

## 흐름에 의한 천해파의 비선형 굴절 및 회석

윤 성 범\*

- |          |          |
|----------|----------|
| 1. 서언    | 2. 지배방정식 |
| 3. 수치해석예 | 4. 결론    |

## 1. 서언

흐름에 의한 파의 변형은 주로 파향선이론에 의한 wave action 보존방정식에 의해 이루어져 왔다(Longuet-Higgins & Stewart 1961, Bretherton & Garrett 1969, Phillips 1966). 그러나 파향선 이론은 파의 회절효과를 고려하지 못하는 관계로 파향선이 서로 교차하는 caustics에서 파고가 발산하는 단점이 있다. 한편 Booij (1981), Liu(1983)와 Kirby(1984)등은 회절효과를 고려하는 포물형 선형 굴절·회절 모형을 발표하였으며, Kirby(1986)는 그의 선형모형에 2차 Stokes파의 비선형항을 포함시켰다. 그러나 Stokes파 이론은 연안류, 이안류등 대부분의 해안 흐름이 존재하는 천해영역에서는 적용할 수 없다.

Liu, Yoon & Kirby(1985)는 비선형 천해파의 거동을 가장 잘 나타내 주는 Boussinesq식에 기초한 포물형 비선형 굴절·회절 모형을 발표하였으며, 천해에서 수심변화에 의한 크노이드파의 변형을 성공적으로 계산한 바 있으나, 흐름의 영향은 고려되지 않았다. Yoon(1987)과 Yoon & Liu(1989a)등은 비선형 천해파 굴절·회절 모형에 흐름의 영향을 포함하여 발전시켰다. 이 논문에서는 Yoon & Liu(1989a)의 모형을 소개한다. 이 모형에서는 우선 흐름의 속도가 파의 궤도운동속도(orbital velocity)보다는 강하고, 파의 군속도(group velocity)보다는 약한 흐름에 대해

식을 전개했으며, 흐름변화의 거리축척(length scale)은 특성파장보다 크다고 가정하였다. 흐름과 파가 공존하는 경우에 대해 유도한 Boussinesq식을 기초로하여 포물형 굴절·회절 모형을 유도하였으며, 실제 고립된 vortex ring을 통과하는 천해파의 변형에 이를 적용하였다.

## 2. 지배방정식

특성진폭  $a'_0$ , 특성파진동수  $\omega'$ , 특성수심  $h'_0$ , 특성파장  $gh'_0 / \omega'^2$ 를 도입하여 천해파의 특성제수인 비선형성  $\epsilon$  과 이산성(dispersion)  $\mu^2$ 을 다음과 같이 정의한다.

$$\epsilon = \frac{a'_0}{h'_0} \ll 1, \quad \mu^2 = \frac{\omega'^2 h'_0}{g} \ll 1 \quad (1)$$

$\epsilon$  과  $\mu^2$ 은 크기의 order가 같다고 가정한다. 이를 기초로 파와 흐름이 공존하는 영역에 대해 유도한 흐름의 연속방정식과 운동방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \zeta_c}{\partial t} + \frac{\mu}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial x_i} [Du_{ij}] = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_{ij}}{\partial t} + \mu u_{ij} \frac{\partial u_{ij}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial \zeta_c}{\partial x_i} + \frac{\epsilon^2}{\mu D} \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_i} = 0 (\mu^3) \quad (3)$$

여기서

$$S_{ij} = h \langle u_{wi} u_{wj} \rangle + \frac{1}{2} \langle \zeta_w^2 \rangle \delta_{ij} \quad (4)$$

는 천해파의 잉여응력(radiation stresses)이며,  $\langle \quad \rangle$ 은 파의 한 주기에 대한 시간평균을 의미하고,  $\delta_{ij}$ 는 Kronecker Delta함수이다. 또한 전 체수심 D와 유속  $u_n$ 는 다음과 같다.

$$D = h + \mu^2 \zeta c \quad (5)$$

$$u_n = u_{n0} + \frac{\epsilon^2}{\mu} \frac{\langle \zeta_w u_{n0} \rangle}{(h + \mu^2 \zeta_c)} \quad (6)$$

여기서 첨자 c와 w는 각각 흐름(current)과 파(wave)성분을 표시한다. 또한 파에 대한 Bouesinesq식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \zeta_{wi}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} [(D + \epsilon \zeta_w) u_{wi} + \mu \zeta_w u_{wi} - \epsilon \langle \zeta_w u_{wi} \rangle] = 0, \quad (i = 1, 2) \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_{wi}}{\partial t} + \mu u_{wi} \frac{\partial u_{wi}}{\partial x_i} + \mu u_{wi} \frac{\partial u_{wi}}{\partial x_i} + \epsilon u_{wi} \frac{\partial u_{wi}}{\partial x_i} \\ & - \epsilon \langle u_{wi} \frac{\partial u_{wi}}{\partial x_i} \rangle + \frac{\partial \zeta_w}{\partial x_i} - \mu^2 \frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \left( h \frac{\partial u_{wi}}{\partial t} \right) \right] + \mu^2 \frac{h^2}{6} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_{wi}}{\partial t} \right) \right] \\ & + \mu^3 \frac{h^2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ u_{wi} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_{wi}}{\partial x_i} \right) \right] = 0 (\mu^4) \end{aligned} \quad (i, j, k = 1, 2) \quad (8)$$

흐름지배방정식(2) 및 (3) 그리고 파지배방정식 (7) 및 (8)은 파의 잉여응력  $S_{ij}$  및 Doppler-shift효과(이류항)에 의해 상호작용하고 있음을 알 수 있다. 식 (7)과 (8)은 유한차분 또는 유한 요소기법을 이용하여 수치해석할 수 있으나, 파의 수면형을 자세히 표현하기 위해서는 격자간격이 좁아지고 따라서 미지수가 증가하며 또한 비정상류이므로 계산시간 증대등 여러가지 어려운 점이 있다. 파의 수면형  $\zeta_w$ 는 매우 급하게 변화하지만, 파의 진폭(envelope)은 파의 수면형보다 훨씬 완만히 변하므로 식 (7)과 (8)을 파의 진폭에 대한 식으로 변형하면 격자간격을 넓게 잡을 수 있어 경제적인 것이다. 우선 식 (7)과 (8)의

시간미분항을 제거하기 위해 파의 유속벡터  $\vec{U}_n$ 와 수면변위  $\zeta_w$ 를 파의 주기성을 고려하여 표현하면 다음과 같다.

$$\vec{u}_n = \frac{1}{2} \sum \vec{u}_n(x) e^{in}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (9)$$

$$\zeta_w = \frac{1}{2} \sum \zeta_n(x) e^{in}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (10)$$

여기서  $\vec{u}_n$ 과  $\zeta_n$ 은 각각 유속벡터와 수면변위의  $t=0$ 에서의 값을 나타낸다. 식(9)와 (10)을 식(7)과 (8)에 대입하고 각각의 Fourier 조화성분 n에 대해 정리한 다음, 완전흐름 및 수심일 때 두개의 식을 결합(combine)하여 수면변위  $\zeta_w$ 만을 포함하는 하나의 식을 얻을 수 있다. 이 식에서는 식 (7) 및 (8)과는 달리 비정상성(unsteadiness)이 제거되었으며 미지수가  $\zeta_n$  하나로 줄어들어 수치해석상 용이하나,  $\zeta_n$ 이 아직도 x, y에 대한 주기성을 포함하고 있어 격자간격이 좁아져야하고, 영역의 모든 경계에서 경계조건을 필요로 한다. 이러한 단점을 제거하기 위해 진폭함수  $\Psi_n$ 을 도입하여 파의 전파방향 x에 대한 주기성을 제거한다.

$$\zeta_n = \psi_n(x, y) e^{in \int a \cdot \frac{1}{2} dx} \quad (11)$$

여기서  $d(x)$ 는 기준수심이다. x방향으로의 주기성을 제거하였으므로, 진폭함수  $\Psi_n$ 은

$$\begin{aligned} 0 \left( \frac{\partial \Psi_n}{\partial y} \right) & \sim 0(\mu), \quad \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial y^2} \sim 0(\mu^2), \\ 0 \left( \frac{\partial \Psi_n}{\partial x} \right) & \sim 0(\mu^2), \quad \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial x^2} \sim 0(\mu^4), \\ \frac{\partial^4 \Psi_n}{\partial x^4} & \sim 0(\mu^6) \end{aligned} \quad (12)$$

으로 가정할 수 있으며, 식(11)을 이용하여  $\zeta_n$ 의 지배방정식에 대입하여 다음의 포물형 진폭 지배방정식을 얻는다.

$$2in \left( \frac{D}{A} + 2\mu U \right) \frac{\partial \Psi_n}{\partial x} + D \left( 1 + \frac{\mu U}{A} \right) \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial y^2} + \left[ \frac{\partial D}{\partial y} + 2i\mu nV + 2\mu A \right] \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\partial U}{\partial y} ] \frac{\partial \Psi_n}{\partial y} + \lim \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{D}{\sqrt{D}} + 2\mu U \right) \\
 & + n^2 \left[ 1 - \frac{D}{d} - \mu \frac{U}{\sqrt{D}} \left( 1 + \frac{D}{d} \right) + \frac{\mu^2 n^2 D}{3} \right. \\
 & \left. \left( 1 - \frac{4\mu U}{D} \right) - \frac{\mu^2 U^2}{D} \left( 1 - \frac{4\mu U}{\sqrt{D}} \right) \right] \\
 & - 2i\mu n \frac{V}{D} \frac{\partial D}{\partial y} - i\mu^2 n \frac{V}{\sqrt{D}} \frac{\partial U}{\partial y} - \\
 & i \cdot i\mu n \frac{U}{\sqrt{D}} \frac{\partial d}{\partial x} \} \Psi_n = \frac{\epsilon}{2D} \sum_{s \neq n} [n(n+s) \\
 & - \frac{\mu U}{\sqrt{D}} n(n+2s)] \Psi_s \Psi_{n-s} + O(\mu^4) \quad (13)
 \end{aligned}$$

여기서 (U,V)는 흐름의 유속  $u_n$ 의 x,y 성분이다. 이 식은 모든 주기성이 제거된  $\Psi_n$ 에 관한 식이므로 x방향의 격자간격을 크게할 수 있으며, 또한 포물형 (parabolic) 식이므로 하류단 (down-wave side)에서의 경계조건을 필요로 하지않아 문제해석이 타원형 (elliptic)식에 비해 훨씬 용이하다. 지면관계상 식의 자세한 유도과정은 생략하였으나 Yoon(1987) 및 Yoon & Liu (1989a)등에서 자세한 것을 얻을 수 있다.

### 3. 수치해석예

실제 흐름과 파의 상호작용을 규명하기 위해서는 식(2), (3) 및 (13)을 동시에 풀거나, 반복적으로 흐름장과 파랑장을 개선시켜 줄 수 있으나, 용이한 일은 아니다. 본 연구에서는 흐름장이 주어졌을 경우 식(13)을 이용하여 흐름에 의한 파의 굴절 및 회절만을 고려하기로 한다. 파랑장의 수치해를 구하기 위해 식(13)을 Crank-Nicolson 법에 의해 유한차분화시키고 비선형항은 반복법으로 처리하였다.

수치해석의 예로써 일정수심상에 존재하는 고정 vortex ring에 의한 크노이드파의 굴절 및 회절을 택하였다. 원형좌표계에서 vortex ring에 의한 흐름속도 및 수면변위는 다음과 같다.

$$V_r = 0$$

$$\begin{aligned}
 V_\theta &= \begin{cases} C_3 \left( \frac{r}{R_1} \right)^N, & r < R_1, \\ C_6 \exp\left[-\left(\frac{R_2-r}{R_3}\right)^2\right], & r > R_1, \end{cases} \\
 \zeta &= -\int_r^\infty \frac{V_\theta^2}{r} dr \quad (14)
 \end{aligned}$$

여기서  $V_r$  및  $V_\theta$ 는 각각 r과  $\theta$ 방향의 유속성분을 표시하며, 계수  $C_3$ ,  $C_6$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ 와 N은 vortex ring의 형상과 강도를 나타내준다(그림1 참조). 여기에 사용된 제반계수는 다음과 같다.

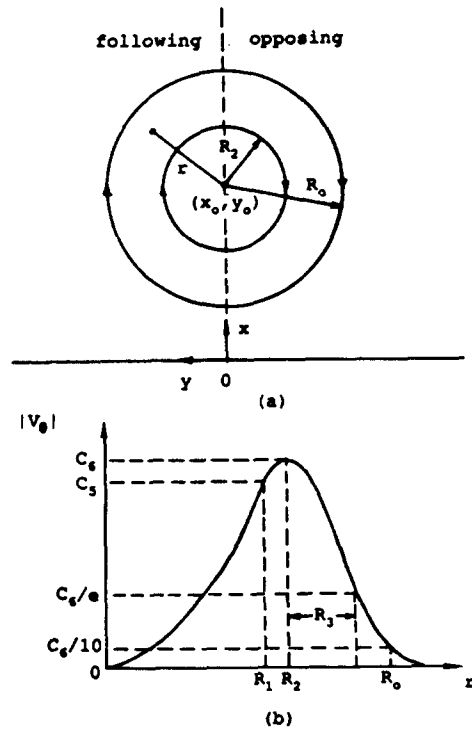


Fig. 1 Definition sketch and velocity profile of vortex ring.

$$\begin{aligned}
 x_0 &= 25, y_0 = 0, C_3 = 0.3092, C_6 = 0.9, \\
 R_0 &= 6\pi, R_1 = 11.222, R_2 = 4\pi, R_3 = 4.141, \\
 N &= 2. \quad (15)
 \end{aligned}$$

x=0을 따라 수심 10m, 파고 2m, 주기 19.43초의 균일 크노이드파를 입사파로 주었으며, 이에따른 각 Fourier 성분파의 진폭  $\Psi_n$ 은 Yoon (1987)에 의해 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \Psi'_1 &= 0.81701 \text{ m}, \quad \Psi'_2 = 0.40683 \text{ m}, \quad \Psi'_3 = 0.16197 \text{ m} \\ \Psi'_4 &= 0.05756 \text{ m}, \quad \Psi'_5 = 0.01917 \text{ m}, \quad \Psi'_6 = 0.00610 \text{ m} \\ \Psi'_7 &= 0.00186 \text{ m}, \quad \epsilon = 0.093, \quad \mu^2 = 0.107 \end{aligned} \quad (16)$$

그림2는 vortex ring에 의한 파향선을 나타내  
 었는 바, vortex ring의 좌측에서는 파와 흐름이  
 같은 방향이어서 파향선이 벌어지므로 진폭감소  
 가 예상되며, 우측에서는 파와 흐름이 반대방향  
 이므로 파향선이 수렴하고 caustics가 발생하여  
 진폭의 증가가 예상된다. 이 caustics 부근에서  
 굴절만을 고려하는 파향선이론에 기초한 에너지  
 보존방정식이 사용될 수 없음을 명백하며, 이 경  
 우 파방선 방향의 에너지전달을 가능케 해주는  
 회절효과가 고려되어야 한다. 식(13)에 의한 수  
 치해결을 구하고 그 결과를 식(13)에서 비선형항을  
 제거한 선형모형에 의한 결과와 비교도시하였다.  
 그림3은 각각의 단면에서 파고를 나타낸 바, 파  
 향선도에 의해 예상되었던 caustics부근에서의  
 파고증폭이 잘 나타나 있으며, 비선형이론에 의  
 한 증폭비가 선형파보다 훨씬 작은 것으로 보아  
 비선형항이 회절효과를 증가시켜주는 것을 알 수  
 있다.  $t=0$ 에서의 수면형을  $y=-50, -10, 10$ 을  
 따라 그림4에 나타내었다.  $y=-50$ 을 따라서는  
 vortex에 의한 흐름의 영향이 거의 없어 수면형  
 이 입사파와 같은 균일 크노이드파임을 알 수 있  
 고,  $y=-10$ 은 caustics가 존재하는 곳이어서 파

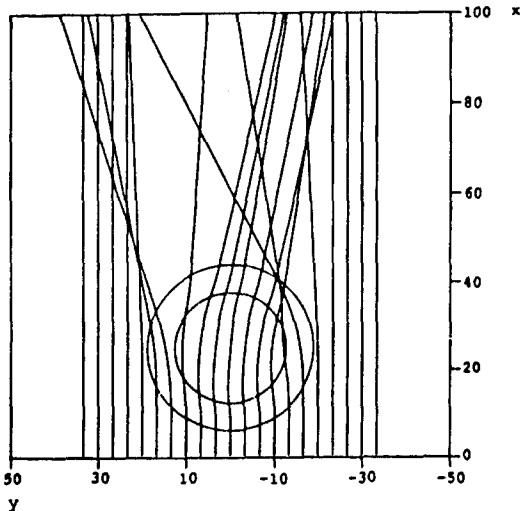


Fig. 2 Wave ray pattern over vortex ring.

고 증가했음을 보이며, 반대방향의 흐름에 의  
 해 파장이 감소되었음을 알 수 있다.  $y=10$ 을 따  
 라서는 정반대로 같은 방향의 흐름에 의해 파고  
 감소와 파장의 증가를 보인다. 선형이론과 비선  
 형이론에 의한 수면형의 차이가 현저함을 알 수  
 있는데, 비선형이론에 의한 수면형은 평균해수면  
 에 대해 상하대칭임을 알 수 있다. 그림5(a)와  
 (b)는 선형 및 비선형이론에 의한 수면변위의 등  
 수면선을 도시한 바, 그림2의 파향선도에서 예상  
 되는 caustics와 geometric shadow의 위치가 정  
 확하게 재현되어 있음을 볼 수 있다.

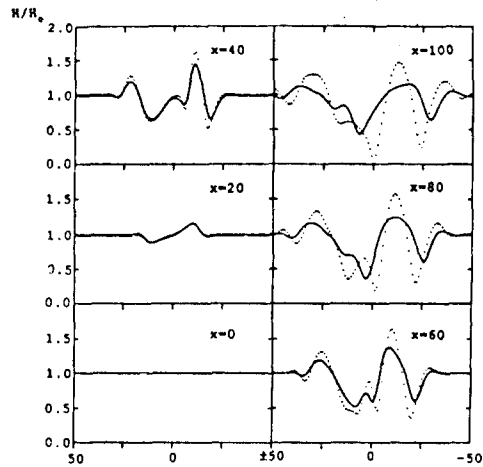


Fig. 3 Normalized wave height  $H/H_0$  along  $x = \text{const.}$ , comparison between linear and non-linear solutions:  $\cdots$ , linear;  $—$ , non-linear.

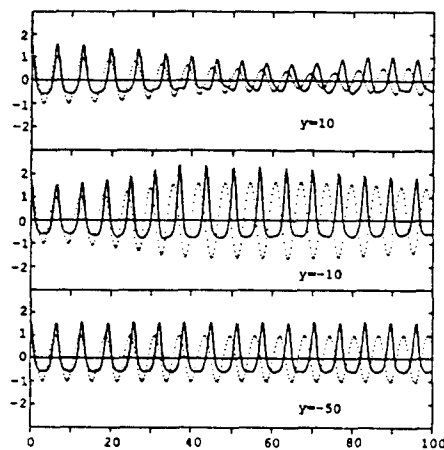


Fig. 4 Instantaneous free-surface profiles  $\zeta_0$  along  $y = \text{const.}$ , comparison between linear and non-linear solution:  $\cdots$ , linear;  $—$ , non-linear.

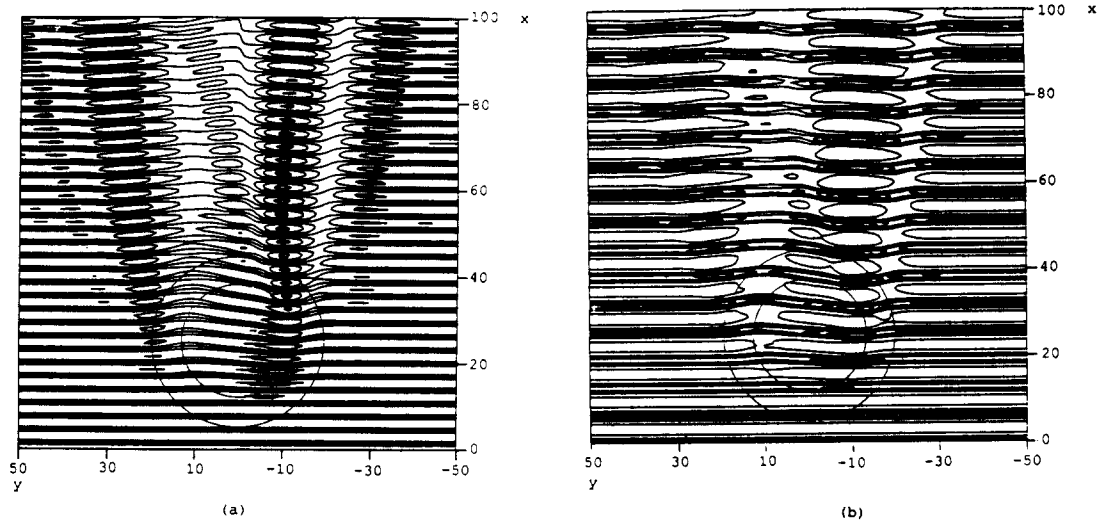


Fig. 5 Contour plot of instantaneous free-surface displacement over vortex ring. (a) linear and (b) nonlinear results with contour increments of 0.5.

#### 4. 결론

이 연구에서는 천해파와 흐름의 상호작용을 규명할 수 있는 지배방정식을 유도하고 특히 천해파의 기동을 쉽게 해석할 수 있도록 포물형 근사식을 유도하였다. 실제 분세에의 적용은 수치계산의 복잡성을 피하기 위해 고정된 흐름에 의한 크노이드파의 굴절 및 회절만을 다루었다. 실제 파와 흐름이 공존할 경우 흐름은 파에 굴절 및 회절 효과를 주고, 파는 흐름에 파의 잉여응력(radiation stresses)을 통한 흐름의 변형이 가해진다. 가장 대표적인 예가 쇄파의 잉여응력에 의한 연안류 및 이안류의 발생이라 할 수 있다. 실제 실험에 의하면 파가 흐름에 미치는 영향은 잉여응력을 통한 것 뿐만 아니라, 흐름의 난류성분(turbulence)을 증가시켜 흐름의 바닥마찰계수를 증가시켜 주는 역할도 매우 중요함을 보여주고 있다. 이 연구에 대한 기초적 연구로써 Jonsson (1963), Grant & Madsen(1979), Ismail & Wiegel(1983), Fredsøe(1984), Yoon & Liu (1989b)등을 들 수 있다.

#### 참고 문헌

1. Booij, N. 1981 "Gravity waves on water with nonuniform depth and current." *Rep. 81-1, Dept. of Civ. Engrg., Delft Univ. of Tech., Delft.*
2. Bretherton, F.P. & Garrett, C.J.R. 1969 "Wave trains in inhomogeneous moving media." *Proc. Roy. Soc. Lond., A302, pp. 529-554.*
3. Fredsøe, J. 1984 "Turbulent boundary layer in wave-current motion," *J. Hydraulic Engrg., ASCE, 110, No. 8, pp. 1103-1120.*
4. Grant, W.D. and Madsen, O.S. 1979, "Combined wave and current interaction with rough bottom," *J. Geophy. Res., 84, pp. 1797-1808.*
5. Ismail, N.M. & Wiegel R.L. 1983 "Opposing wave effects on momentum jets spreading rate," *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Engrg., ASCE, Vol. 109, No. 4, pp. 465-483.*
6. Jonsson, I.G. 1963 "Measurements in the turbulent wave boundary layer," *Int. Assoc. Hydr. Res., 10th Congr. London, 1, pp. 85-92.*