〈論 文〉

# St. Venant식에 관한 유한 차분법의 비교 분석

——Comparative Analysis of Finite Difference Methods for the St. Venant Equation——

이 상 호* 이 길 성**
Lee, Sang Ho Lee, Kil Seong

**ABSTRACT**

Characteristics of finite difference schemes for St. Venant equation were compared with two input cases. One is the monoclinal wave which has large friction slope without discontinuity and the other is the shock wave with discontinuity. For monoclinal wave, Keller Box scheme is the best in terms of accuracy, efficiency and stability when two parameters were selected with a rule: $0.5 \leq \theta \leq 1$, $\theta+\psi=1$. But for shock wave only the Preissmann type of parameter $\psi(=0.5)$ showed stable results. Numerical experiments of monoclinal wave showed that Lax-Wendroff and Richtmyer schemes were more stable than Leap Frog and more accurate than Lax-Fredrich scheme. For shock wave Lax-Fredrich showed larger numerical dissipation than other explicit schemes and Leap Frog produced slower mass transport.

**요 약**

St. Venant식에서 상대적으로 마찰경사항이 크고 연속적 파형이 유입하는 경우와 급격한 불연속 부위를 가진 충격파가 유입하는 경우에 유한차분 수치해의 특성을 비교하였다. 그 결과 단일 증감파에는 Keller Box 해법이 $0.5 \leq \theta \leq 1.0$, $\theta+\psi=1$로 두 매개변수를 정했을 때 정확도와 효율성, 안정성의 측면에서 가장 좋았다. 그러나 충격파에서는 Preissmann 형태의 매개변수 $\psi(=0.5)$를 사용하여야만 안정하였다. Lax-Wendroff, Richtmyer 해법은 Leap Frog에 비해 안정성에서, Lax-Fredrich해법에 비해 정확성에서 더 좋은 방법임이 단일 증감파의 수치실험에서 나타났고, 충격파에서는 Lax-Fredrich가 다른 양해법들에 비해 과도한 수치적 dissipation을 Leap Frog은 느린 질량전달을 보였다.

## 1. 서 론

하도의 비정상 흐름을 추적하는 수리학적 방법은 연속방정식과 운동량방정식으로 구성되는 St. Venant식을 푸는 것으로 하도의 홍수추적 댐파괴파의 분석 등에 사용된다. 국외에서는 여러가지 방법으로 이 개수로 1차원모형의 해를 구하여 왔는데 각 방법의 특징은 다음과 같이 요약할 수 있다. 특성곡선법을 Stocker의 양적(explicit) 방법을 시초로 Amein과 Fang[3], Liggett과 Woolhiser[12]등이 안정성에 대한 시간격자간격($\Delta t$)의 제약을 대체로 제거시킨 해법을

* 서울 공대 토목과 박사과정
** 서울 공대 토목과 부교수

개발하였으나 여전히 가변격자(variable mesh)를 사용하고 있어 특정 지점/시각의 결과는 보간에 의존해야 한다. 한편 Baltzer와 Lai[4]의 고정격자(fixed mesh) 방법은 특성곡선 시작점에 대한 미지수를 보간으로 알아내야 하는 결점을 갖고 있다. St. Venant식을 원래의 형태 그대로 푸는 유한차분법은 양해법과 음해법으로 나눌 수 있다. 양해법에는 Lax-Fredrich, Lax-Wendroff, Leap Frog, Richtmyer(2단계 Lax-Wendroff)해법 등이 있는데 대체로 안정성에 있어서 특성곡선법이나 음해법보다 열등함이 Liggett과 Woolhiser[12], Price[14]등에 의해 밝혀졌다. 그러나 양해법은 차분화와 해의 계산이 간편하다는 장점을 지닌다. 음해법에는 Keller의 4점해법[3]과 Strelkoff의 6점해법[6]이 있는데 4점해법은 차분식에 하나의 공간 격자간격($\Delta x$)이 쓰여 불규칙한 공간격자에서도 잘 적용되고 6점해법은 시간변수의 정도가 1차로 덜 정확하다. 특히 일반적으로 음해법은 양해법보다 계산시간이 많이 든다고 알려져 있으나 시간에 따른 변화율이 작은 홍수파의 경우는 $\Delta t=\Delta x/c'$($c'$은 파속)으로 하여 4점해법을 적용하였을 때 오히려 계산시간을 줄이고 정확도를 높일 수 있음이 Price[14]에 의해 밝혀졌다.

한편 국내에서는 실제문제에 수리학적 추적법을 활발히 적용하고 있지 않은데 본 논문에서는 이에 대한 기초작업으로 St. Venant식의 유한차분 수치해를 구하고 각 해법의 특성을 비교하는 것이 목적이다. 사용된 수치해석 방법은 상기 양해법 네 가지와 음해법 중 4점해법인 Keller Box이다. 우선 수면경사가 매우 완만한 홍수파의 경우 단일증감파(monoclinal wave)[7],[11]를 해석적 해로 하여 차분법들의 특성을 확인한 후 '계단파형'의 불연속 충격파(shock wave)가 유입하는 경우 각차분법의 결과를 해석적 해가 없는 상태에서 비교한다. 이 계단파형의 불연속 부위는 St. Venant식의 기본 가정에 위배되는데 Terzidis와 Strelkoff[15]가 이러한 파형에 대한 St. Venant식의 적용 가능성을 보였고 이는 다시 Martin과 Zovne[13]에 의하여 확인되었다. 그리고 현재 가장 좋은 모델의 하나로 평가받고 있는 댐파괴 홍수파의 추적모델 DAMBRK[9]도 단파 부분에 대한 특별한 해석없이 홍수파를 추적한다.

## 2. 수치해석 대상파형의 도출

### 2.1 단일 증감파(Monoclinal wave)

개수로의 1차원 모형은 쌍곡형 비선형 편미분식인 St. Venant식으로 횡방향 유입이 없는 경우 사각형 수로에서 다음과 같은 보존법칙의 형태(conservation law form)를 갖는다.

연속방정식 : $\partial y/\partial t+\partial/\partial x(yv)=0$ (1)

운동량방정식 : $\partial v/\partial t+\partial/\partial x(v^2/2+gy)=g(S_0-S_f)$ (2)

여기서 마찰 경사항 $S_f=(v/C)^2/y$로 고정된 계수 $C$의 Chezy식을 사용한다. 윗 식은 장파의 전달 속도 $c=\sqrt{gy}$로 정의하여 다음과 같이 특성곡선식으로 쓸 수 있다.

$$\partial/\partial t(v\pm 2c)+(v\pm c)\partial/\partial x(v\pm 2c)=g(S_0-S_f) \quad (3)$$

St. Venant식이 해석적 해를 갖는 특정한 경

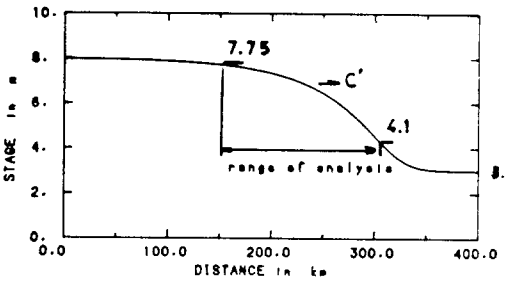



**Fig. 1.** Monoclnal Wave Form

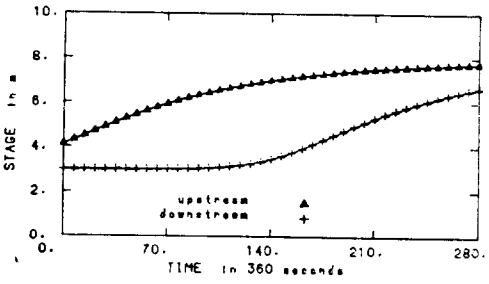



**Fig. 2.** Hydrographs at $x=0.0$ and $x=100$km

우는 형상이 같은 사각형 수로가 상수의 Chezy 계수를 갖는 때이며 이때의 파를 단일 증감파라고 한다. 이 Kinematic wave는 형상의 변화없이 상수의 파속 $c'(=dq/dy, q=yv)$을 가지고 진행하는데 다음 식(4)는 해석 대상파형으로 양단 수심은 3m, 8m이고 그림 1은 이의 형상이다.[1]

$$\exp[S_0(x-1.654t)-y+24.236]=(8-y)^{14.939}/\{(y-3)^{2.856}(y-1.154)^{-0.071}\} \quad (4)$$

이때 시각 $t$=0초, 거리 $x$=0m에서 수심 $y$=4.1m로부터 상승파가 유입된다고 가정하여 식(4)의 상수 24.236을 구하였고 유입이 끝나는 28시간 후의 수심은 7.75m에 이르며 파속은 1.654m/s로 초기 유입 부위는 166.7km 진행하게 된다. 그리고 Froud수는 전구간에서 0.151이며, 상류단(0km)과 하류단(100km)에서의 수문곡선은 그림 2와 같다.

### 2.2 충격파(Shock Wave)

충격파가 유입하는 경우의 기본 방정식으로 단위폭당 유량 $q$와 수심 $y$를 미지수로 하는 다음과 같은 보존법칙의 형태를 사용하였다.

$$\partial y/\partial t+\partial q/\partial x=0 \quad (5)$$

$$\partial q/\partial t+\partial/\partial x(q^2/y+gy^2/2)=gy(S_0-S_f) \quad (6)$$

그 이유는 충격파의 불연속 부분과 식의 비선형성 때문이다. 즉 충격파에서는 식(1)과 (2)로 차분 계산되는 $y, v$에 의한 유량 $q$가 식(5), (6)에 의한 것과는 다르기 때문이다. 바닥경사 $S_0$=0.001, $C$=52.55의 조건을 가진 수로에서 3m의 수심을 가지고 흐르는 유량 $q$=8.635CMS/M의 정상등류에 유입되는 파로는 두가지의 형태를 선택하였다(그림 3). 하나는 $t$=0초, $q$=8.635 CMS/M에서 $t$=32초($\Delta t$), $q$=35CMS/M로 급격하게 유입하는 경우이고, 다른 하나는 $t$=640초에서 $q$=35CMS/M가 되도록(35−8.635)의 유량이 20개의 증분으로 나뉘어져 선형으로 증가 유입하는 경우이다.

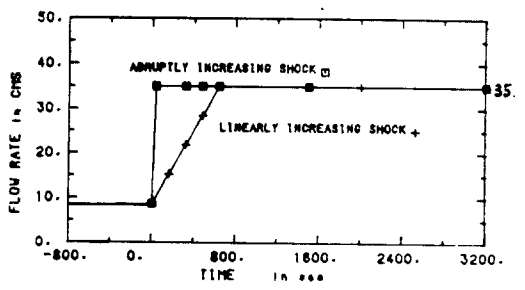



**Fig. 3.** Inflow Hydrograph for Shock Wave

바닥경사와 마찰이 없는 이상적 상태(nearly horizontal flow)에서는 $S_0=C=0$이고, 하류단 수심 $y_2$는 3m, 유속 $v_2$는 0m/s인 정지유체에 $q$=35CMS/M의 유량이 급격히 유입한다. 이때 해석적인 해로서 다음과 같은 충격 관계식을 이용하여 Newton-Raphson방법으로 $W$(파속), $y_1$, $v_1$을 구한다.

연속 방정식 : $v_1y_1-v_2y_2-W(y_1-y_2)=0$ (7)

운동량 방정식 : $g(y_2^2-y_1^2)/2=y_2(v_2-W)(v_2-v_1)$ (8)

## 3. 보존법칙의 유한차분 해법

### 3.1 1. 차분구조와 경계조건

상세한 유한 차분식의 유도[1]는 생략하고 특징적 차분 구조만을 표 1에 제시하였다. 여기서 일반화(generalized) Keller Box해법은 그림 4와 같이 $M$점의 항을 상자형 격자의 네 점에서의 항으로 나타낸다. 특히 $\psi$=0.5이면 $P$로 표시된 차분위치로 Preissmann해법이 된다. 차분항들을 대입하여 형성된 비선형 대수식은 $N$개의 공간 격자점에서 $2N$개의 식이 된 후 Newton방법으로 풀게된다. 이때 반복 계산에서 쓰이는 선형 대수식의 해는 Fread[8]가 쓴 Gauss소거법으로 구한다.

단일 증감파에 대한 상류 경계조건은 파형의 식(4)로부터 시간에 따른 수심 $y$가 주어지고 다른 하나는 식(3)을 전미분식으로 표시한 후방 특성곡선식이다. 그리고 하류조건은 파속 $c'$을 따라가면서 좌우에 적용한 하기 연속 방정식(9)와 전방 특성곡선식이다.

$$(yc'-q)=q_r, (q_r\text{은 단위폭당 overrun}) \quad (9)$$

단 Keller Box해법에서 상류조건은 시간에 따른 수심 $y$이고 하류는 상기 식(9)이다. 충격파에서는 유량 $q$를 상류조건으로 썼다. 그리고 불연속 부분 때문에 특성곡선을 쓸 수 없어서 한

**표 1.** 차분구조와 마찰경사($k=\Delta t$, $h=\Delta x$)

| 차 분 법 | 차 분 구 조 | 마 찰 경 사 $S_f$ |
|---|---|---|
| 일 반 화 Lax-Fredrich | $(f_t)_j^n \approx [f_j^{n+1}-(1-\alpha)f_j^n-\alpha(f_{j+1}^n+f_{j-1}^n)/2]/k$,<br>$(f_x)_j^n \approx (f_{j+1}-f_{j-1})/(2h)$<br>여기서 $\alpha=1$ 이면 Lax-Fredrich,<br>$\alpha=0$ 이면 Euler 해법이 된다. | $(S_f)_j^n \approx [(S_f)_{j+1}^n+(S_f)_{j-1}^n]/2$<br>여기서 $(S_f)_{j\pm1}^n \approx (v^2/C^2y)_{j\pm1}^n$ |
| Lax-Wendroff | $f_j^{n+1}=f_j^n+kf_t+(k^2/2)f_{tt}+0(k^3)$으로 전개한 후 시간 미분항을 공간 미분항으로 바꾸어 중앙차분 | $(S_f)_j^n \approx (v_j^n)^2/(C^2y_j^n)$ |
| Leap Frog | $(f_t)_j^n \approx (f_j^{n+1}-f_j^{n-1})/(2k)$<br>$(f_x)_j^n \approx (f_{j+1}^n-f_{j-1}^n)/(2h)$ | $(S_f)_j^n \approx v_j^{n+1}\cdot v_j^{n-1}/[C^2(y_j^{n+1}+y_j^{n-1})/2]$ |
| Richtmyer | 1단계 ($n \rightarrow n+1/2$) : Lax-Fredrich해법 적용 ($S_f$ 처리는 다름)<br>2단계 ($n+1/2 \rightarrow n+1$) : Leap Frog적용 | $(S_f)_{j+1/2}^{n+1/2} \approx [v_{j+1/2}^{n+1/2}(v_{j+1}^n+v_j^n)/2]/$<br>$[C^2\{y_{j+1/2}^{n+1/2}+(y_{j+1}^n+y_j^n)/2\}/2]$ |
| 일반화 Keller Box | $(f_t)_M \approx \psi[f_{j+1}^{n+1}-f_{j+1}^n]/k+(1-\psi)[f_j^{n+1}-f_j^n]/k$<br>$(f_x)_M \approx \theta[f_{j+1}^{n+1}-f_j^{n+1}]/h+(1-\theta)[f_{j+1}^n-f_j^n]/h$ | $[S_f]_M \approx \theta[(S_f)_{j+1}^{n+1}+(S_f)_j^{n+1}]/2$<br>$+(1-\theta)[(S_f)_{j+1}^n+(S_f)_j^n]/2$ |

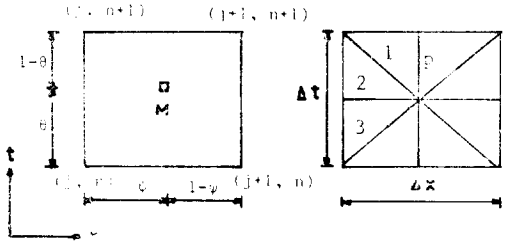



**Fig. 4.** Differencing Position and Sampling Lines for Generalized Box

방향(one-sided) Euler해법을 다른 한 상류 조건으로서 식(5)에 적용하였다. 하류 조건은 한 방향 Euler해법과 Chezy식을 사용한다.

### 3.2 정도 및 안정성

Keller Box해법과 Lax-Wendroff, Leap Frog. Richtmyer해법은 2차의 정도를 가지고 Lax-Fredrich해법의 시간 변수에 대한 정도는 1차이다. $S_0=S_f$로 놓고서 매트릭스 안정해석으로 구한 양해법의 안정조건은 국부(local) Courant조건으로 $\Delta t_{n+1} \leq \Delta x/\max_j[|v_j^n|+c_j^n]$이다. 한편 Becker와 Yeh[5]는 $S_0$와 $S_f$를 모두 포함한 안정해석 결과를 Lax-Fredrich해법에 대하여 제시하였는데, 마찰경사가 지배적이고 수위가 상대적으로 작으면 마찰조건(friction criteria) $\Delta t \leq v/gS_f$가 마찰경사가 작고 수위가 크면 Courant조건이 안정성을 지배한다는 것이다. 위의 두 조건을 함께 고려한 안정조건은 Garrison등의 논문[10]에서 살필 수 있는데 이는 Stocker가 '중앙 차분법' (centered difference scheme)에 대하여 제시한 것으로 다음 식(10)과 같다.

$$(|v|+c)\Delta t/\Delta x \leq 1-gS_f\Delta t/v \qquad (10)$$

그림 5부터 그림 7까지는 $S_0=S_f$로 놓고 양해법의 amplification매트릭스에서 구한 amplitude/phase Portrait[2]이다. Lax-Fredrich, Lax-Wendroff, Leap Frog해법의 고유치는 각각 $[1-2\alpha(1-\cos\gamma)-i(\mathrm{Cr}\sin\gamma)]$, $[\{1-Cr^2(1-\cos\gamma)\}-i\{Cr\sin\gamma\}]$, $[-iCr\sin\gamma \pm (1-Cr^2\sin^2\gamma)^{1/2}]$이고 Courant수 $Cr=(v\pm\sqrt{gy})\Delta t/\Delta x$, $\gamma=k\pi\Delta x/l=2\pi/N$이다. 여기서 $k$는 wave수, $l$은 공간 해석 구간의 길이, $N$은 파장당 격자점의 수, $\alpha$는 일반화 Lax-Fredrich해법의 매개변수이다. Leap Frog에 관한 고유치의 modulus는 1이므로 amplitude portrait는 생략하였다. 전반적 특징으로 Lax-Fredrich나 Leap Frog해법이 Lax-Wendroff나 Richtmyer해법보다 phase오차가 큰데, 이는 Lax-Fredrich해법은 수치해의 파속을 크게 하고 Leap Frog해법은 작게 하는 반면 Richtmyer해법은 Lax-Fredrich와 Leap Frog해법을 번갈아

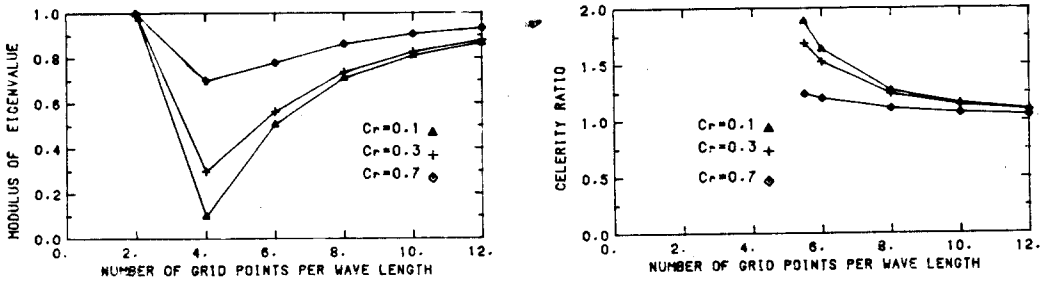



**Fig5.** Amplitude/Phase Portrait for Lax-Fredrich

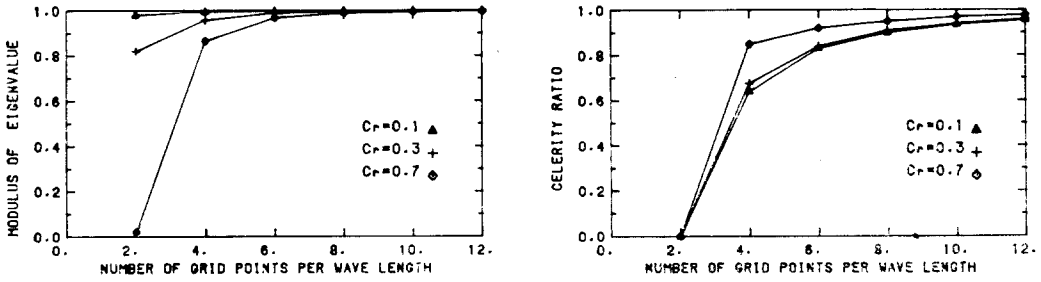
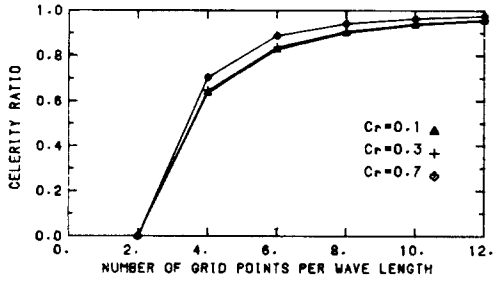



**Fig. 6.** Amplitude/Phase Porirait for Lax-Wendroff




**Fiig. 7.** Phase Porirait for Leap Frog

적용하여 phase오차를 상쇄시키기 때문이다.

## 4. 단일 증감파의 수치실험

### 4.1 정확도와 효율성

표 2에 정확도, 효율성 각각에 관한 지표로서 최대 절대오차와 수행시간을 제시하였다. 이를 보면 Lax-Fredrich해법은 Courant수 $Cr(\leq 1)$이 증가함에 따라 오차가 감소하는데 이는 그림 5의 결과와 일치한다. Lax-Wendroff해법은 $Cr$이 증가함에 따라 modulus가 오히려 1에서 멀어진다(그림 6참조). 표에서 제시하지 않았으나 $\Delta x$=2500m, $\Delta t$=90초인 경우 오차가 0.3856cm인 점을 보면 $Cr$이 증가할 때 오차가 증가함을 알 수 있다. 그러나 $\Delta x$가 커져서 20000m가 되면 $Cr$의 증가에 따라 오차가 감소하는데 아마도 안정해석에서 $S_0=S_f$로 가정한데 그 원인이 있는 것 같다. Richtmyer해법은 선형의 편미분식에 대해서 Lax-Wendroff와 똑같은 차분식을 갖는다는 유사성과 $\Delta x$=2500m, $\Delta t$=90초일 때 오차가 0.384cm인 점으로부터 $\Delta x$가 작은 경우 $Cr$의 증가가 오차를 증가시킨다는 설명을 유추할 수 있다. Leap Frog해법의 modulus는 줄거나 늘지 않고 파속만 늦추는데도(그림 7참조) Lax-Fredrich를 제외한 다른 해법보다 오차가 크다는 사실로부터 phase가 amplitude보다 훨씬 큰 오차를 유발한다는 점을 살필 수 있다.

일반화 Keller Box해법 중 $\theta=\psi=0.5$인 경우 (Implicit Box) $\Delta t \approx \Delta x/c'$로 하였을 때 Price의 결과[14]와 같이 가장 작은 오차를 갖는다. 이는 단일증감파가 Kinematic wave로 근사될 수 있고 $\Delta x/\Delta t=c'$일 때 정확한 해를 구하는 셈이기 때문이다. 특히 그림 8은 최적 $\Delta t$를 기준으로심각한 비대칭 형상을 이루고 있는데 이는 $\Delta t \leq \Delta x/c'$를 사용해야 좋다는 것을 암시한다. 그림 9는 공간격자간격에 따른 오차를 비교한 것으로 1차 정도의 Lax-Fredrich해법이 가장 큰 오차를 가지며 Lax-Wendroff와 Richtmyer해법은 오차의 거동이 동일하고 Implicit해법이 가장 정확하다.

표 2. 최대 절대오차(cm)/수행시간(초)

| $\Delta x$(m) | $\Delta t$(초) | 해법 **$Cr$ | Lax-Fredrich | Lax-Wendroff | Richtmyer | Leap Frog | Implicit Box |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2500 | 180 | 0.595 | 35.68/8.40 | 0.4936/18.00 | 0.465/10.00 | 2.475/4.10 | 0.1861/57.41 |
| | 360 | 1.191 | 불안정 | 불안정 | 불안정 | 불안정 | 0.1774/29.50 |
| | 720 | 2.381 | 불안정 | 불안정 | 불안정 | 불안정 | 0.1482/14.82 |
| | *1611 | 5.328 | 불안정 | 불안정 | 불안정 | 불안정 | 0.0251/ 8.14 |
| 5000 | 180 | 0.298 | 91.79/6.78 | 1.380/11.68 | 1.412/7.48 | 2.718/3.49 | 0.7385/31.06 |
| | 360 | 0.595 | 49.35/3.60 | 2.649/ 5.83 | 1.620/3.89 | 20.56/1.78 | 0.7317/16.11 |
| | 720 | 1.191 | 불안정 | 불안정 | 불안정 | 불안정 | 0.7030/ 8.13 |
| | *3024 | 5.001 | 불안정 | 불안정 | 불안정 | 불안정 | 0.1132/ 2.31 |
| | 3600 | 5.953 | 불안정 | 불안정 | 불안정 | 불안정 | 0.2433/2.04 |
| | 14400 | 23.812 | 불안정 | 불안정 | 불안정 | 불안정 | 12.97/0.74 |
| 10000 | 180 | 0.149 | 204.0/6.00 | 4.723/8.41 | 4.992/6.28 | 4.703/3.02 | 2.852/17.77 |
| | 360 | 0.298 | 136.9/3.08 | 4.743/4.28 | 4.794/3.30 | 불안정 | 2.852/8.97 |
| | 720 | 0.595 | 불안정 | 불안정 | 6.302/1.66 | 불안정 | 2.824/4.61 |
| | 3600 | 2.977 | 불안정 | 불안정 | 불안정 | 불안정 | 1.939/1.14 |
| | *6027 | 4.983 | 불안정 | 불안정 | 불안정 | 불안정 | 0.458/0.84 |
| 20000 | 180 | 0.074 | 245.4/5.80 | 15.66/6.97 | 16.24/5.85 | 불안정 | 10.12/11.44 |
| | 360 | 0.149 | 223.2/2.94 | 15.53/3.45 | 15.53/2.97 | 불안정 | 10.11/5.61 |
| | 720 | 0.298 | 불안정 | 불안정 | 불안정 | 불안정 | 10.09/2.92 |
| | 3600 | 1.488 | 불안정 | 불안정 | 불안정 | 불안정 | 9.447/0.71 |
| | *12095 | 5.000 | 불안정 | 불안정 | 불안정 | 불안정 | 1.390/0.28 |

* : $\Delta t = \Delta x/c'$

** : 초기의 상하류단과 마지막 계산시 상하류단 4개의 평균값

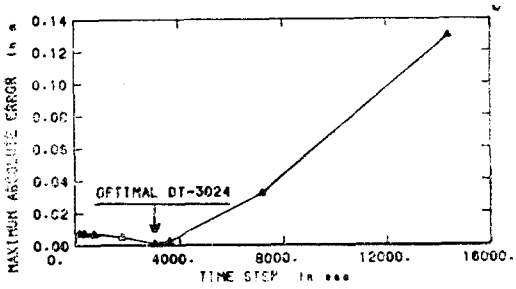



**Fig.** 8. DT vs Error for Implicit Box(DX=5000 m)

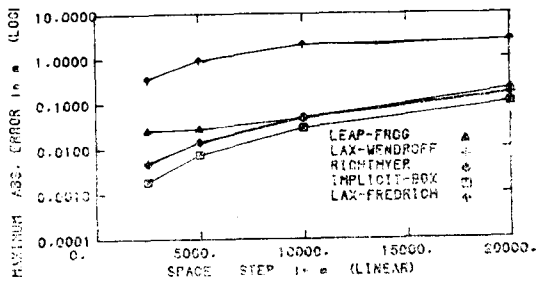



**Fig.** 9. Error for Various Schemes(DT=180s)

차분구조상 Lax-Fredrich해법은 Leap Frog과 계산격자점의 수가 같으나 일반화 때문에 바둑판형의 격자 전부를 계산하게 되어 약 2배의 수행시간을 보인다. Lax-Wendroff해법이 Richtmyer와 비슷한 오차경향을 보이면서도 수행시간이 긴 것은 차분식이 훨씬 복잡하기 때문이다 Richtmyer해법은 계산과정에 Lax-Fredrich와 Leap Frog해법을 교대로 사용하므로 Leap Frog 해법보다 두배 이상의 수행시간을 나타낸다. Implicit Box해법은 반복계산을 하므로 작은 격자망의 경우 과대한 수행시간을 보이나 최적 $\Delta t$를 사용할 경우 다른 해법보다 수행시간이 작아 효율성에서도 제일 좋은 결과를 보인다.

### 4.2 마찰경사항에 따른 불안정성

최고수위인 상류단의 마지막 유입수심 $y$=7.75m로 부터 계산된 유속 $u$=1.33m/s를 가지고

구한 Courant조건은 $\Delta x$=2500, 5000, 10000, 20000m 각각에 대하여 $\Delta t \leq$249, 498, 995, 1990초이다. 양해법은 모두 이 상한 밖에서 불안정함을 표 2에서 볼 수 있다. 한편 $\Delta t$=180초로 하였을 때 $y$의 증분이 가장 큰 부분에 대하여 식(2)에서 형성되는 네 경사항 $S_f$, $\partial y/\partial x$, $(\partial v/\partial t)/g$, $(v\partial v/\partial x)/g$의 상대적 크기는 각각 0.7992, 0.1942, 0.0040, 0.0026이다. 즉 $S_f$가 8할을 차지하고 있어 마찰항에 지배되는 흐름임을 알 수 있다. 이때 상기 Courant조건에 사용된 $y, v$로 마찰조건을 구하면 $\Delta t \leq$535초이다. 이를 Lax-Fredrich해법에 적용하면 $\Delta x$=10000, 20000m에서는 이 조건이 더 엄밀한 제약임을 알 수 있다 전술한 $y, v$를 이용하여 식(10)의 조건을 계산하면 $\Delta x$=2500, 5000, 10000, 20000m에 대하여 각각 $\Delta t \leq$170, 258, 358, 421초이다. 이는 단지 Leap Frog해법의 안정성에 관한 경향을 설명해주고 있다.

Richtmyer해법은 $\Delta x$=10000m, $\Delta t$=720초에서도 Lax-Wendroff와는 달리 안정한 결과를 보인다. 이는 표 1에서 Lax-Wendroff해법의 $S_f$처리가 $n$준위의 값만을 사용한데 반해 Richtmyer의 1단계에서는 $n$과 $n+1/2$준위의 값을 사용하였기 때문에 결과적으로 안정성에 기여했다고 볼 수 있다. 만일 유속 $v$에 대해서 $n$준위의 값만을 써서 $(S_f)_{j+1/2}^{n+1/2}=[(v_j^n+v_j^n)/2]^2/[C^2\{y_{j+1/2}^{n+1/2}+(y_j^n+y_j^n)/2\}/2]$로 하면 $\Delta t$=720초에서 불안정하다. 한편 Leap Frog해법에서는 $(S_f)_j^n=[(S_f)_{j+1}^n+(S_f)_{j-1}^n]/2$나 $(S_f)_j^n=(v_{j+1}^n\ v_{j-1}^n)/[C^2(y_j^{n+1}+y_j^{n-1})/2]$로 불안정한 결과가 나왔고, Richtmyer해법에서는 $(S_f)_j^n=[(S_f)_{j+1}^n+(S_f)_{j-1}^n]/2$를 Leap Frog단계에 사용한 결과 오차가 크게 증가하여 더욱 불안정하였다.

### 4.3 일반화된 해법의 매개변수

일반화 Lax-Fredrich해법에 대하여 $\Delta t$=360초로 고정시키고 $\alpha$를 1부터 0까지 감소시켜 본 결과, 그림 10에서와 같이 세 $\Delta x$의 경우에 모두 처음에는 조금씩 오차가 감소하다가 $\alpha$가 작아짐에 따라 오차가 큰 폭으로 증가하고 진동하는 부분을 지나 결국 불안정해졌다. 그 진동의 정도는 $\Delta x$가 작을수록 심하였는데 이는 $\Delta x$가 작아질수록 $\Delta t/\Delta x$가 커져서 Kinematic wave식의 수치적 종속영역(numerical domain of dependence)이 해석적 종속영역(analytic domain of dependence)을 포함하지 않기 쉽기 때문이다. 결론적으로 $\alpha$의 감소에 따라 오차의 감소가 있기는 하나 그 한계를 찾기 어렵고 $\Delta x$=5000m인 경우는 0.98부근에서 증가하므로 $\alpha$=1의 값을 사용함이 좋다.

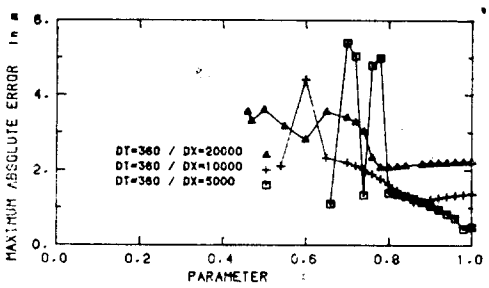



**Fig. 10.** Parametric Sensitivity for Generalized Lax-Fredrich

일반화 Keller Box해법의 모든 점을 차분위치로 고려하기는 어려워서 그림 4의 선 1, 2, 3, $p$상의 점들만을 이산적으로 택하였다. 그림 11에서 가장 좋은 차분위치는 선 1임을 알 수 있다. 즉 $\theta$를 택한 후 $\psi=1-\theta$로 정하는 것이 좋은 방법이다. 이런 결과로부터 선 1을 따른 세가지 격자조합에 대한 결과를 그림 12에 나타냈다. 대체로 $\theta<0.5$일 때는 곧 불안정해졌는데 $0.5\leq\theta\leq1$에서도 반드시 안정한 결과를 보이지는 않는다. 즉 $\Delta t$=360초, $\Delta x$=5000m($c'\Delta t/\Delta x$=0.119)일 때를 보면 0.7을 경계로 오차가 급격히 커짐을 볼 수 있었고 그후 불안정해졌다. 그러므로 $\psi=1-\theta$로 하되 $c'\Delta t/\Delta x$를 1보다 너무 작게 하지 않아야 한다. 특히 Preissmann해법은

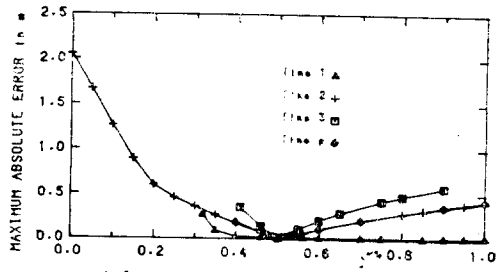



**Fig. 11.** Errors Along Four Lines(DT=12095s/DX=20000m)

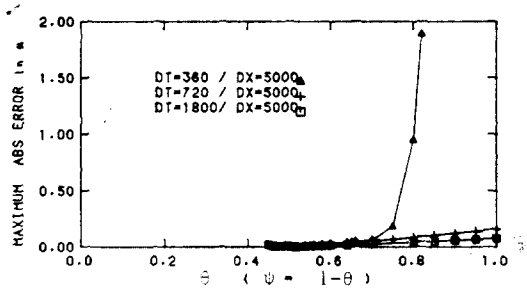



**Fig. 12.** Parametric Sensitivity of Line 1 for Generalized Box

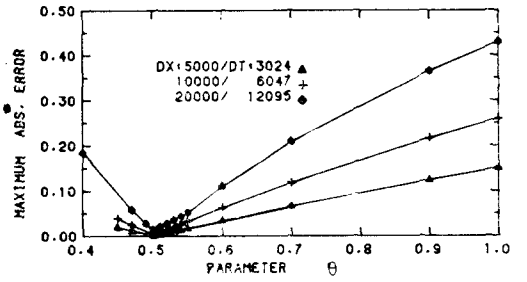



**Fig 13.** Parametric Sensitivity for Preissmann Scheme

$\theta$=0.5를 벗어난 값에서 모두 큰 폭으로 오차가 증대되고 있다(그림 13). Preissmann해법($\Delta x$=5000m, $\Delta t$=3024초)에서는 오차의 상한이 약 0.15m인 반면 그림 12의 규칙을 따른 해석($\Delta x$=5000m, $\Delta t$=1800초)에서는 약 0.1m로 보다 작음을 알 수 있다.

## 5. 충격파의 수치특성

우선 그림 3에서와 같은 계단파가 유입할 때 $S_0$와 $S_f$가 없는 이상 상태에 대한 해석적 해와 수치해($\Delta x$=800m ; $t$=2560, 5120초)를 비교하였다(그림 14). 식(7)과 (8)로부터 구한 상류단 수심 $y_1$은 6.488m이고 유속 $v_1$은 5.395m/s이며 Froud수는 0.676이다. 이 수심과 유속을 이용한 Courant조건은 $\Delta t \leq 59.8 (>32)$초이고 파속 $W$는 10.03m/s이다. Lax-Fredrich해법은 수치해의 파속이 해석적 해보다 빠름을 나타내는 phase portrait의 결과 (그림 5참조)와 일치하며 Taylor급수전개에 따른 수치점성항 $(\Delta x^2/\Delta t)/2 \cdot y_{xx}$의 영향으로 급격한 수면 상승부위를 갖지 않는다. Lax-Wendroff와 Richtmyer해법은 불연속 부위에서 원래의 shock strength 3.488(6.488−3)m에 대하여 각각 23.7%, 30.4%의 overshooting현상을 보인다. Leap Frog해법은 진동하면서 안정한 결과를 가지는데 그 폭이 매우 커서 믿을 만한 결과를 제시하지 못하고 있다.

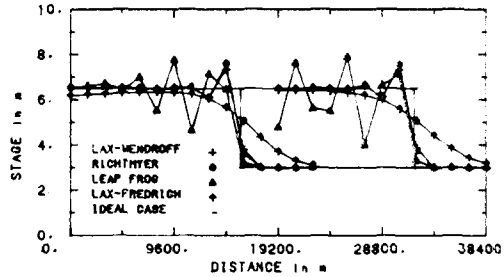



**Fig. 14.** Simulated Wave Form for Ideal Flow ($S_f$=$S_0$=0)

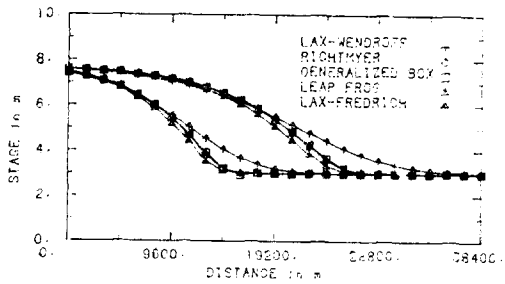



**Fig. 15.** Simulated Wave Form for Abruptly Increasing Shock

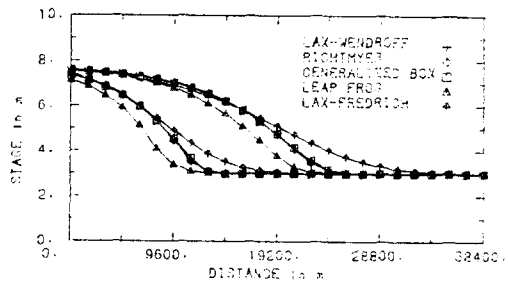



**Fig. 16.** Simulated Wave Form for Linearly Increasing Shock

바닥경사와 마찰이 있는 경우는 그림 15(계단파)와 16(선형증가파)에 수치해의 결과를 제시하였다. Lax-Wendroff, Richtmyer, Keller Box 해법은 거의 동일한 거동을 보여 그림 상에 겹치져 제시되고 있는데, 이상상태에서의 overshooting현상은 보이지 않고 계단파의 경우에 좀 더 많은 질량전달을 보이고 있다. Lax-Fredrich

해법은 phase portrait의 결과와 일치하며 파를 빨리 전달시키면서 급격한 상승부위를 없애고 있다. Leap Frog해법은 이상상태에서와 같은 진동은 제거되었으나 다른 해법보다 파를 느리게 전달시키고 있는데 이는 선형증가파의 경우에 더욱 두드러진다.

일반화된 Keller Box해법에 대해서 단일증감파에서 갖는 $\theta+\psi=1$의 규칙이 불안정성으로 인하여 성립하지 않았으며 Preissmann형태의 $\theta$와 $\psi(0.5\leq\theta\leq1,\ \psi=0.5)$를 사용할 때 안정한 결과를 보였다. 또한 급격한 불연속 유입량 125 CMS/M의 계단파에 대하여 다른 양해법은 그대로 수행된 반면 Keller Box해법은 불안정한 결과를 보였다. 이 불안정성은 $t=96$초 $(3\Delta t)$에 125CMS/M를 갖도록 선형 증가부위를 두었을 때 제거되었다. 즉 급격한 유량증가는 Keller Box해법에 불안정성을 유발하는 요인이 된다.

## 6. 결 론

이상과 같은 이론 및 수치실험을 통하여 다음과 같은 결론을 도출하였다.

1) 단일 증감파와 같이 마찰경사가 지배적인 흐름에서는 $Cr(\leq1)$이 증가할수록 오차가 감소하는 Lax-Fredrich방법과 오차가 증가하는 Lax-Wendroff방법, 가장 작은 수행시간을 보이는 Leap Frog방법들에 비해 Keller Box해법이 정확도와 효율성 그리고 안정성에 있어서 모두 좋은 결과를 보인다.

2) Lax-Wendroff와 Richtmyer해법은 비슷한 수치 거동을 보이는데 이들은 Leap Frog해법에 비해 안정성에서 Lax-Fredrich해법에 비해 정확성에서 더 나은 방법이다.

3) 일반화 Lax-Fredrich해법의 매개변수 $\alpha$는 1일 때가 가장 적절하고 일반화 Keller Box해법의 매개변수는 $\theta+\psi=1$의 규칙을 따르되 $0.5\leq\theta\leq1.0$의 값을 택해야만 안정성과 정확성이 보장된다. 이때 격자의 선택은 $\Delta t\leq\Delta x/c'$로 하되 Courant수가 1보다 너무 작지 않도록 해야한다.

4) 바닥경사와 마찰이 있는 충격파에 대하여 Lax-Wendroff, Richtmyer, 그리고 Keller Box는 비슷한 수치특성을 보이지만 이들에 비해 Lax-Fredrich방법은 과도한 수치적 dissipation을 일으키며 Leap Frog방법은 느리게 파를 전달시킨다. 특히 Keller Box해법의 $\theta+\psi=1$의 규칙은 불안정성 때문에 사용할 수 없고 Preissmann형태의 $\psi(=0.5)$를 선택하여야 한다.

## 감사의 말

본 논문은 문교부 '86자유과제 학술연구의 중간결과로서 재정적 지원에 사의를 표합니다.

## 참 고 문 헌

1) 이상호, "Saint Venant식에 관한 유한차분법의 비교분석", 공학석사 학위논문, 서울대학교 토목공학과, 1987.

2) Abbott, M.B., Computational Hydraulics, Pitman, London, 1979, p.145.

3) Amein, M. and C.S. Fang, "Implicit Flood Routing in Natural Channels", J. of the Hyd. Div., ASCE, Vol.96, No. HY12, Dec. 1970, pp.2481~2499.

4) Baltzer, R.A. and C. Lai, "Computer Simulations of Unsteady Flows in Waterways", J. of the Hyd. Div. ASCE, Vol.94, No.HY4, July 1968, pp.1083~1117.

5) Becker, L. and W.W.-G. Yeh, "Identification of Parameters in Unsteady Open Channel Flows" Water Resources Research, Vol.8, No.4, Aug. 1972, pp.956~965.

6) Chaudhry, M.H., Applied Hydraulic Transients, Van Nostrand Reinhold, New York, 1979, p.394.

7) Chow, V.T., Open Channel Hydraulics, Mc Graw-Hill Kogakusha, 1959, p.528.

8) Fread, D.L., Discussion of "Implicit Flood Routing in Natural Channels", by Amein and Fang, J. of the Hyd. Div. ASCE, Vol.97, No. HY7, July 1791, pp.1156~1159.

9) Fread, D., DAMBRK: The NWS DAM-BREAK Flood Forecasting Model, User's Mannual, National Weather Service, Maryland, July 1984, p.9.

10) Garrison, J.M., J.P.P. Ganju and T. Price,

"Unsteady Flow simulation in Rivers and Reservoirs", J. of the Hyd. Div., ASCE, Vol. 95, No. HY5, Sept. 1969, pp. 1559~1576.

11) Henderson, F.M., Open Channel Flow, Macmillan Co., New York, 1966, p. 365.

12) Liggett, J.A. and D.A. Woolhiser. "Difference Solutions of the Shallow Water Equation", J. of the Engineering Mechanics Div. ASCE, Vol. 93, No. EM2, Apr. 1967, pp. 39-71.

13) Martin, C.S. and J.J. Zovne, "Finite-Difference Simulation of Bore Propagation," J. of the Hyd. Div., ASCE, Vol. 97, No. HY7, 1971, pp. 993~1010.

14) Price, R.K., "Comparison of Four Numerical Methods for Flood Routing", J. of the Hyd. Div., ASCE, Vol. 100, No. HY7, July 1974, pp. 879~899.

15) Terzidis, G. and T. Strelkoff, "Comparison of Open Channel Surges and Shocks", J. of the Hyd. Div., ASCE, Vol. 96, No. 12, Dec. 1972, pp. 2581~2610.