

제한 3체 문제에 있어서 태양-목성계와 지구-달계의 L_5 점 주위에 존재하는 주기궤도 분석*

박상영, 조중현, 이병선, 최규홍
연세대학교 천문기상학과
(1988년 10월 1일 접수; 1988년 11월 30일 수리)

Analysis of Periodic Orbits about the Triangular Solutions of the Restricted Sun-Jupiter and Earth-Moon Problem*

Sang-Young Park, Jung-Hyun Jo, Byoung-Sun Lee and Kyu-Hong Choi
Department of Astronomy & Meteorology, Yonsei University, Seoul 120-749
(Received Oct. 1, 1988; Accepted Nov. 30, 1988)

Abstract

Using the numerical solution in the plane restricted problem of three bodies, about 490 periodic orbits are computed numerically around the L_5 of Sun-Jupiter and about 1600 periodic orbits also be done around the L_5 of Earth-Moon system. As period increase, the energy and the shape of periodic orbits increase around the L_5 of Sun-Jupiter system. But, in Earth-Moon system, the complex shapes and dents appear around the L_5 and periodic orbits intersect one another in the place where dents are shown. And there is a region that three different periodic orbits exist with the same period in this system. The increase of energy is in inverse proportion to that of period in the part of this region.

The regions can exist around the L_5 of Sun-Jupiter system where periodic orbit can be unstable by perturbation of other force besides the gravitational force of Jupiter. These regions which is close to L_5 are a ~ 5.12 AU and a ~ 5.29 AU. The Trojan asteroids that have a small eccentricity and inclination can not exist in this region.

요 약

제한 3체 문제의 수치해를 이용하여 태양-목성계와 지구-달계의 L_5 점 근처에서 각각 490여개, 1,600여개의 주기 궤도를 구하였다. 태양-목성계의 경우에는 주기의 증가에 따

* Yonsei University Observatory Contribution No. 73

라 에너지와 주기 궤도 크기가 단조롭게 커졌다. 그러나 지구-달계에서의 주기 궤도 모양은 복잡하고 변곡점이 나타나며 서로 겹치는 경우도 있다. 또한, 지구-달계에서 단일 주기에 3개의 에너지가 동시 대응하는 영역이 존재하며 이 영역에서는 주기와 에너지가 반비례하는 구역이 있다.

태양-목성계의 L_5 점 근처에서 목성의 중력 섭동 외의 기타의 작은 섭동에 의해 불안정한 주기 궤도가 될 수 있는 영역이 존재 가능하다. 이 영역 중 L_5 점(5.2AU)에 가장 가까운 지역들이 $a \sim 5.12$ AU와 $a \sim 5.29$ AU 근처인데, 이곳에는 이심률과 궤도 경사각이 작은 Trojan 소행성들이 존재하기 어렵다고 할 수 있다.

I. 서 론

제한 3체 문제에서의 안정성을 Danby(1964), Szebehely(1967a), Hénon(1969) 등이 연구하였으며, Szebehely와 Nacozy(1967), Deprit와 Henrard(1967, 1969) 등은 여러 종류의 주기 궤도를 연구하였다. 이러한 연구로 제한 3체 문제에서 안정한 주기 궤도가 존재함을 알 수 있으며, 그 결과를 소행성들의 운동에 적용할 수 있다. 제한 3체 문제에서 안정점이 될 수 있는 L_4 , L_5 점 근처에서의 운동은 주성의 공전주기와 비슷한 주기를 갖는 단주기 궤도와 이것의 몇배 이상의 주기를 갖는 장주기 궤도로 나타난다(Szebehely 1967b). Rabe(1961)는 태양-목성계의 L_5 점 근처에서 주기 궤도를 여러 개 구하였으며, Rabe와 Schanzle(1962)은 지구-달계의 L_5 점 근처에서의 주기 궤도를 구했다. 태양-목성계상의 L_4 나 L_5 점 근처의 단주기 궤도는 궤도의 크기가 커질수록 Jacobian Constant가 작아지고, 모든 단주기 궤도는 불안정하다(Goodrich 1966). 그리고 L_3 , L_4 , L_5 점을 잇는 여러 형태의 말굽형 주기 궤도가 존재하고(Schanzle 1967, Everhart 1973), 이들 주기 궤도는 하나의 종족(family)을 따라 진화하는 것이 아니라, 많은 별개의 종족으로 나누어져 있음을 알 수 있다(Taylor 1981). Chebotarev *et al.*(1974)는 Trojan 소행성들 궤도의 진화를 연구하였는데, 400년 동안 Trojan 소행성들의 궤도 기울기와 이심률은 아주 조금 변했으며 근일점은 $1^{\circ}2' - 49^{\circ}2'$ 만큼 변하고, 이심률의 극한값이 타원 제한 3체 문제에서는 0.24가 됨을 보여 주었다. 그리고 장주기 효과만 고려했을 때 Trojan 소행성들의 근일점 진동주기는 약 3,620년 정도이고(Bien 1978) 이심률의 변화주기도 약 3,600년인데 해석적인 해와 관측사실은 잘 일치한다(Erdi와 Presler 1980).

이러한 연구는 실제로 존재하는 단지 몇 개의 Trojan 소행성들의 궤도를 대상으로 수행했으므로 태양-목성계의 L_5 점 근처에 존재할 수 있는 모든 주기 궤도의 특성과 Trojan 소행성 궤도와의 관계를 알려 주지 못한다. 따라서 이 논문에서는 태양-목성계의 L_5 점 근처에 있을 수 있는 모든 주기 궤도를 제한 3체 문제로 구하여 그 특성을 알아보고 Bien(1980)이 수행한 결과뿐 아니라 관측자료(Chapman 1978)와도 비교해 보고자 한다. 그리고 앞으로 지구와 달 사이의 우주 산업에 필요할지도 모르는 자료로써 지구-달계에서 L_5 점 근처의 주기 궤도를 구하여 그 특성을 조사해 보고자 한다.

II. 주기 궤도와 안정성

제한 3체 문제에서는 자유도가 2이고 1개의 적분 상수가 있으므로 위상공간은 3차원이 된다. 위상공간상에 있는 한 점은 주어진 시간에서 계의 상태를 결정하며, 그 궤적은 초기조건과 운동방정식에 의해 제한된다.

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \dots, x_n) \dots\dots\dots (1)$$

와 같은 운동방정식이 한 해 $x_i = \phi_i(t)$ 를 갖는다고 하자. ϕ_i 가 $\phi_i(0) = \phi_i(T)$ 의 성질을 나타낼 때, 또는 $\phi_i(t) = \phi_i(t+T)$ 가 만족될 때 ϕ_i 는 주기 T 를 갖는 주기해를 갖게 된다. 따라서 $x_i = \phi_i(t)$ 는 운동 방정식의 주기해가 된다. 만일 제한 3체 문제에서 하나의 해가 정해졌다면, 이 정해진 해를 가지고 다른 해를 찾아낼 수 있다. 이는 위상 공간상에서 정해진 해의 위치 근처에 다른 주기해의 존재 가능성이 높다는 것이다. 그러므로 이미 알고 있는 주기 궤도와 비슷한 특성을 갖는 새로운 주기 궤도를 찾을 수 있다.

식 (1)의 해 $x_i = \phi_i(t)$ 가 주기해를 나타낸다고 가정하고 미분 방정식을 정의하기 위해 $x_i = \phi_i(t) + \xi_i$ 라 하자. 그러면 미분 방정식은

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \xi_j \dots\dots\dots (2)$$

이 된다. 식 (2)는 시간의 주기함수인 계수를 갖는 선형 미분 방정식의 계를 나타내며, 그 일반해는

$$\xi_i = \sum_{j=1}^N s_{ij}(t) e^{\alpha_j t} \dots\dots\dots (3)$$

가 되는데 α_j 는 상수로서 Poincaré의 특성 지수라 한다(Szebehely 1967b). 운동 방정식이 autonomous 일 때는 특성 지수의 하나가 0이고 계가 일정한 상수를 가질 때는 다른 한 특성 지수도 0이 된다. 따라서 autonomous Hamiltonian 함수에 의해서 정의된 두 개의 자유도를 가진 역학계에서는, 주기해의 안정성이 나머지 두 개의 0이 아닌 특성 지수에 의해 좌우된다(Deprit와 Price 1965). 이들 0이 아닌 특성 지수는 실수이거나 허수가 되는데, 실수이면 그 해는 불안정하고 허수이면 안정한 해가 된다. 이러한 특성 지수는 주기 T 를 갖는 4개의 해로 구성된

행렬의 고유치 λ 와 $\lambda_k = e^{\pm i\alpha_2 T}$ ($k=1, 2, 3, 4, j=1, 2$)와 같은 관계를 갖는다. 그리고 이와 같은 고유치는 두 개가 +1이고 나머지 두 개는 $\lambda_3 \cdot \lambda_4 = 1$ 의 관계가 있어 $\lambda_3 = e^{i\alpha_2 T} \cdot \lambda_4 = e^{-i\alpha_2 T}$ 가 된다. 따라서 해의 안정성 여부를 나타내는 Trace는 주기 T를 가진 4개의 해로 구성된 행렬의 고유치들의 합으로 표현되어,

$$\text{Trace} = 1 + 1 + \lambda + \frac{1}{\lambda} \dots\dots\dots (4)$$

로 나타낸다(Deprit 와 Price 1965).

주기 궤도가 안정할 때는 | λ |가 단위 원상에 있게 되며, Trace가 0과 4 사이에 있을 때는 안정한 주기 궤도가 되고, 그 외의 값을 가질 때는 불안정한 주기 궤도가 됨을 알 수 있다(Hadjidemetriou 1985, Deprit 와 Price 1965).

III. 주기 궤도의 수치계산

제한 3체 문제에서, 식 (1)의 운동 방정식을 자세히 나타내면

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \cdot \partial x_2} & 0 & 2 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \cdot \partial x_2} & \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (5)$$

와 같이 표현되고, 식 (5)의 주기해를 찾는 방법은 일반적인 Newton-Raphson 방법과 유사하다. $0 \leq t \leq T$ 에서 계산된 식 (5)의 해가 주어지면 함수 $f(x^k + \Delta x^k, t)$ 를 Taylor 전개한 것이 x^{k+1} 를 계산하기 위한 다음과 같은 방정식이 된다.

$$\dot{x}^{k+1}(t) = f(x^k(t), t) + \frac{\partial f(x^k(t), t)}{\partial x} (x^{k+1}(t) - x^k(t)) \dots\dots\dots (6)$$

식 (6)에서 $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ 로 식 (1)의 오른쪽 항을 편미분한 Jacobi 행렬이다. 또 일반해는

$$x^{k+1}(t, x_0) = R^{k+1}(t, t_0) a^{k+1} + P^{k+1}(t, t_0) \dots\dots\dots (7)$$

이며, a 는 상수 벡터이고 R 은 제차 방정식의 해이고 P 는 비제차 방정식의 특이해이다. 따라서 주기 T 를 가진 해는 다음의 관계를 만족한다.

$$R(T+t, t_0) a + P(T+t, t_0) = R(t, t_0) a + P(t, t_0) \quad \dots\dots\dots (8)$$

일반성을 잃지 않고 $R(t, t_0) = I_4$, $P(t, t_0) = 0$ 으로 선택할 수 있으므로 식 (8)은

$$\{R(T+t_0, t_0) - I_4\} a = -P(T+t_0, t_0) \quad \dots\dots\dots (9)$$

로 된다. 그리고 식 (9)는 $a^{k+1} = x^{k+1}(0)$ 의 형태로 풀어지고, 이 값은 새로운 초기치가 되어 $x^{k+1}(t)$ 값을 반복하여 구하게 된다.

위와 같은 적분은 4차 Runge-Kutta 방법으로 수행하였으며, 전체적인 수렴값을 찾는 데는 Newton-Raphson 방법을 사용하였다. 그리고 한 궤도에서 시간에 따르는 에너지값(C)를 한 주기 동안 구해, $(C_{\max} - C_{\min}) / C_{\max} < 10^{-9}$ 를 만족할 때까지 주기 궤도로 판정하였다. 그렇지 않으면 이 조건이 만족할 때까지 초기조건을 조금씩 변형하면서 위 과정을 반복하였고, 주기 궤도가 구해질 때마다 Trace를 계산하였다. 이렇게 구한 주기 궤도는 $\bar{x}(T) - \bar{x}(0)$ 의 오차가 10^{-5} 이하이다.

태양-목성계에서의 맨 처음 초기조건은 Rabe(1961)와 같은 방법을 L_5 점에 적용하여 택했다. 이 초기조건으로 주기 궤도를 구한 후, 초기조건의 주기를 ΔT 만큼 변형하여 이를 새로운 초기조건으로 택해 처음 주기 궤도와 다른 주기 궤도를 차례로 구해 나갔다. 지구-달계의 경우는 Rabe와 Schanzle(1962)이 구한 초기조건을 하나 선택했으며, Deprit와 Price(1965)의 변환식으로 초기조건을 조정하여 주기 궤도로 수렴되는 초기조건을 선택해 태양-목성계와 같은 방법으로 주기 궤도를 구했다.

IV. 주기 궤도의 계산결과와 결론

지구-달계에서 주기 궤도를 1,600여개 구했는데, 그림 1은 그 주기 궤도의 몇 가지 예를 나타내며 표 1에 이들 주기 궤도에 대한 자료가 있다.

그림 3으로 알 수 있듯이 주기와 에너지 관계는 $T=21.142$ 부근에서 에너지가 급격히 증가하고 $T=24.3$ 근처에서부터는 주기가 증가함에 따라 에너지는 감소한다. 그리고 주기에 따라 에너지가 급격히 증가하는 부분을 그림 4처럼 확대해 보면 직선이 아니라 3차 곡선임을 알 수 있다. 즉, 1개의 주기 값에 대응되는 에너지가 3개되는 지역이 있다는 것이다. 이 지역이 시작되는 주기 궤도의 자료는 표 2에, 끝나는 주기 궤도의 자료는 표 3에 실었다. 그리고 같은 주

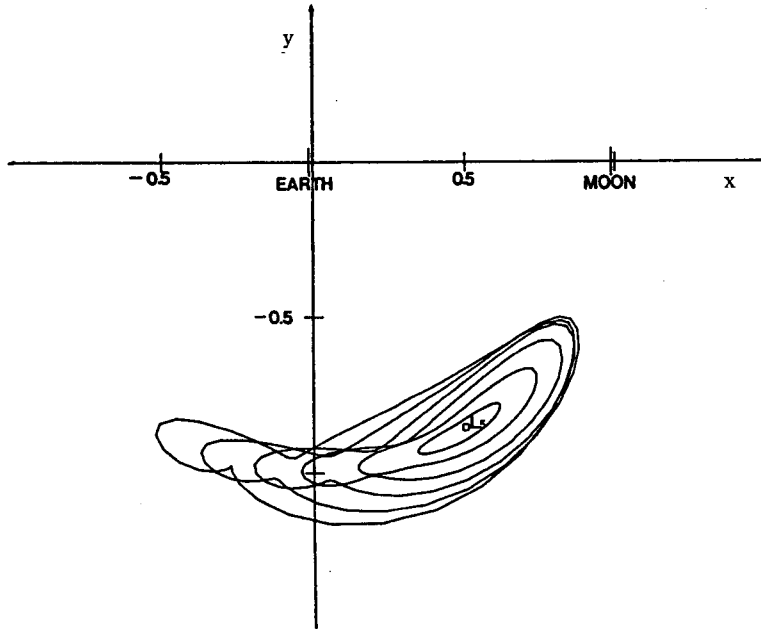


그림 1. 지구-달계에서 주기를 변화시켰을 때 주기 궤도의 몇 가지 예

표 1. 그림 1에 있는 지구-달계에서 주기 궤도의 초기조건과 특성

주기(T)	x_0	y_0	\dot{x}_0	\dot{y}_0	에너지(C)	Trace
21.11634063720	0.50287370352	-0.89200026274	-0.04014939212	-0.02141922507	3.00055340438	2.60394923916
21.14759063720	0.66705281008	-0.82510782670	-0.07529321131	-0.07745490284	3.00223755171	2.98590162576
21.17634063720	0.23209889525	-1.01455370186	-0.06106291206	0.01051711012	3.00382410312	3.37282489709
21.58134078979	-0.0704164805	-1.0474476650	-0.90703144447	0.00190423674	3.00560998531	2.30640045050
22.66934089661	-0.30615050505	-0.89331720423	0.10700081993	0.01210309807	3.00839193508	-0.35634484783
24.07434173584	-0.27994332511	-0.86256050077	0.15795889032	-0.05322599203	3.00994295819	3.98289741146

표 2. 지구-달계에서 하나의 주기값에 2개의 에너지 값이 대응되는 지역 중 시작되는 곳에 있는 주기 궤도의 초기조건과 특성

주기(T)	x_0	y_0	\dot{x}_0	\dot{y}_0	에너지(C)	Trace
21.14264063720	0.53099770688	-0.89787661555	-0.06617923792	-0.03608465830	3.00131451047	2.72285251536
21.14264063720	0.77830683846	-0.65887209251	0.00684561569	-0.06287780201	3.00295187696	3.23218082912

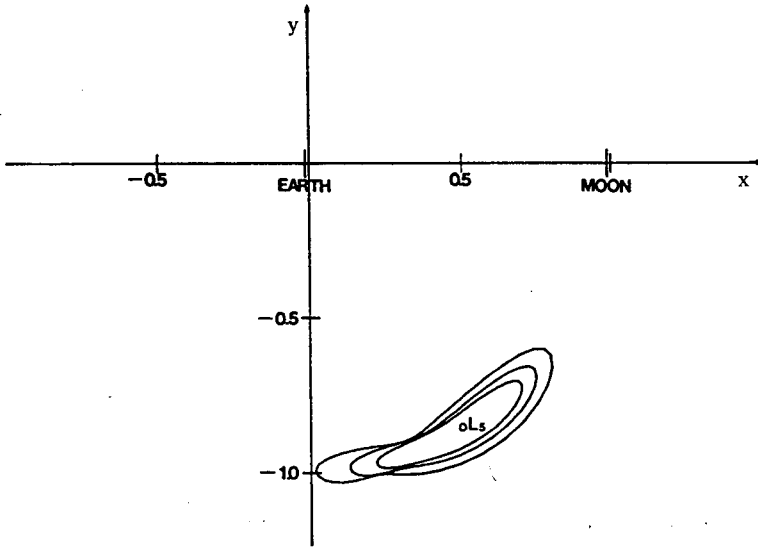


그림 2. 지구-달계에서 한 주기에 세 개의 에너지가 대응되는 주기 궤도의 예

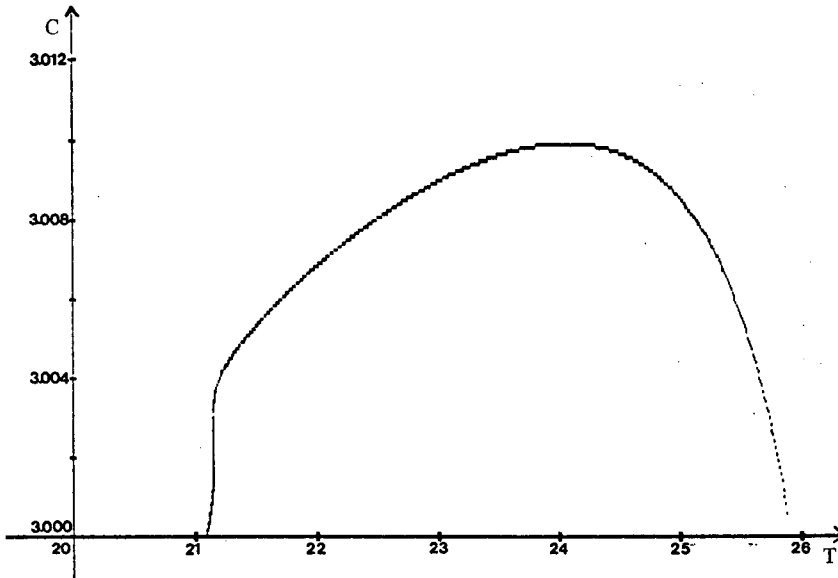


그림 3. 지구-달계에서 주기 궤도들의 주기와 에너지 관계

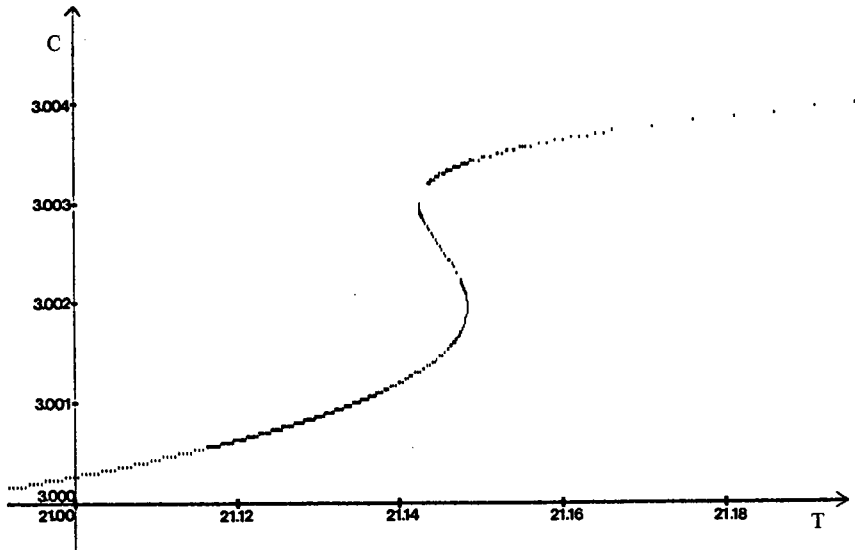


그림 4. 지구-달계에서 주기 하나에 대응하는 세 개의 에너지 값이 나타나는 영역

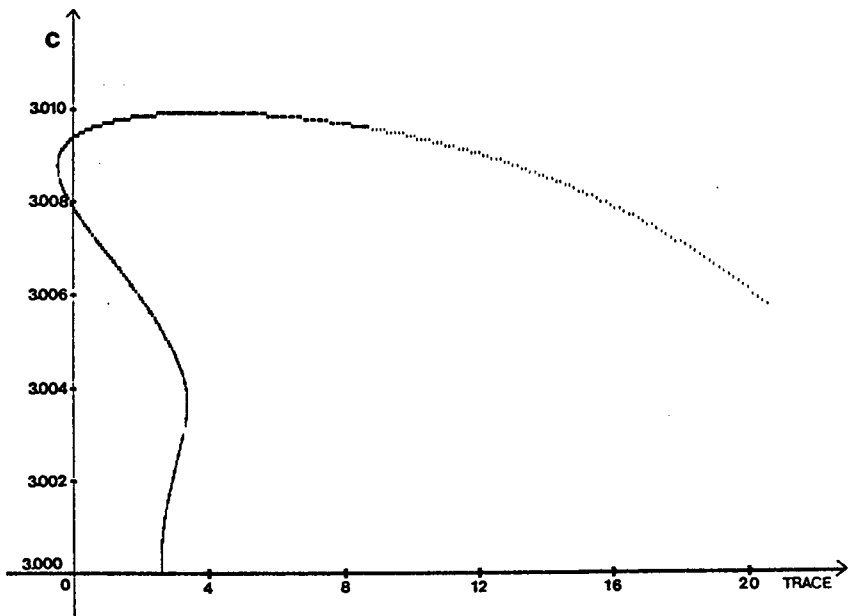


그림 5. 지구-달계에서 주기 궤도의 안정성(Trace)과 에너지와의 관계

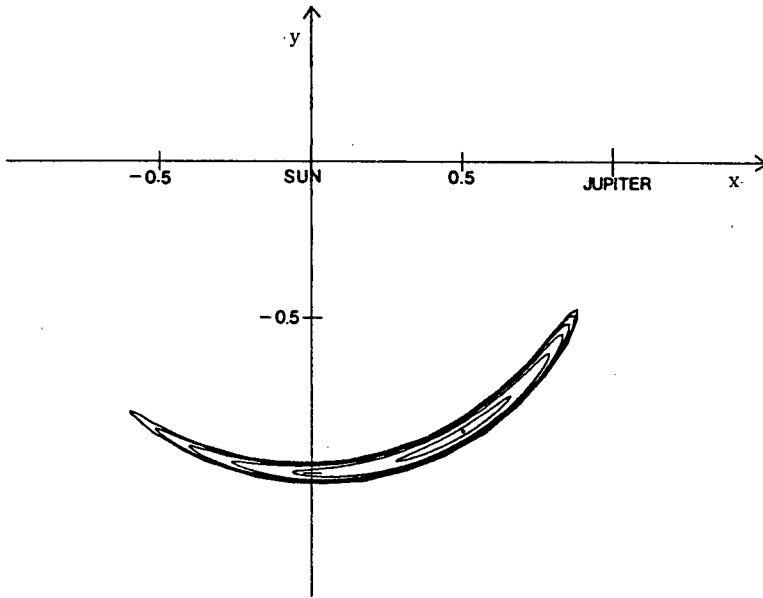


그림 6. 태양-목성계에서 불안정한 주기 궤도가 될 수 있는 주기 궤도 영역을 나타내는 6개의 주기 궤도

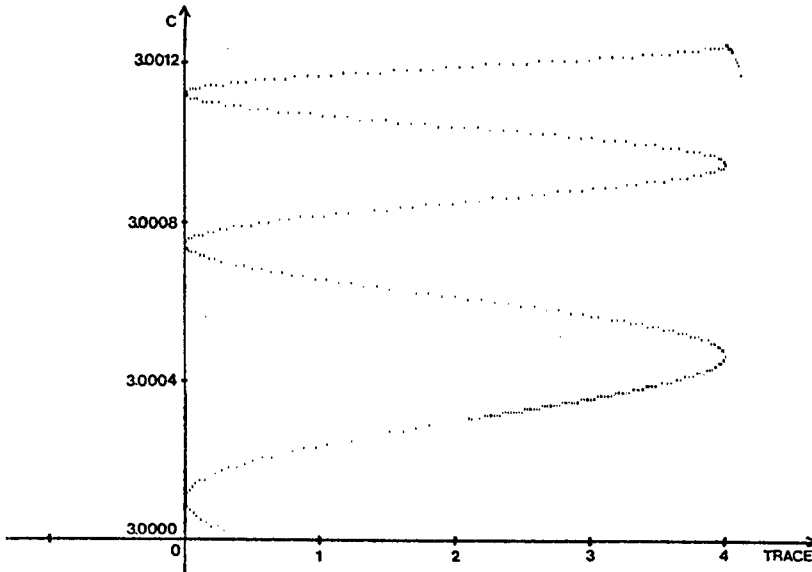


그림 7. 태양-목성계에서 주기 궤도들의 안정성(Trace)과 에너지 관계

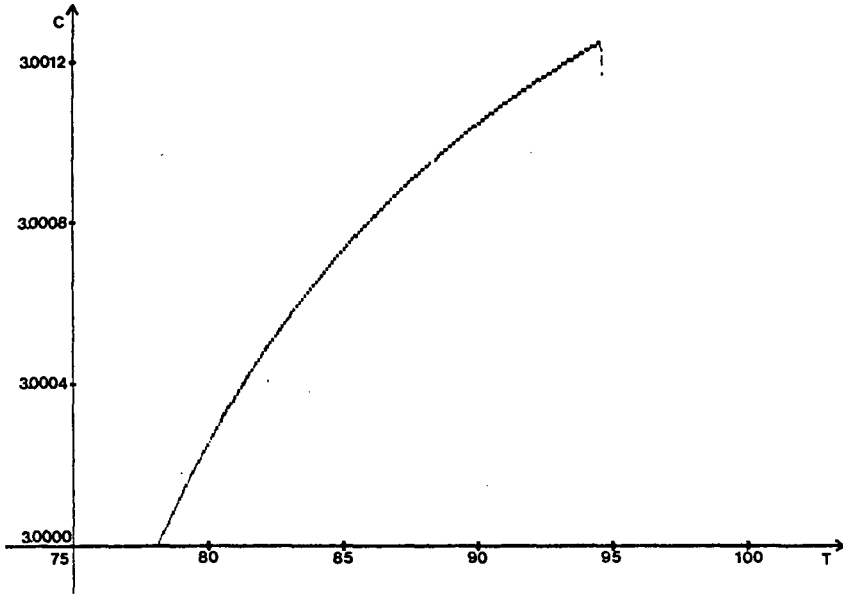


그림 8. 태양-목성계에서 주기 궤도들의 주기와 에너지 관계

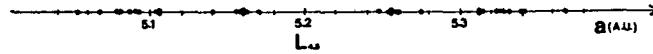


그림 9. Bien(1980)이 구한 18개의 소행성들의 궤도 진화 자료로 나타낸 $L_{4,5}$ 점과 Trojan 소행성들의 최소 장반경 ($L_{4,5}$ 점 왼쪽) 또는 최대 장반경 ($L_{4,5}$ 의 오른쪽)과의 관계

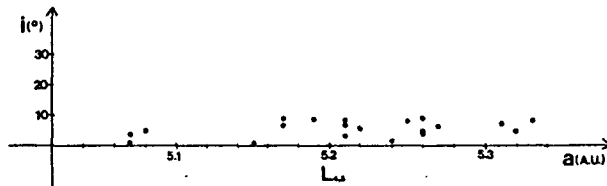


그림 10. 20개의 Trojan 소행성의 관측자료(Chapman 1978)로 나타낸 $L_{4,5}$ 점과 소행성들의 장반경과의 관계

표 3. 지구-달제에서 하나의 주기값에 3개의 에너지 값이 대응되는 지역 중 끝나는 지점에 있는 주기 궤도의 초기조건과 특성

주기(T)	x_0	y_0	\dot{x}_0	\dot{y}_0	에너지(C)	Trace
21.14844063720	0.63290880418	-0.84825539054	-0.07745227764	-0.06708950318	3.0020005045	2.90855872239
21.14844063720	0.6483643666	-0.88756435990	-0.13179661038	-0.10341778416	3.00340522949	3.35273992951

표 4. 그림 2에 있는 지구-달제에서 1개의 주기값에 3개의 에너지 값이 대응되는 지역에 있는 주기 궤도의 초기조건과 특성

주기(T)	x_0	y_0	\dot{x}_0	\dot{y}_0	에너지(C)	Trace
21.14664063720	0.71265457941	-0.82541195114	-0.10472468677	-0.11567148465	3.00334614410	3.34129660046
21.14664063720	0.69130782972	-0.80449968369	-0.06994847809	-0.08323479974	3.00237840420	3.03401307521
21.14664063720	0.54008896212	-0.89997256053	-0.07507876895	-0.04136266537	3.00158443118	2.78814215211

표 5. 태양-목성계에서 구한 주기 궤도의 초기조건과 특성

주기(T)	x_0	y_0	\dot{x}_0	\dot{y}_0	에너지(C)	Trace
78.24362640381	0.51658763254	-0.84935329268	0.00699198801	0.00413452421	3.0000229490	0.29667776387
78.79362640381	0.37397012824	-0.91693075586	0.01280455390	0.00576106200	3.00010034111	0.00008913373
80.39362640381	0.41157321022	-0.93232736028	-0.02690216204	-0.01143830649	3.00030032981	1.99917037487
83.17362976074	-0.12300380539	-0.99880691185	-0.00948002630	0.00251049575	3.00058077606	2.76419131915
87.42362803942	0.14870860964	-0.95856449412	0.04419083300	0.00785994224	3.00089897440	3.25769234480
91.02362803942	-0.45072082762	-0.90456528692	-0.01351986582	0.00831856228	3.00109864073	0.20450849625
94.52362803941	0.43217665119	-0.94562142721	-0.05428501456	-0.02302780761	3.00124594849	4.01136567832

표 6. 그림 6에 있는 태양-목성계에서 불안정한 위치에 있는 주기 궤도의 초기조건과 특성

주기(T)	x_0	y_0	\dot{x}_0	\dot{y}_0	에너지(C)	Trace
78.79362640381	0.37397012824	-0.91693075586	0.01280455390	0.00576106199	3.00010034111	0.00008913373
81.99362976075	0.51151783826	-0.82958954061	0.32111573253	0.01975941555	3.00047044540	3.99987232327
85.17362803943	0.83364435708	-0.55247056265	0.00326641212	-0.00336382653	3.00074404956	0.00034038178
88.27362803942	-0.16650343544	-0.96347379099	0.03371415732	-0.00481467314	3.00094917584	4.00051676892
91.47362803942	-0.40412453875	-0.93167218781	-0.02075077532	0.01042544677	3.00112019386	-0.00001208514
94.49762803942	-0.44627679110	-0.93974005683	-0.05499797781	-0.02437462287	3.00124632332	4.00005987212

기 $T=21.14664063720$ 에 해당하는 3개의 주기 궤도의 자료가 표 4에 있으며 이에 대응하는 주기 궤도 모양을 그림 2에 나타냈다. 그림 2는 주기는 일정해도 에너지가 증가함에 따라 주기 궤도의 크기가 커짐을 보여 주고 있다. 그림 5에 있는 주기와 Trace의 관계를 보면, 지구-달계 L_5 점 근처에서의 주기 궤도는 태양-목성계보다 안정성에 있어서 더 복잡하며, 불안정한 궤도가 더 많이 나타남을 알 수 있다. 그리고 $T=24.07934173584$ 이상부터는 주기가 증가함에 따라 주기 궤도도 불안정하기 시작하고 에너지값도 작아지기 시작한다. 불안정한 주기 궤도는 모양이 더욱 복잡해지며 움푹한 곳도 발달한다. 지구-달계에서의 주기 궤도는 L_5 점에서 달이 있는 방향과 반대 쪽으로 울퉁이 꼬리처럼 모양이 튀어나오는 것이 특징인데 이 쪽 방향이 달 방향보다 에너지 간격이 넓기 때문이라 생각된다.

태양-목성계에서도 L_5 점 근처에서 주기를 증가시켜 가며 490여개의 주기 궤도를 구했으며 그 주기 궤도의 몇 가지 예를 표 5에 나타냈다.

그림 7에서 보듯이 거의 모든 주기 궤도의 Trace가 0과 4 사이에 있으므로 태양-목성계의 L_5 점 근처에 있는 주기 궤도는 매우 안정하다고 할 수 있다. 궤도 모양이 길쭉하여 태양-목성계에서의 zero velocity 곡선모양과 흡사하고, 주기가 증가함에 따라 에너지 값은 거의 선형적으로 증가함을 그림 8에서 볼 수 있다. 표 6과 그림 6은, 그림 7에서 Trace가 0과 4 근처되는 6개의 지역에 있는 주기 궤도로서, 불안정해지기 쉬운 궤도를 나타낸다. 즉, 이들 지역은 다른 행성들의 섭동이나 기타 다른 약한 섭동에 의해서도 그 안정성이 위태롭게 될 수 있다. 이를 확인하기 위해, Bien(1980)이 18개의 Trojan 소행성의 궤도요소의 진화를 연구한 결과로 나타난 소행성들의 장반경을 그림 9에 나타냈다. 이를 보면 5.12AU와 5.29AU 근처에 틈이 나타난다.

이 장반경 값은 충분한 시간 동안 진화한 결과이므로 틈이 생기는 현상은 신빙성이 있다. 또한 그림 10은 20개 Trojan 소행성의 관측자료(Chapman 1978)를 그린 것인데, 이들 소행성은 그림 9에 있는 것과 2개만 제외하고 똑같은 소행성들로서 이심률이 0.15 이하이고 궤도 경사각도 10° 미만되는 소행성들이다. 그림 9와 그림 10에서 L_4 점과 L_5 점을 구별치 않았는데 L_4 점 근처의 주기 궤도와 L_5 점 근처의 주기 궤도의 특성이 같다고 생각했기 때문이다. 그림 10에서도 나타나듯이 5.12AU와 5.29AU에 틈이 있다.

그림 9의 결과는 인위적으로 소행성의 궤도를 진화시켜 본 것이고 그림 10은 실제 관측상태인데 두 경우가 거의 같은 현상을 나타냈다는 것은 5.12AU와 5.29AU 근처에서는 소행성이 목성의 중력 섭동 외의 다른 섭동을 받아 불안정한 궤도가 되어 틈이 생긴다고 할 수 있다. 그리고 이 두 거리는 그림 6의 불안정할 수 있는 가장 작은 궤도($T=78.79362640381$)가 태양에 가장 가까울 때의 거리와 가장 멀 때의 거리와 비슷하다. 따라서 실제로 이심률과 궤도 경사각이 작은 Trojan 소행성들은 5.12AU와 5.29AU에 해당하는 장반경을 갖지 못해 이 영역에서 이들 소행성들이 존재하기 힘들다는 것을 알 수 있다.

참고문헌

- Bien, R. 1978, *Astron. Astrophys.*, **68**, 295.
_____. 1980, *Astron. Astrophys.*, **81**, 225.
- Chapman, C. R. 1978, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, **16**, 33.
- Chebotarev, G. A., Belyaev, N. A. and Eremenko, R. P., 1974, *The Stability of the Solar System and Small Stellar Systems*, ed. Y. Kozai(Dordrecht: P. Reidel), pp.63-69.
- Danby, J. M. A. 1964, *Astron. J.*, **69**, 165.
- Deprit, A. and Henrard, J. 1967, *Astron. J.*, **72**, 158.
_____. 1969, *Astron. J.*, **74**, 308.
- Deprit, A. and Price, J. 1965, *Astron. J.*, **74**, 836.
- Erdi, B. and Presler, W. 1980, *Astron. J.*, **85**, 1670.
- Everhart, E. 1973, *Astron. J.*, **78**, 316.
- Goodrich, E. F. 1966, *Astron. J.*, **71**, 88.
- Hadjidemetrou, J. D. 1985, *Stability of the Solar System and Its Minor Natural and Artificial Bodies*, ed. V. Szebehely(Dordrecht: D. Reidel), pp.213-225.
- Henon, M. 1969, *Astron. Astrophys.*, **1**, 223.
- Rabe, E. 1961, *Astron. J.*, **66**, 500.
- Rabe, E. and Schanzle A. 1962, *Astron. J.*, **67**, 732.
- Schanzle, A. 1967, *Astron. J.*, **72**, 149.
- Szebehely, V. 1967a, *Astron. J.*, **72**, 7.
- Szebehely, V. 1967b, *Theory of Orbit*(New York: Academic Press), Ch. 1, 5, 8.
- Szebehely, V. and Nacozy, P. 1967, *Astron. J.*, **72**, 184.
- Taylor, D. B. 1981, *Astron. Astrophys.*, **103**, 288.