

〈論 文〉

河川 水質模型 시스템의 安定性 및 敏感度 分析

Stability and Sensitivity Analysis of Stream Water Quality System Model

沈 淳 輔* 韓 在 錫**
Shim, Soon Bo Han, Jae Seok

要 旨

本 論文의 目的은 河川 水質模型시스템이 安定性 및 敏感度理論에 의해 理論的으로 어떻게 分析되
며, 그 結果 模型化를 위한 數値分析의 信賴性과 水質 媒介變數의 變化에 따른 模型의 敏感性을 立
證하는 것이다.

無限 Fourier 級數를 利用하여 展開한 安定性理論은 有限差分法을 使用한 模型의 數値解法을 分析
하는 데 있고, 1階 線形狀態벡터式으로 表現되는 敏感度理論은 BOD 負荷, 流量, 溫度와 같은 水質
媒介變數의 變動效果를 理論的으로 分析하는 데 使用되었고, 그 研究 結果는 河川 水質模型시스템
의 信賴性을 파악할 수 있음이 입증되었다.

Abstract

The purpose of this paper is to study the following ;

(1) how the stability and sensitivity of a given stream water quality model can be analyzed theoretically by means of the stability theory and the sensitivity theory, and (2) point out that the results of this study prove that numerical analysis for the given stream water quality model is reliable, and the model is sensitive for the variations of parameters.

A stability theory which is described by the infinite Fourier series is used to analyze the numerical scheme of the model. The numerical scheme is used a backward implicit scheme.

A sensitivity theory which is described by the first order linear vector equation is used to analyze theoretically the effect of variations of water quality parameters such as BOD loads, flow rate, temperature. The results of sensitivity theory are of general applicability and are presented in a analytical form.

The results of this study seems to be satisfactory for the reliability of stream water quality model with respect to the numerical scheme and the variations of the water quality parameters.

* 忠北大學校 工科大學 土木工學科 教授

** 忠北大學校 大學院 土木工學科 博士過程

1. 序論

河川 水質模型 시스템에 대한 安定性 分析과 敏感度 分析은 시스템 模型의 開發과 解析에 있어서 重要的 要素이다.

一般的으로 拋物線型的 偏微分方程式으로 구성되는 河川 水質模型에 대한 數值解의 數值的 特性인 解의 安定性을 分析한다는 것은 容易한 것만은 아닌 것으로 알려져 있고, 數值解法에 의해 質量이 保存된다 하더라도 數值解의 安定性이 保障되는 것은 아니다.

또한, 敏感度 分析은 시스템에 대한 入出力 過程의 諸係數와 目的函數의 狀態變化가 最適解에 미치는 效果 즉, 주어진 시스템의 狀態와 媒介變數의 變化가 全體 模型에 미치는 影響을 決定하므로써 시스템의 信賴度 및 河川 水質의 最適管理를 위한 政策決定의 基準을 設定하는 데 필수적이다.

따라서, 本 研究目的은 河川 水質 模型化에 대한 安定性을 分析하기 위해 解析의 複雜性和 難解性을 줄이면서 模型의 基本的 特性을 갖는 一次元 河川 水質模型을 대상으로 有限差分法으로 模型化시킨후 安定性 分析理論을 통해 時間 및 空間 變化에 따른 解의 收斂性和 發散率을 理論적으로 解析하고, 또한 1階 線形벡터式으로 表現되는 敏感度理論을 利用하여 河川 水質에 影響을 미치는 BOD 負荷量, 流量, 水温 等の 媒介變數變化가 시스템의 主要 狀態變數인 DO 및 BOD에 미치는 影響을 理論的 考察을 통해 分析하고자 한다.

2. 基本理論의 定立

2.1 河川 水質模型化

一般的으로 自然河川에서의 一次元 水質模型은 質量粒子의 移送 및 分散過程과 生物化學的 反應에 의한 發生 및 消滅項의 複合現象으로 式(1)과 같이 表現할 수 있다.¹⁾²⁾

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(VP) = \frac{\partial}{\partial x} \left(E \frac{\partial P}{\partial x} \right) + S \quad (1)$$

여기서 P는 時間 및 空間變化에 다른 濃度, V는 平均流速, E는 分散係數 t는 時間, x는 空間을 나타내고, S는 DO 및 BOD에 대한 發生 및 消滅項으로 式(2)와 式(3)으로 나타낼 수 있다.

1), 3)

$$S(DO) = -K_1 b + (C_s - C) \quad (2)$$

$$S(BOD) = -K_1 b \quad (2)$$

여기서 C는 DO濃度, b는 BOD濃度, K₁은 脫酸素係數, K₂는 再曝氣係數, C_s는 飽和 DO濃度이다.

數值解의 安定性을 중심으로 分析하면 Explicit 方法보다는 Implicit 方法이 더 좋은 결과를 얻을 수 있고, 공간축에서의 變化되는 現象을 數值解析할 때에 보다 신속하고 편리한 技法으로 Backward scheme중 時間積分의 加重因子, θ, 를 고려한 V.W.B.I.(Variable Weighted Backward Implicit)差分法¹⁾³⁾인 式(4)를 利用하여 一次元 水質模型式(1)에 適用하고, 有限差分의 복잡한 형태를 간략화하기 위해 θf^{t+1} + (1-θ)f = f^{t+θ}로 定義하여 模型化시키면 式(5)와 같이 表現할 수 있다.

$$f(x, t) = \theta f_i^{t+1} + (1-\theta) f_i^t$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t} (f_i^{t+1} - f_i^t)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \theta \frac{(f_i^{t+1} - f_{i-1}^{t+1})}{\Delta x} + (1-\theta) \frac{(f_i^t - f_{i-1}^t)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{\Delta x} \left\{ \theta \left[\frac{(f_{i+1}^{t+1} - f_i^{t+1})}{\Delta x} - \frac{(f_i^{t+1} - f_{i-1}^{t+1})}{\Delta x} \right] + (1-\theta) \left[\frac{(f_{i+1}^t - f_i^t)}{\Delta x} - \frac{(f_i^t - f_{i-1}^t)}{\Delta x} \right] \right\}$$

$$\frac{P_j^{t+1} - P_j^t}{\Delta t} + V \frac{(P_j - P_{j-1})^{t+\theta}}{\Delta x} = E \frac{(P_{j+1} - 2P_j + P_{j-1})^{t+\theta}}{\Delta x^2} + S_j^{t+\theta} \quad (5)$$

2.2 安定性 分析理論

(1)式과 같이 常數階數를 포함하고 있는 偏微分方程式의 數值解는 誤差가 發生되고, 그 誤差成分은 解의 分散과 發散效果를 유발시킬 수 있다. 따라서, 그러한 特性을 表現하여 解析할 수 있는 無限 Fourier 級數式⁶⁾을 利用하여 (1)式에 대한 數值解인 式(5)를 展開시킬 수 있다.

$$P(X, t) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} A_m \exp[i(\alpha_m X - \beta_m t)] \quad (6)$$

여기서, A_m 은 級數의 m 次에 대한 常數係數, α_m 은 m 次의 波數(wave number)로서 $\alpha_m = 2\pi / L_m$, β_m 은 m 次成分에 대한 振動數로서 $\beta_m = 2\pi / T_m$, L_m 과 T_m 은 各各 m 次成分의 波長과 週期, $i = \sqrt{-1}$ 을 表한다.

이와같은 Fourier 級數中 1個成分에 대한 方程式의 離散化된 形態는 다음과 같다.

$$P_j^n(j\Delta X, n\Delta t) = A \exp[i(\alpha j\Delta X - \beta n\Delta t)] \quad (7)$$

따라서, 式(5)에 式(7)을 適用하여 양변에 있는 共通因數를 消去하고, 再調整하여 單純化시켜 整理하면 最終적으로 式(8)과 같이 表現할 수 있다.

$$\exp^{-i\beta\Delta t} = \frac{[1 - (1 - \theta)(aB - CD + G)]}{[1 + \theta(aB - CD + G)]} \quad (8)$$

여기서, $a = V \frac{\Delta t}{\Delta X}$

$$B = 1 - \exp^{-i\alpha\Delta X}$$

$$C = E \frac{\Delta t}{\Delta X}$$

$$D = \exp^{i\alpha\Delta X} - 2 + \exp^{-i\alpha\Delta X}$$

$$G = -S\Delta t \text{ 이다.}$$

Euler의 恒等式과 3角法則⁷⁾을 利用하여 B, D項과 같은 指數型을 式(9), (10)과 같이 變形시킬 수 있고, 이를 式(8)에 代入하고 整理하면 式(11)과 같다.

$$\begin{aligned} B &= 1 - \exp^{-i\alpha\Delta X} \\ &= 1 - \cos(\alpha\Delta X) + i \sin(\alpha\Delta X) \\ &= 2\sin^2\left(\frac{\alpha\Delta X}{2}\right) + i \sin(\alpha\Delta X) \\ D &= \exp^{i\alpha\Delta X} - 2 + \exp^{-i\alpha\Delta X} = 2\cos(\alpha\Delta X) - 2 \\ &= -4\sin^2\left(\frac{\alpha\Delta X}{2}\right) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\exp^{-i\beta\Delta t} = \frac{\left\{ 1 - (1 - \theta) \left[2\sin^2\left(\frac{\alpha\Delta X}{2}\right) (2C + a) \right. \right.}{1 + \theta \left[2\sin^2\left(\frac{\alpha\Delta X}{2}\right) (2C + a) \right.} \right. \\ \left. \left. + i a \sin(\alpha\Delta X) + G \right] \right\}}{\left. + i a \sin(\alpha\Delta X) + G \right]} \quad (11)$$

또한, 振動數 β 는 一般的으로 實數部 β_R 과 虛數部 β_I 를 갖는 複素數 $\beta = \beta_R + \beta_I$ 로 表現할 수 있고, 虛數부에 대한 $\exp(\beta_I t)$ 는 實際로 數值解를 增幅시키거나 減衰시킬 수 있는 時間從屬函數로 定義할 수 있다.⁷⁾ 그러나, 波數 α 는 實數이므로 振動數 β 도 實數이어야 하므로 $\beta_I = 0$ 이 되어 $\exp(\beta_I t) = \exp(i\beta t) = 1$ 과 같이 表現할 수 있다. 또한, 波의 進行에 영향을 미치는 傳播速度 C^* 는 波長과 週期成分에 의해 $C^* = L/T = \beta / \alpha$ 로서 구할 수 있다. 이와같은 理論을 土臺로 數值解에 대한 豫想되는 行路를 公式化할 수 있으므로 어떤 濃度の 分布도 河川의 下流方向에 대한 時間 및 空間變化에 따라서도 數值的 減衰現象이나 發散現象에 의해 그 形態가 變하지 않게 된다.

이와같은 數值解에 대한 分析方法은 偏微分方程式에 대한 Fourier 級數解의 各成分들의 安定性を 說明할 수 있다. 특히, 實際解의 減衰因子인 $\exp(\beta_I t)$ 에 대한 有限差分解의 減衰因子인 $\exp(\beta_I \Delta t)$ 의 比率를 收斂係數 R_1 이라 定義하면 式(12)와 같이 되어 (11)式의 絶對値와 같게 된다.

$$R_1 = \frac{\exp(\beta_I \Delta t)}{\exp(\beta_I t)} = \exp(\beta_I \Delta t) = \exp(i\beta \Delta t)$$

(12)

그러나, (12)식은 實際 計算에 있어서 虛數部가 있는 複素數型으로 構成되었기 때문에 이를 除去해야 되고, 加重因子 $\theta = 0.5$ 인 Implicit half scheme으로 誘導하면 최종적으로 式(13)과 같이 表現된다.

$$R_1 = \frac{\left[\left[1 - \left(\frac{x^2 + y^2}{4} \right) \right]^2 + y^2 \right]^{1/2}}{\left(1 + \frac{x}{2} \right)^2 + \left(\frac{y}{2} \right)^2} \quad (13)$$

여기서, $x = 2 \sin^2 \left(\frac{\alpha \Delta x}{2} \right) \left(2E \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + V \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) - S \Delta t$, $y = V \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(\alpha \Delta x)$ 이다.

또한, 實際解의 傳播速度 V 에 대한 數值解의 傳播速度 C^* 의 比率를 發散係數 R 라 定義하면 式(14)과 같이 된다.

$$R_2 = \frac{C^*}{V} = \frac{\beta_R}{\alpha V} \quad (14)$$

여기서 振動數의 實數部 β_R 를 구하기 위해 式(15)과 같은 方程式을 利用하면,

$$\exp^{i\beta_R \Delta t} = \exp^{i(\beta_R + i\beta_I) \Delta t} = \exp^{i\beta_R \Delta t} [\cos(\beta_R \Delta t) + i \sin(\beta_R \Delta t)] \quad (15)$$

결국 式(12)와 같은 형태로 表現되므로 式(15)에 있는 實數部와 虛數部의 값을 式(11) 및 (13)을 利用하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\cos(\beta_R \Delta t) = 1 - \frac{(x^2 + y^2)}{4} \quad (16)$$

$$\sin(\beta_R \Delta t) = y$$

따라서, 式(16)으로부터 實數部 β_R 를 式(17)과 같이 구할 수 있고, 이를 (14)식에 適用하면 發散係數 R 는 最終적으로 式(18)과 같이 表現된다.

$$\beta_R = \frac{1}{\Delta t} \arctan \left[\frac{y}{1 - \left(\frac{x^2 + y^2}{4} \right)} \right] \quad (17)$$

$$R_2 = \frac{1}{\alpha V \Delta t} \arctan \left[\frac{y}{1 - \left(\frac{x^2 + y^2}{4} \right)} \right] \quad (18)$$

2.3 敏感度 分析理論

河川 水質의 動的시스템을 狀態變數, 媒介變數, 時間의 函數로 나타내면 式(19)와 같은 線型 벡터式으로 표시할 수 있고, 시스템의 初期狀態 $x(0)$ 가 媒介變數 벡터 a 에 從屬된다고 假定하면 式(20)과 같다.⁸⁾⁹⁾¹⁰⁾

$$\dot{X} = F[X, t, a] \quad (19)$$

$$X(0) = X_0(a) \quad (20)$$

여기서 $F = [f_1, f_2, \dots, f_n]$ 인 n 階 벡터, $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ 인 n 階 狀態벡터이고, $a = [a_1, a_2, \dots, a_m]$ 인 m 階 媒介變數벡터로 時間 t 에 獨立이다.

初期條件式 (20)을 갖는 시스템方程式(19)의 解는 時間과 媒介變數와의 函數가 되고, 또한 媒介變數 벡터 a 의 變化에 따른 狀態 벡터 x 에 대한 敏感度를 구하기 위해 a 에 대한 式(19)를 微分하면 式(21)과 같이 나타낼 수 있다. 여기서, 狀態 벡터 x 가 時間 t 와 媒介變數 벡터 a 에 대한 連續이고, 微分可能하다면 (22)식과 같이 變形할 수 있고, 벡터 $\left(\frac{\partial x}{\partial a} \right)$ 는 a 에 대한 x 의 導函數이므로 式(23)으로 表現할 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right) = \left(\frac{\partial F}{\partial X} \right) \left(\frac{\partial X}{\partial a} \right) + \frac{\partial F}{\partial a} \quad (21)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x}{\partial a} \right) = \left(\frac{\partial F}{\partial a} \right) \left(\frac{\partial X}{\partial a} \right) + \frac{\partial F}{\partial a} \quad (22)$$

$$\frac{\partial X(t, a)}{\partial a} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{X(t, a + \Delta a) - X(t, a)}{\Delta a} \quad (23)$$

따라서, 式(23)으로부터 a 의 變化에 따라 x 에 미치는 效果를 알 수 있으므로 이를 敏感度係數와 한다.¹¹⁾ 이 敏感度係數는 常數로서 a 와 t 에 대한 函數로 表現할 수 있으므로 敏感度係數 벡터를 S 라 하면 다음과 같다.

$$S = S(t, a) = \frac{\partial X(t, a)}{\partial a} \quad (24)$$

多數의 a 가 存在하는 시스템에서 S 를 알 수 있다는 것은 a 의 變化에 대한 시스템의 比特性을 類推할 수 있다는 것을 뜻한다. 따라서, 媒介變

數의 變化特性이 시스템 構造의 變化樣相에 至大 한 影響을 미치게 된다. 이와같은 特性을 갖는 敏感度係數 벡터 S 는 式(22)와 (24)에 의해 1階 線形 벡터式으로 表現되는 敏感度方程式(25)을 구성할 수 있고, 이式은 시스템方程式(19)가 非 線形 시스템이라도 敏感度方程式은 線形이고, 敏感度方程式이 갖고 있는 階는 시스템方程式의 階 와 같은 特性을 갖는다.

$$\begin{aligned} \dot{\underline{S}} &= \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{a}} \right) \underline{S} + \frac{\partial F}{\partial \underline{a}} \\ \underline{S}(0) &= \left(\frac{\partial X(0)}{\partial \underline{a}} \right) \end{aligned} \quad (25)$$

3. 數值適用 및 考察

3.1 河川 水質模型의 安定性分析

2.2.1 節의 基本理論과 같은 理論的인 數值解의 安定性 研究에 대한 物理的인 의미는 다음과 같다. 式(13)과 같이 表現되는 收斂係數 R_1 이 1보다 큰 경우는 數值分析的인 減衰現象이 實際的인 物理的 減衰現象보다 더 작다는 것은 意味하고, 反對로 1보다 작은 경우는 數值分析的 減衰現象이 더 크다는 것을 나타낸다. 또한, 發散效果를 나타내는 式(18)의 R_2 가 1보다 큰 경우는 數值分析的 傳播速度가 더 크고, 1보다 작을 경우엔 實際的인 物理的 傳播速度가 더 작다는 것을 意味한다.

이와같은 物理的 意味를 土台로 水質模型에서 가장 重要한 媒介變數인 流速項과 分散係數項에 대한 時間 및 空間變化에 따라 全體 模型에 어떠한 影響을 미치는지를 分析하고자 式(8)의 $a = V \frac{\Delta t}{\Delta x}$ 와 $C = E \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ 을 時·空間的으로 變動시켜가면서 R_1 과 R_2 의 變化를 分析한 것이 Fig. 1.과 Fig.2.이다. 이때 Δx 와 Δt 는 任意的으로 250m와 300sec로 가정하여 數值計算하였다.

Fig. 1의 (a) 및 (b)와 같이 分散項을 一定하게 놓고, 質量의 移送項 $a = V \frac{\Delta t}{\Delta x}$ 를 變動시켜가면서 收斂精度(Fig.1(a))와 發散精度(Fig.1(b))를 分析한 結果 한개의 과장당 구간수가 많을 수록

더 正確한 數值解를 얻을 수 있고, 發散精度는 일정 구간내에서는 거의 비슷하게 分析되었지만 測定길이가 커질수록 심하게 變動됨을 알 수 있었다.

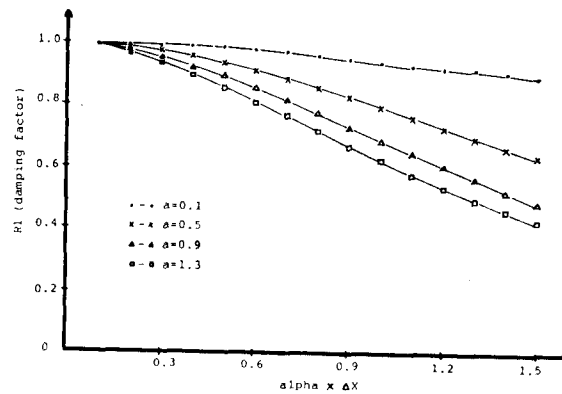


Fig. 1.(a). The dispersion(velocity) factors for values of $a = V \frac{\Delta t}{\Delta x}$ $E = 0$

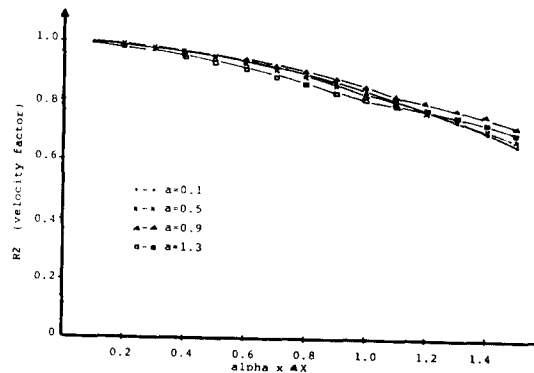


Fig.1.(b). The dispersion(velocity) factors for values of $a = V \frac{\Delta t}{\Delta x}$, $E = 0$

특히, 質量의 移送項의 變化에 따른 收斂靜度는 a 값에 따라 그 振動幅이 상당히 다르게 나타나는 것으로 보아 測定區間의 거리가 짧을수록 解는 安定되고(Fig.1(a)), 發散精度는 상당한 空間變化에도 불구하고 그 發散幅이 거의 變動없이 一定한 것으로 보아 移送項 變化에 따른 解의 安定度는 相對的으로 덜 敏減한 것으로 分析된다. (Fig.1(b)).

또한, 質量의 移送項을 一定하게 한 後 分散項 C 를 變動시켰을 경우 그 振動幅은 a 를 變動시켰

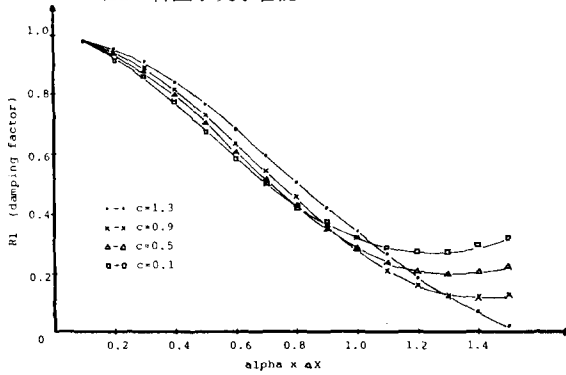


Fig.2.(a). The convergence(damping) factors for values of $c = E \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$, $a=1$

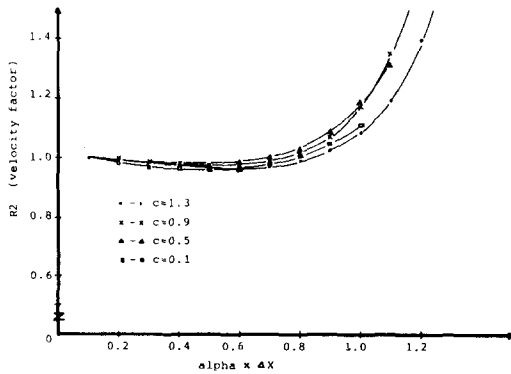


Fig.2.(b). The dispersion(velocity) factors for values of $c = E \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$, $a=1$

을 경우보다 더 큰 幅으로 安定되지 않고 있으며 (Fig.2.(a)), 發散係數도 더욱 크게 변하고 있었고, 一定한 空間變化後에는 數値分析的 傳播速度가 實際的 傳播速度보다 더 크게 되어 解의 不安定 原因이 됨을 알 수 있었다.

3.2. 河川 水質模型의 敏感度分析

河川 水質模型에 영향을 미치는 BOD負荷量, 流量, 溫度 等과 같은 媒介變數의 變化에 의한 狀態變數 BOD 및 DO에 미치는 敏感度 效果를 分析하고자 한다.

먼저, 河川의 한 地點에서 放出된 BOD負荷量의 變化에 대한 效果를 分析하기 위해 式(2), (3)을 式(25)에 適用한 結果, 敏感度시스템은 (26)式과 같이 表現되고, 그 解는 (27), (28)과 같이 表現할 수 있다.

$$\underline{\dot{S}}_b = -K_1 \underline{S}_b$$

$$\underline{\dot{S}}_c = -K_1 \underline{S}_b - K_2 \underline{S}_c \quad (26)$$

初期條件 $\underline{S}_b(0) = \left(\frac{\partial b(0)}{\partial a} \right) = 1$, $\underline{S}_c(0) = 0$

$$\underline{S}_b(t) = b(0) \exp^{-k_1 t} = \exp^{-k_1 t} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \underline{S}_c(t) &= C_s - [C_s - C(0)] \exp^{-k_2 t} + \frac{K_1 b(0)}{(K_1 - K_2)} \\ &\quad (\exp^{-k_1 t} - \exp^{-k_2 t}) \\ &= \frac{K_1}{K_1 - K_2} (\exp^{-k_1 t} - \exp^{-k_2 t}) \end{aligned} \quad (28)$$

따라서, 敏感度係數 \underline{S}_b 와 \underline{S}_c 는 Fig 3. 과 같이 $\underline{S}_b > 0$, $\underline{S}_c > 0$ 이고, 水中의 DO가 C_s 에 이를 때 敏感度係數는 거의 0點에 이르는 것으로 보아 DO가 소모될 때까지 河川의 水質狀態가 惡化됨을 알 수 있었다.

獨立變數로서 時間t를 고려하지 않고, 流量만 距離에 따라 變化한다고 假定하면 媒介變數에 의한 水質模型式을 式(29)과 같이 變形할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{db}{dL} &= -K_1(Q)b \\ \frac{dc}{dL} &= -K_1(Q)b + K_2(Q)(C_s - C) \end{aligned} \quad (29)$$

여기서, L은 距離, Q는 流量을 나타내고, 初期條件이 L = 0에서 $b(0) = b_0(Q)$, $C(0) = C_s$ 라 假定하면, 敏感度벡터의 初期條件은 $\underline{S}_b(0) = b' = \frac{\partial b_0}{\partial Q}$, $\underline{S}_c(0) = 0$ 이 되고 敏感度시스템은 (30) 式으로 表現된다.

$$\frac{d\underline{S}_b}{dL} = -K_1 \underline{S}_b - K'_1 b \quad (30)$$

$$\frac{d\underline{S}_c}{dL} = -K_1 \underline{S}_b - K_2 \underline{S}_c - K'_2 b + K'_2 (C_s - C)$$

여기서, K'_1 와 K'_2 는 各各 K_1 과 K_2 에 대한 流量 Q에 대한 導函數이다.

따라서, 式(29)과 (30)에 의해 敏感度係數 \underline{S}_b 와 \underline{S}_c 를 式(31)과 같이 表現할 수 있다.

$$\underline{S}_b(L) = (b'_0 - K_1 b_0 L) \exp^{-K_1 L}$$

$$\underline{S}_c(L) = A(\exp^{-K_1L} - \exp^{-K_2L}) + BL(K_1' \exp^{-K_1L} - K_2' \exp^{-K_2L})$$

$$A = \frac{1}{K_2 - K_1} \left[-K_1 b_0' - K_1' b_0 + \frac{K_1 b_0}{K_2 - K_1} (K_2' - K_1') \right]$$

$$B = \frac{K_1 b_0}{K_2 - K_1} \quad (31)$$

따라서, Fig. 4에서와 같이 敏感度벡터의 初期條件에 의해 敏感度係數 $\underline{S}_b(L)$ 은 指數的으로 減少하고, $\underline{S}_c(L)$ 은 DO濃도가 最小點에 이를 때까지 減少하다가 以後 큰 幅으로 變動하는 것으로 類推할 때, DO가 飽和狀態에 到達할 때까지 流量의 函數로 나타내고 있음을 알 수 있다.

正常狀態의 河川에서 水温 T가 空間에 따라 一定하고, C_s 가 T의 減少函數가 된다고 가정하면 다음과 같이 表現할 수 있다.

$$\frac{db}{dt} = -K_1(T)b$$

$$\frac{dc}{dt} = -K_1(T)b + K_2(T) \left[C_s(T) - c \right] \quad (32)$$

初期條件 $b(0) = b_0, c(0) = C(T)$

따라서, 敏感度시스템은 式(33)과 같이 表現할 수 있고, K_1', K_2', C_s' 는 T에 대한 導函數를 나타낸다.

$$\dot{\underline{S}}_b = -K_1 \underline{S}_b - K_1' b$$

$$\dot{\underline{S}}_c = -K_1 \underline{S}_b - K_2 \underline{S}_c - K_1' b + (K_2 C_s)' - K_2' C \quad (33)$$

初期條件 $\underline{S}_b(0) = 0, \underline{S}_c(0) = C_s'$

(33)式의 解인 敏感度係數벡터는 式(34)와 같이 表現되고, 이로부터 Fig. 5에서와 같이 $\underline{S}_b(t)$ 는 DO의 最小點까지 指數的 減少한 後, 初期條件 濃도까지 점차적으로 증가하고, 또한 $\underline{S}_c(\infty) = \underline{S}_c(0) = C_s'$ 됨을 分析할 수 있었다. 따라서 溫度變化에 따라 BOD, DO에 미치는 敏感度는 狀態變數 모두에 크게 作用됨을 입증할 수 있었다.

$$\underline{S}_b(t) = -K_1' b_0 t \exp^{-K_1 t}$$

$$\underline{S}_c(t) = C_s' + \frac{K_1 K_2' - K_1' K_2}{(K_2 - K_1)^2} \cdot b_0 (\exp^{-K_1 t} - \exp^{-K_2 t}) + \frac{K_1}{K_2 - K_1} b_0 (t)(K_1' \exp^{-K_1 t} - K_2' \exp^{-K_2 t}) \quad (34)$$

4. 結論

河川 水質模型시스템에 대한 安定性 分析과 敏感度 分析을 理論的 考察을 통해 研究한 結果는 다음과 같다.

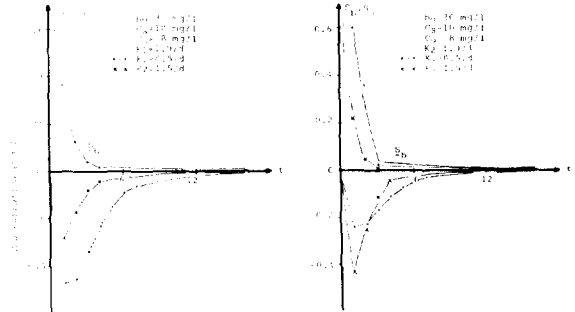


Fig.3. The sensivity of BOD AND DO($\underline{S}_b, \underline{S}_c$) with respect of BOD loading.

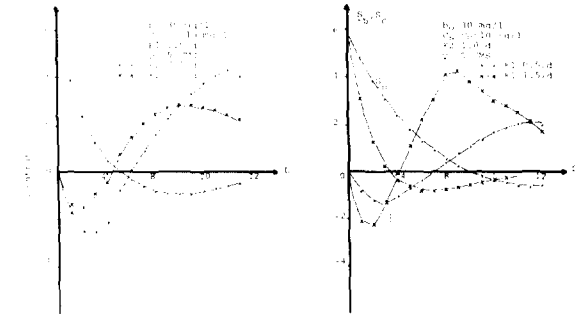


Fig.4. The sensitivity of BOD and DO($\underline{S}_b, \underline{S}_c$) with respect to flow rate.

1) 研究에 使用된 河川 水質模型을 質量粒子의 移送 및 分散課程, 生化學的 反應에 의한 發生 및 消滅項으로 構成하였고, 模型化를 위한 數值 解法으로 時間積分의 加重因子를 고려한 有限差 分法을 使用하였다 (式(1),(4) 참조).

2) 模型시스템의 安定性 分析을 위한 理論은 無限 Fourier 級數式을 利用하여 展開하였으며 궁극적으로 模型의 安定性을 판단할 수 있는 收斂係數와 發散係數를 誘導하였다 (式(6),(13),(18) 참조).

3) 또한, 模型의 安定性 分析을 위한 數值適用한 結果는 適用區間距離가 짧을 수록 解는 安定되며, 分散項을 一定하게 놓고 移送項을 變動시켰을 경우 收斂係數에 대한 振動幅은 비교적 安

定되었고, 反面에 分散項을 變動시켰을 경우는 移送項의 變動時보다 不安定한 것으로 分析되었다 (Fig. 1 및 Fig. 2 참조)

4) 1階 線型狀態벡터式으로 表現되는 敏感度 分析理論을 模型에 適用한 結果, BOD負荷量의 變化에 대한 狀態變數인 BOD와 DO에 대한 敏感度係數는 時間經過에 따라 水中의 DO가 消耗 될 때까지 最小點에 이르는 것으로 보아 河川의 水質狀態가 惡化됨을 알 수 있었고(Fig.3 참조), 流量의 變化時에는 流出地點으로부터 下流로 DO가 飽和狀態에 이를 때까지 流量의 函數로 나타나고 있음이 分析되었고(Fig.4)참조), 또한 河川의 溫度增加에 따라 河川의 水質은 상당히 敏感했으며, DO濃度가 減少하는 것으로 分析되었다 (Fig. 5. 참조).

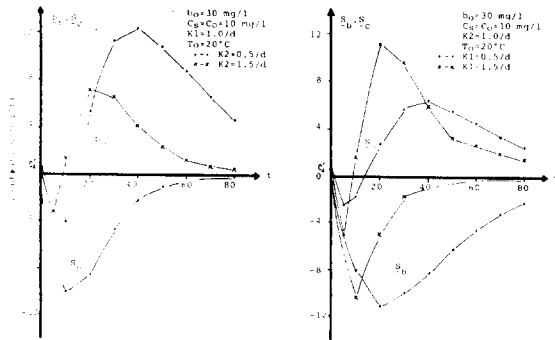


Fig.5. The sensitivity of BOD and DO(S_b , S_c) with respect to water temperature.

謝 辭

本 研究는 韓國科學射團의 1986年度 後半期 基礎研究費 支援課題(2년단위, 과제번호 862-1303-013-2)로 選定된 “都市河川의 水資源 最適管理를 위한 多次元 水質모델의 開發”의 研究 成果中 一部이며, 이에 研究費 支援에 謝意를 表한다.

參 考 文 獻

1) Clarence J. Velz, *Applied Stream Sanitation*, John Wiley and Sons, N.Y., 1984.

2) Peter A. Krenkel, Vladinir Novotory, *Water Quality Management*, Academic Press, 1980.
 3) Warren Viéssman, Claire Welty, *Water Management: Technology and Technology and Institutions*, Haper and Row Pub., N.Y., 1985.
 4) Leon Lapidus, George F. Pinder, *Numerical Solution of Partial Differential Equations in Science and Engineering*, John Wiley and Sons, 1982.
 5) M.L. James, G.M. Smith, J.C. Wolford, *Applied Numerical Methods for Digital Computation*, 3rd Ed., Harper and Row, 1985.
 6) Francis B. Hilderbrand, *Advanced Calculus for Applications*, 2nd Ed., Prentice-Hall, 1976.
 7) Keller, H., *The Numerical Solution of Parabolic Equations, in Mathematical Methods for Digital Computers*, John Wiley and Sons, 1960.
 8) Thomann, R.V., *System analysis and Water Quality Management*, EPA Inc., 1981.
 9) S.Rinaldi, R.Soncini-Sessa, H. Stehfest, H. Tamura, *Modeling and Control of River Quality*, McGraw-Hill, 1979.
 10) Arthur E. Bryson, Jr., Yu-Chi Ho, *Applied Optimal control*, John wiley and Sons, 1975.
 11) A. Ramachandra Rao, Nurinisa Uaul, “Sensitivity analysis of lumped linear System Models of the rainfall-runoff process”, Purdue Univ. Technical Report 43, 1973.
 12) Stehfest, H., “Decision Theoretical remark on sensitivity analysis”, Report II ASA RR-75-3, International Institute for Applied System Analysis, Laxenburg, Austria, 1975.
 13) Louck, D.P. and H.D. Jacoby, “Flow regulations for Water quality Management” in *Models for managing Regional Water Quality*, Harvard Univ. press, Mass., 1972.
 14) Cruz, J.B., *Systems Sensitivity Analysis*, Dowden, Hutchin Son and Ross, 1973.