num. Methods in Eng. Vol.2, No.1, 1970, pp.5-32.
 (10) D.W. Duddly, Handbook of practical Gear Design, McGraw Hill Book Company, 1974.