〈講 座〉

波動理論 소개(Ⅰ)

金 泰 麟*

記 號

$C(=L/T)$	: 波動의 進行速度	u, w	: 수평, 수직속도
d	: 水深	$\vec{V}$	: 속도 벡터
g	: 重力加速度	∇	: 微分연산자 $[i\frac{\partial(\ )}{\partial x}+j\frac{\partial(\ )}{\partial z}]$
H	: 彼高	η	: 自由水面
$k(=2\pi/L)$	: 波數(Wave number)	ϕ	: 속도포텐셜
L	: 波長	ρ	: 流體密度
p	: 壓力	$\sigma(=2\pi/T)$	: 角周波數
T	: 週期		

Ⅰ. 序 論

本 講座에서 다루고자 하는 波動(Water waves)은 重力하에서 自由水面을 가진 水流의 不定流(Unsteady free surface flow)를 말하여 통상 壓力波(Pressure wave)와 구별하기 위하여 重力波(Gravity waves)라 불리운다. 自然界에는 海上의 바람에 의해 생성되는 暴風波(Storm waves)로 부터 河川에서의 洪水波(Flood waves), 港灣에서의 靜振(Seiche), 河口에서의 高潮波(Tidal bores)나 水路에서 般船의 運航에 의해 생기는 水面의 流動, 그리고 해저지진이나 폭발에 의한 쓰나미(Tsunamis)에 이르기 까지 波動은 매우 다양하게 存在한다.

波動의 運動方程式은 Newtonian 非壓縮性 流體에 일반적으로 적용되는 Navier-Stokes式으로 쓸수 있으며 連續方程式과 함께 式(1), (2)와 같이 주어진다.

$$\rho\left[\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\nabla\left(\frac{V^2}{2}\right)+(\nabla\times\vec{V})\times\vec{V}\right]=-\nabla(p+\rho gz)+\mu\nabla^2\vec{V} \tag{1}$$

$$\nabla\cdot\vec{V}=0 \tag{2}$$

여기서 空間微分연산자 $\nabla(\ )=i\frac{\partial(\ )}{\partial x}+j\frac{\partial(\ )}{\partial z}$고, p=壓力, μ=粘性係數, g=重力가속도, $\vec{V}=iu+jw$는 流體의 速度벡터이다. 式(1)에서 좌변은 慣性力(Inertia force), 우변은 外力(Applied forces)을 나타낸다. 좌변 慣性力의 첫 항은 局地慣性力(Local inertia force), 둘째와 셋째 항은 각각 流體의 運動에너지의 變化에 의한 運動慣性力(Convective interia force)과 廻轉에 의한 運動慣性力을 나타낸다. 우변 外力의 첫 항은 壓力, 둘째 항은 重力, 셋째 항은 마찰력이다. 河口에서의 高潮波나 潮流의 流動이나 洪水波와 같은 移動波(Translatory Waves)에 있어서는 때로 流體微小要素에 적용되는 (1), (2)식 보다도 河床의 微小

* 陸軍士官學校 土木科 助數授(工博)

區間에 適用되는 變形된 支配方程式이 문제해결에 더 有用한 경우가 있다.

式(1)과 式(2)로 나타내어지는 波動에 있어서의 未知數는 일반적으로 自由水面(또는 全水深) η, 壓力 p, 그리고 물 分子의 速度 $\vec{V}$이다. 波動문제 解決의 어려움은 式(1)의 運動方程式에서 運動慣性力 항이 非線形인 것과, 境界面중의 하나인 自由水面 자체가 未知數라는데 있다. 물론 支配方程式 (1), (2)를 만족시키는 一般解는 存在하지 않는다. 그러나 많은 경우의 波動문제는 特定한 境界條件이 주어지면 解를 구할 수 있다. 주요 境界條件으로는,

(1) 自由水面에서의 壓力은 大氣壓($P \mid z=\eta = Pa$)으로 주어져 있다.

(2) 固體境界面(Solid boundary)에서의 流體의 運動速度는 固體境界面의 速度와 같다.

(3) 無限거리(Infinity)에서의 流動이 알려져 있는 경우 주어진 流動條件이 곧 境界條件이 된다.

많은 경우의 波動문제는·流體의 粘性效果를 무시하거나(理想流體의 가정) 流體의 運動을 非廻轉性(Irrotational motion)으로 가정함으로서 그 解決이 크게 쉬워진다. 理想流體의 경우 式(1)에서 우변의 粘性項이 생략된다. 또한 流體의 운동이 非廻轉流인 경우($\nabla \times \vec{V}=0$)에는 式(1)에서 좌변의 회전慣性力 항이 소멸된다. 따라서 非粘性 流體의 非廻轉流로 가정하는 경우 運動方程式 (1)은 다음과 같이 간략화된다.

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz\right) = 0 \qquad (3)$$

非廻轉流인 경우 ,$\nabla \times \vec{V}=0$인 條件으로 부터 $\vec{V}=\pm\nabla\phi$로 定義되는 Scalar 포텐샬함수 $\phi(\chi, z, t)$가 존재한다. 왜냐하면 $\nabla\times\nabla$(anything)$=0$이기 때문이다. 따라서 運動方程式 (3)에 $\vec{V}=-\nabla\phi$(−부호는 임의로 택함)를 代入하고 空間에 대해 積分하면 理想流體의 非廻轉性 不定流에 적용되는 다음 Bernoulli 방정식을 얻는다.

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = f(t) \qquad (4)$$

또한 $\vec{V}=-\nabla\phi$를 連續方程式 (2)에 代入하면 다음 Laplace 방정식이 된다.

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0 \qquad (5)$$

대부분의 波動理論은 完全流體의 非廻轉流에 가정을 두고 式(5)와 境界條件을 만족하는 Potential 함수 ϕ를 구한 후, 式(4)로 부터 壓力分布 p(x, z, t)를 구하고 있다.

II. 波動理論의 區分

自然界의 波動現象은 복잡하고 다양하기 때문에 이들 波動理論을 整然하게 分類하기란 매우 어려운 일이다. 그러나 波動의 문제類型과 解法들의 기본假定을 이해함으로서 각 理論解의 적용範圍와 限界를 아는것은 대단히 중요하다. 波動(理論)은 여러 觀點에서 區分할수 있겠으나 다음 두가지 觀點에서 이해함이 유용할 것으로 생각된다.

1. 物理現象的 區分

波動의 物理現象的 特性으로 보면 波動은 크게 振動波(Oscillatory Waves)와 移動波(Translatory Waves)로 나눌 수 있다.

(1) 振動波

振動波는 波動이 空間的으로 傳播되지만 流體自體는 限定된 軌跡위를 振動하는 流動이다. 따라서 한 振動週期동안 一定수직단면에서의 平均流出, 또는 質量移動(Mass Transport)가 없거나 매우 少量인 경우의 波動을 말한다. 振動波는 進行波(Progressive waves)일 수도 있고 重複波(Standing waves)일 수도 있다. 定速度 C로 傳播하는 進行波의 水面式은 일반적으로 $\eta(x-Ct)$로 나타낼 수 있다. 반대方向으로 진행할 때는 $\eta(x+Ct)$로 나타내어 진다. 重複波는 서로 반대方向으로 進行하는 두 進行波가 合成될 때 나타나며 거리와 時間의 각각 독립된 항의 곱으로 나타나는 것이 특징이다. 入射하는 風波의 反射에 의해 構造物 前面에 생성되는 重復波를 clapotis라 한다. 湖水나 灣내에서 長週期波의 反射

에 의해 생성되는 重復波는 seiche라 불리운다.

(2) 移動波

移動波는 波動이 進行하는 방향으로 質量의 移動이 있는 波動을 말한다. 移動水力跳躍(Moving hydraulic jump)이나 高潮波(Tidal bore), 暴風海溢(Storm surges), 河川에서의 洪水波, 孤立波(Solitary waves) 等은 移動波의 예이다.

移動波는 일반적으로 얕은 水深(d / L < 0.1)에서 발생한다. 相對水深이 대략 0.01 < d / L < 0.05구간에서는 통상 마찰력을 무시하고 理想流體의 가정을 적용하여 解析하는데 이 경우의 波動理論으로 孤立波理論, 長波理論(Long wave theory), 高潮波理論이 있다. 相對水深 d / L < 0.01인 구간에서는 마찰력을 고려한 運動方程式을 적용하여 문제를 解析하는것이 보통이며 이 경우의 波動理論으로 河口에서의 潮汐波理論, 洪水波理論[3]등이 있다.

2. 水力學的 區分

波動은 본래 非線型 문제이기 때문에 본래의 支配方程式과 境界條件을 만족하는 完全解를 얻기는 불가능하다. 따라서 波動水力學의 해결에는 다양한 近似解法이 쓰이는데 이를 대별하면 다음 세 方法으로 나눌 수 있다.

(1) 線型化(Linearlization)

(2) 冪展開法(Power series expansion)

(3) 數値解析法(Numerical method)

線型化方法은 運動方程式과 境界條件에 있어서 非線型項(運動慣性力項)을 무시하는 것이다. 이 線型波動理論은 작은 값의 H / d, H / d, L / d, 곧 微小振幅波, 또는 波長이 짧은 深海波浪에 적용된다.

冪展開法은 작은 無次元量에 대한 멱展開로 부터 요망하는 정확도를 얻기위한 次數까지를 포함하는 近似解를 구하는 것으로, 無次元量으로서 深海에서는 波形傾斜h

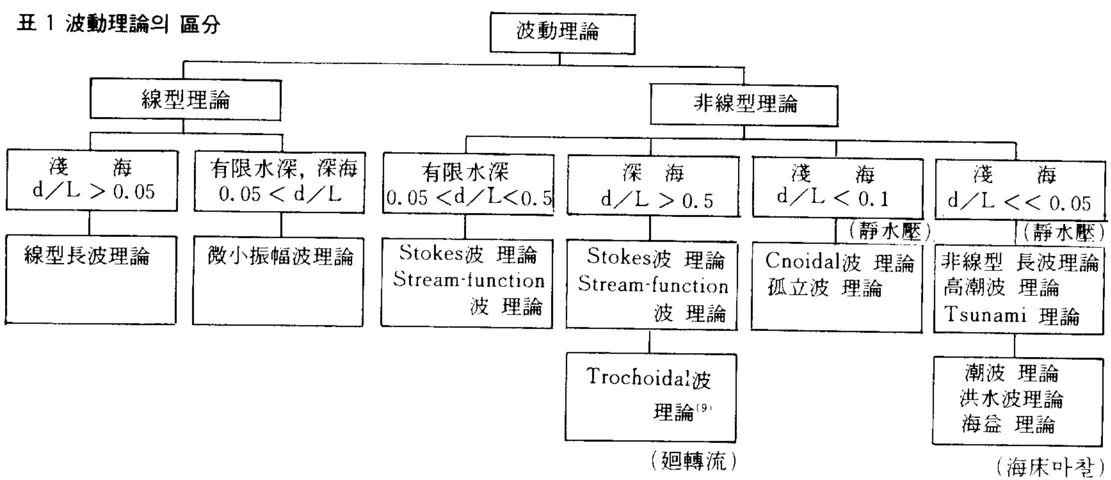
H / L을, 淺海에서는 相對波高 H / d를 취한다. 冪전개법의 장점은 非線型문제에 대하여 解析的 接近을 통해 closed form의 解를 얻을 수 있다는데 있다.

數値解析法은 콤퓨터의 發達과 함께 波動문제의 解法에 널리 이용되고 있는 방법이다. 數値解析法의 장점은 非線型문제나 복잡한 境界條件을 가진 다양한 波動문제를 解決할 수 있다는 데 있다.

水力學的 관점에서 볼때 波動理論은 크게 線型理論과 非線型理論으로 구분할 수 있다. 線型理論은 線型化한 문제에 대해 解析的 完全解를 얻은 것으로 微小振幅波理論(Small amplitude wave theory), 線型長波理論(Linear long wave theory)을 들 수 있다. 非線型理論은 非線型항을 포함한 문제를 冪展開法, 또는 數値解析法으로 구한 것이며 冪展開法에 의한 波動理論으로 Stream-Function 波浪理論(6), 非線型 長波理論 등을 들 수 있다.

이상에서 설명한 波動理論의 水力學的 區分을 요약하면 表1과 같다. 참고문헌에는 각 波動理論

표 1 波動理論의 區分



에 대한 最初 연구論文을 포함하였으며 각 理論에 대하여 많은 연구가 이루어져 왔는 바 讀者는 관계전문서적을 參考하기 바란다.(7, 8)

Ⅲ. 線型波動理論
(Linear Wave Theory)

1. 微小振幅波理論
(Small amplitude wave theory)

Airy(10)에 의해 提案된 미소진폭이론은 가장 널리 應用되고 있는 線型이론이다. 이 이론은 線型化와 非廻轉流의 假定에 기초를 두고 있다. 따라서 流動場은 速度포텐샬로 나타낼 수 있으며 그림1과 같은 2次元 一定水深의 경우 速度포텐샬 $\phi(x, z, t)$는 連續方程式(5)와 다음의 境界條件들을 만족해야 한다.

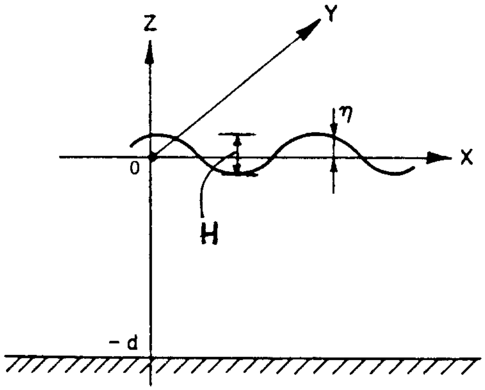


그림1 一定水深 경우 波動場의 定義

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \; ; \; -h \leq z \leq 0 \qquad (5)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - g\eta = 0 \; ; \; z = 0 \qquad (6)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \; ; \; z = 0 \qquad (7)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \; ; \; z = -d \qquad (8)$$

境界條件式 (6)은 水面($z=\eta$)에서의 計器壓力 p $z=\eta=0$라는 力學的 自由水面條件(Dynamic Free-Surface Boundary Condition; DFSBC)으로서 Bernoulli 方程式 (4)의 線型化로 부터 얻어진다. 式(7)은 水面上의 물分子는 水面과 함께 運動한다는 運動學的 自由水面條件(Kinematic Free-Surface Boundary Condition; KFSBC)인 $\frac{d}{dt}(z-\eta)=w$의 線型化로 부터 얻어진다. 式(8)은 海床에서의 流體의 수직속도 $W|z=-d=0$인 海床境界條件(Bottom Boundary Condition; BBC)이다. 式(5)-式(8)을 滿足하는 進行波의 解는 變數分離法(Separation of variables)으로 다음과 같이 얻어진다.

$$\phi(x, z, t) = -\frac{Hg}{2\sigma}\frac{\cosh k(h+d)}{\cosh kd}\cos k(x-Ct)$$

여기서 $\sigma = 2\pi / T$는 波動의 角周波數(Angular frequency)이고 波動의 傳波速度 $C = \sigma / k$이다. 角周波數 σ와 波動 k의 관계는 自由水面條件式 (7)로 부터 얻은 다음과 같은 分散式(Dispersion equation)으로 주어진다.

$$\sigma^2 = gk \tanh kd \qquad (10)$$

自由水面式은 式(6)으로 부터 다음과 같이 주어진다.

$$\eta = \frac{H}{2}\sin k(x-Ct) \qquad (11)$$

流動場내 임의의 點에서의 壓力은 Bernoulli 방정식 (4)의 線型項으로 다음과 같이 주어진다.

$$p(x,z,t) = \rho\frac{\partial \phi}{\partial t} - \rho gz \qquad (12)$$

式(12)에서 우변의 첫째항은 流動에 의한 動水壓(Dynamic pressure), 둘째항은 靜水壓(Static pressure)을 나타낸다.

一定 또는 不等水深의 水槽(사각형, 圓形 등) 내에서 流體의 流動이라든가 수직벽 또는 隔壁 주위에서의 廻折(Diffraction) 문제, 水路上에서 般船의 進行이나 大氣에 의한 水面의 流動문제 등은 微小振幅波理論으로 解析할 수 있다. 水中爆發이나 物體의 水中投下, 쓰나미 등과 같이 갑작스런 水表面 또는 海床의 교란에 의한 流動의 解析에도 微小振幅波理論이 유용하게 응용된다. 線型理論의 장점중 하나는 解의 重疊(Superposition)이 가능하다는 데 있다. 따라서 미소진폭파이론은 복잡한 문제를 중첩의 원리를

利用하여 해결할 수 있으며 風波(Wind waves)와 같이 不規則한 流動에 대한 Spectrum 해석의 基本이 된다.

2. 線型長波理論 (Linear Long Wave Theory)

線型長波理論의 기본假定은 波高가 작아서 모든 非線型항을 무시할 수 있다는 것과, 또한 水深에 비해 波長이 매우 길어서(L / d > 20) 수직가속도를 무시할 수 있다는데 있다. 따라서 運動方程式 (1)에서 마찰력을 무시하고 수직속도 w 및 w의 微分項들을 무시하면 運動의 수직성분은 다음과 같이 간략화된다.

$$\frac{\partial}{\partial z}(p+\rho gz)=0 \tag{13}$$

이를 積分하고 水面에서($z=\eta$) 壓力 $p=0$임을 적용하면

$$p = \rho g(-z + \eta) \tag{14}$$

곧 壓力은 靜水壓이 된다. 運動方程式 (1)의 水平성분 및 連續方程式 (2)를 全水深에 걸쳐 ($z=-d$에서 $z=\eta$까지) 積分하여 平均하면 그림2에 보인 2次元 流動에 대해 각각 式(15) 및 式(16)을 얻는다.

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x} = -g\frac{\partial \eta}{\partial x} \tag{15}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial [u(d+\eta)]}{\partial x} = 0 \tag{16}$$

式(15)와 式(16)에서 비선형항을 무시하면 다음의 線型長波理論의 支配方程式을 얻는다.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g\frac{\partial \eta}{\partial x} \tag{17}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial (ud)}{\partial x} = 0 \tag{18}$$

境界條件으로는 水面에서의 運動學的 自由水面조건(KFSBC)과 海床경계조건(BBC)으로부터 式(19)와 式(20)을 얻는다.

$$w = \frac{\partial \eta}{\partial t}\,; z = \eta \tag{19}$$

$$w = u\frac{\partial d}{\partial x}\,; z = -d \tag{20}$$

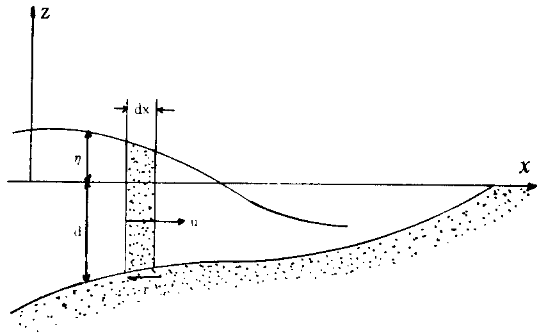


그림2 長波流動場의 定義

式(17)과 式(18)을 각각 χ와 t에 대해 微分하고 알파벳을 消去하면 다음 형태의 支配方程式을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - C^2\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0 \tag{21}$$

여기서 $C=\sqrt{gd}$는 波動의 傳播速度이다. 式(21)은 波動方程式(Wave equation)으로서 一定水深의 경우 一般解는 다음과 같이 쓸수 있다.

$$\eta = f_1(x-Ct) + f_2(x+Ct) \tag{22}$$

水面式의 初期値 $\eta(x, t_0)$나 特定位値 $x=x_0$에서의 水面式 $\eta(x_0, t)$가 주어지면 連續되는 流動은 有限差分(Finite difference scheme)을 이용한 數値解析法이나, 特性曲線을 이용한 圖解法(Method of characteristics)에 의해 구해진다. 潮汐이나 海溢, 河道에서의 洪水波나 河口에서의 潮流運動 등에 대한 解析은 運動方程式 (15)의 우변항에 Coriolis 力項과 海床摩擦力 c의 項 및 引力(Sun-moon attraction) 등의 項을 追加함으로서 얻을 수 있다.

이번 호에서는 波動에 대한 일반적 소개와 波動의 物理現象的, 또는 水力學的 구분과 각 波動理論의 力學的 基本假定, 그리고 線型波動理論에 대해 기술하였다. 다음 講座(Ⅱ)에서는 現在 널리 쓰이고 있는 非線型波動理論과 그 適用한계에 대해 설명하고자 한다.

222페이지로 계속 →

지하수의 3차원적인 지역적 유동기구와 물수지 등의 양적인 문제에 중점을 두고 있다. 우리나라에서도 귀중한 지하수 자원을 이용하며 보전하고 관리하기 위하여 지하수에 대한 연구를 발전시켜 나갈 필요가 있다고 생각한다.

REFERENCES

Brebbia, C. A., and Walker, S., Boundary element techniques in engineering, Newnes-Butterworths Press, 1980.

Huyakorn, P. S., and Pinder, G. F., Computational methods in subsurface flow, Academic Press, 1983.

Liggett, J. A., and Liu, P. L-F., The boundary integral equation method for porous media flow, George Allen & Unwin, 1983.

Remson, I., Appel, C. A., and Webster, R. A., Groundwater models solves by digital computer, ASCE J. Hydraulic Div. 91 (HY3), 1965, pp.133-147.

Remson, I., Hornberger, G. M., and Molz, F. J., Numerical methods in subsurface hydrology, Wiley & Sons, 1971.

Wang, H. F., and Anderson, M. P., Introduction to groundwater modeling – Finite difference and finite element methods, W. H. Freeman and Company, 1982.

Zienkiewicz, O. C. Meyer, P., and Cheung, Y. K., Solution of anisotropic seepage problems by finite elements, Proc. Am. Soc. Civ. Eng., 92 (EM1), pp.111-120.

→ 237페이지 "波動理論 소개(Ⅰ)"에서 계속

References

1) Boussinesq, J., Essai sur la theorie des eaux courantes. Institut de France, Académie des Sciences, *Mémoires présentés par divers savants*, 23, 1877.
2) Stoker, J.J., *Water waves*. Interscience, New York, 1957.
3) Thomas, H.A., *Hydraulics of flood movements in rivers*. Carnegie Institute of Technology, Pittsburgh, Pa., 1937.
4) Stokes, G.G., On the theory of oscillatory waves. Transactions of Cambridge Philosophical Society, 8, 1847.
5) Korteweg, D.J., and de Vries, G., On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal on a new type of long stationary waves. London, Dublin and Edinburgh, Philosophical Magazine, Series 5, 39:422, 1895.
6) Dean, R.G., Stream-function wave theory-Validity and Application. Specialty Conference on Coastal Engineering, ASCE, 1965.
7) Méhauté, B.L., *An introduction to hydrodynamics and water waves*. Springer-Verlag Co., New York, 1976.
8) Sarpkaya, T., and M. Isaacson, *Mechanics of wave forces on offshore structures*, Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1981.
9) Gerstner, F., Theorie der Weller, Annalen der Physik, 32, 1809.
10) Airy, G.B., Tides and waves, Encyclophedia Metrop., Art. 192, 241-396, 1845.