

周邊固定 長方形 平板에 있어서 任意点 加振에 의한
 固體傳播音의 豫測

金 義 珩*

An Estimate of Structure-Borne Sound by the Excitation at an Arbitrary
 Point on the Rectangular Plate with Fixed Edges.

U. K. Kim

Abstract

Machinery enclosures are widely adopted to reduce the noise emission in various fields of application. Emitted noise, which is due to the vibration of enclosure's outer surface, is composed of two kinds of sound with different path of propagation.

One is the "structure-borne sound", while the other is "air-borne sound".

In order to get a most efficient machinery enclosure a prudent consideration upon the above structure-borne and air-borne sound is required, as the guiding principle of counter-measure for each noise is quite different. The controlling of input vibration and its isolation are major subjects for the structure-borne sound, and the specifications of absorbing members and damping panels are the major related matters for the air-borne sound.

Hence, it seems very efficient to separate the total sounds into two categories with a great accuracy when one think of further reduction of noise from the existing enclosure, although its separating methods have not been made clear for many years.

Author proposes an application method of experimental modal analysis to extract the structure-borne sound from the measured total radiation sound, as the air-borne sound is deduced by the vectorial difference between the measured total radiation sound and the calculated structure-borne sound.

In order to calculate the correct structure-borne sound by the excitation at an arbitrary point on the enclosure structure, it is important to decide 1) how to estimate the enclosure's surface vibration velocity and 2) how to compute the radiation sound which is considered as the effect of vibration modes of enclosure surface.

The former can be solved with total frequency response function calculated by the application of experimental modal analysis. The latter is to be solved by the author's new

* 正會員, 韓國海洋大學

approaches for radiation sound computation by means of the Rayleigh's integral equation and the boundary-element method applied complex surface vibration velocity.

As a first step, structure-borne sound by the excitation at an arbitrary point on the rectangular plate with fixed edges, has been calculated to verify the reliability of the developed computation methods.

The results of calculation show good agreements with those of the actual measurements.

1. 머릿말

近年, 環境公害에 대한 關心의 向上과 家庭用機器 및 産業用機械의 低騒音化가 강하게 要求되고 있지만, 이들의 騒音源인 機器自體의 低騒音化에는 技術 및 遮音對策에 따른 費用의 限界가 騒音制御에 있어서 問題로 擡頭되고 있다.

이 경우에, 騒音低減을 위해 一般적으로 使用되는 方法으로서, 騒音源인 이들 機械自體를 遮音效果가 있는 構造物로 둘러 싸서 騒音を 制御하는 경우가 많다.

遮音構造物의 外表面에서 放射되는 音은, 遮音構造物 内部機械의 振動傳達에 起因하는 固體傳播音(structure-borne sound)과 内部機械의 表面振動에 의해 遮音構造物 内部에 放射된 音에 起因하는 空氣傳播音(air-borne sound)의 疊으로 주어진다. (그림 1)

全放射音은, 어떤 周波數領域에서는 固體傳播音이, 또한 다른 周波數領域에서는 空氣傳播音이 主成分으로 된다. 여기서, 全放射音을 周波數別로 固體傳播音과 空氣傳播音으로 定量分離할 수 있으면, 遮音構造物의 效果的인 騒音對策이 合理的으로 決定될 수 있다.

그러나, 지금까지 이들 兩者를 定量的으로 分離하는 方法에 대해 研究發展된 것이 없으며 一般的인 騒音對策으로서 合理性이 결여된 試行錯

誤에 의한 것이 있어 왔다.

全放射音으로부터 兩者를 定量的으로 分離하기 위해서는 먼저 兩者中에 하나를 抽出해야 하는데 空氣傳播音은 騒音源의 加振力, 遮音構造物의 内部音場, 遮音材料 등 定量的으로 把握하기 어려운 要素가 많기 때문에 本論文에서는 固體傳播音을 抽出하는 手法에 대해서 究明하고자 한다.

振動傳達에 의해서 發生되는 固體傳播音을 算出하기 위해서는, 먼저 構造物 外表面의 振動速度를 正確히 實測, 또는 豫測하는 것이 必要한데, 이들의 方法으로서 直接測定에 의한 算出, 또는 有限要素法에 의한 豫測이 一般적으로 利用되고 있다.

그러나, 直接測定에 의해 表面振動速度를 求한 경우, 遮音構造物 内部機械의 運轉에 따라 空氣傳播音도 함께 發生되어 測定值에 混入하는 問題가 惹起되며, 이러한 問題를 피하기 위하여 内部機械 대신에 加振器를 利用하여 加振할 경우에는, 實際内部機械의 運轉條件과 同一한 加振스펙트럼 再現의 어려움, 加振器의 出力, 設置場所 등의 問題가 있다. 만약에 이러한 問題들을 克服하여 内部機械의 運轉條件과 同一한 加振스펙트럼으로 加振하여 遮音構造物의 表面振動速度를 測定하였다고 할지라도 이들의 값으로부터 周波數別의 振動모우드 把握이 곤란하기 때문에, 振動모우드를 考慮한 固體傳播音 計算이 不可能하며, 또한 騒音對策을 檢討할 때에도 遮音構造物의 모우드特性值(modal parameter)를 알 수 없기 때문에 構造變更에 의한 振動特性的 最適化計算이 곤란하게 된다.

有限要素法을 利用해서 遮音構造物의 表面振動速度를 計算하는 경우에는 遮音材의 材料特性, 특히 減衰特性을 正確히 豫測해야 하는 어

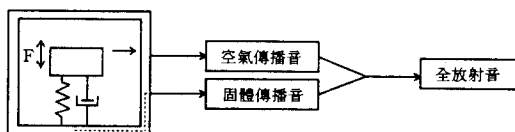


그림 1. 全放射音의 構成圖

력음, 内部機械를 包含한 遮音構造物의 모델化, 境界條件 設定의 어려움 때문에 單純한 構造物外에는 現實적으로 適用이 곤란하다. 또한 各各의 要素에서 發生하는 固體傳播音이 他의 要素의 振動速度에 미치는 影響을 考慮한 構造音響連成解析이 必要하게 된다.

따라서, 本論文에서는 이러한 問題들을 克服하기 위해 實驗모우드解析을 利用해서 固體傳播에 의한 表面振動速度를 求하는 手法을 展開한다.

이 手法을 利用하면 設置場所 問題로 遮音構造物 内部에 加振器를 설치할 수 없는 경우에는, 遮音構造物 表面의 適當한 個所를 加振하고, 加振點과 應答點들 間의 周波數應答函數로부터 構造物全體의 周波數應答函數를 算出하고, 이 結果와 實測한 内部機械運轉中の 加振스펙트럼으로부터, 實際内部機械運轉에 따른 遮音構造物의 表面振動速度를 算出하는 計算法을 開發한다. 이 경우, 實測의 周波數應答函數로부터 表面振動速度를 求하기 때문에 上記의 構造音響聯成問題가 發生할 可能性은 거의 없다.

表面振動速度로부터 放射音을 計算하는 手法으로는, Royleigh에 의한 積分方程式이 一般적으로 利用되고 있으며, 近年 計算機의 발달과 함께 境界要素法(boundary element method)에 의한 解法도 활발히 檢討되고 있다.

그러나, 이 경우의 커다란 問題點은, 放射音 計算에 重大한 影響을 미치는 振動모우드를 考慮할 수 없다는 點이다. 이 問題에 대해서는 아직까지 研究發表된 것은 없으나, 放射音計算에 考慮되어야 할 重要한 問題이다.

本論文에서는 固體傳播音豫測의 첫 段階로서, 周邊固定長方形 平板의 振動特性과 全體의 周波數應答函數를 實驗모우드解析의 手法을 利用하여 算出하고, 이 結果를 利用하여 平板의 任意點 加振에 따른 表面振動速度를 豫測한다. 또한 이 表面振動速度에 의한 固體傳播音豫測을 위해 Rayleigh에 의해 定式化된 一般音壓式과 境界要素法에, 振動모우드의 影響을 考慮한 새로운 計算法을 開發하여 實測値와 比較檢討하고, 開發된 計算法의 妥當性을 確認하고자 한다.

2. 理論解析

2.1 實驗모우드解析^{1~4)}

(Experimental Modal Analysis)

近年, 計算機의 發展, 計測, 데이터處理技術의 進展과 함께, 理論解析 또는 有限要素法에 의한 解析이 곤란한 複雜한 構造物의 振動解析에 實驗모우드解析의 適用이 急速히 발전되어져 왔다.

一般적으로 實驗모우드解析은, 構造物에 있어서 加振點과 應答點 間의 周波數應答函數를 測定하여, 그 構造物의 固有振動數, 모우드減衰比, 固有모우드벡터, 즉 모우드特性值(modal parameter)를 數值解析에 의해서 求하는 手法을 말한다.

實驗모우드解析에는 周波數應答函數의 測定法 모우드特性值의 解析法 및 그의 應用의 3分野로 나누어 생각할 수 있다. 周波數應答函數의 測定法에 對한 研究는, 測定노이즈處理⁵⁾, 加振法⁶⁾에 관한 것이 主된 것이며, 모우드特性值의 解析法에 對한 研究는, 1自由度法, 單點加振多自由度法⁷⁾, 多點加振多點參照多自由度法⁸⁾ 등에 대해 周波數領域과 時間領域에서 어떤 減衰系로 同定하여 解析할것 인가가 主된 論點으로 되고 있다. 또한 應用分野로서는 빌딩·브록크法(building block method)⁹⁾, 시스템同定法, 有限要素法과의 結合 등에 관한 研究가 활발히 行해지고 있다.

모우드特性值의 解析法 中에서 가장 一般적으로 利用되는 것은, 構造物의 減衰를 比例粘性減衰로 同定하고 周波數領域에서 모우드特性值를 求하는 單點加振多自由度偏分反復法이다.

다음에 比例粘性減衰系에 대한 單點加振多自由度 偏分反復法을 簡單히 說明한다.

構造物을 比例粘性減衰系로 同定하여 近似的으로 等價한 離散多自由度系로 變換하면 運動方程式은 다음과 같이 된다.

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f\}$$

$$\{x\} = [X]e^{j\omega t}, \{f\} = [F]e^{j\omega t} \quad (2.1)$$

여기서 $[M], [C], [K]$ 는 각각 質量行列(mass

matrix), 比例粘性減衰行列(proportional viscous damping matrix), 剛性行列(stiffness matrix)이고, $\{x\}$ 와 $\{f\}$ 는 각각 變位벡터(displacement vector), 力벡터(force vector)이며, ω 는 角振動數이다.

式(2.1)의 周波數應答函數는 다음과 같이 求할 수 있다. 變位벡터 $\{X\}$ 을 全固有모우드 $\{\Phi_r\}$ 의 線形結合으로 나타내면,

$$\{X\} = \sum_{r=1}^N \xi_r \{\Phi_r\} = [\Phi] \{\xi\} \quad (2.2)$$

N : 固有모우드의 數

式(2.2)을 式(2.1)에 代入하고, 各항의 앞에 $\{\Phi\}^T$ 를 곱하면,

$$(-\omega^2 [\Phi]^T [M] [\Phi] + j\omega [\Phi]^T [C] [\Phi] + [\Phi]^T [K] [\Phi]) \{\xi\} = [\Phi]^T \{F\} \quad (2.3)$$

固有모우드의 直交性을 利用하면,

$$\left. \begin{aligned} [\Phi]^T [M] [\Phi] &= [m] \\ [\Phi]^T [K] [\Phi] &= [k] \\ [\Phi]^T [C] [\Phi] &= \alpha [m] + \beta [k] = [C] \\ (\because [C] &= \alpha [M] + \beta [K]) \end{aligned} \right\} (2.4)$$

여기서, $[m]$, $[k]$, $[c]$ 는 각각 對角要素가 모우드質量(modal mass), 모우드剛性(modal stiffness), 모우드減衰係數(modal damping coefficient)를 갖는 對角行列이다.

式(2.4)를 式(2.3)에 代入하면

$$\{(-\omega^2 [m] + [k]) + j\omega [c]\} \{\xi\} = [\phi]^T \{F\} \quad (2.5)$$

따라서, J 點의 外力과 i 點의 應答間의 周波數應答函數를 複素라이언스 $H_{ij}(\omega)$ (compliance)로 나타내면,

$$H_{ij}(\omega) = X_i/F_j = \sum_{r=1}^N \frac{A_{ijr}}{(\Omega_r^2 - \omega^2) + j(2\zeta_r \Omega_r \omega)} \quad (2.6)$$

Ω_r : 不減衰固有角振動數
(undamped natural frequency)

ζ_r : 減衰比(damping ratio)

A_{ijr} : $\phi_{ir} \phi_{jr} / m_r$

式(2.6)의 對象周波數範圍以外的 固有모우드가 複素라이언스에 미치는 影響을 考慮할 경우, 對象固有모우드 보다 低次의 固有모우드에 의한 影響을 慣性拘束(inertia restraint)라 하고, 高次의 固有모우드에 의한 影響을 剩餘複素라이언스(residual compliance)라고 하며, 이들을 考慮하면 式(2.6)은 다음과 같이 된다.

$$H_{ij}(\omega) = -\frac{Y_{ij}}{\omega^2} + \sum_{r=1}^{N+l} \frac{A_{ijr}}{(\Omega_r^2 - \omega^2) + j(2\zeta_r \Omega_r \omega)} + Z_i \quad (2.7)$$

Y_{ij} : 剩餘質量(residual mass)

$$(\sum_{r=1}^{i-1} \phi'_{ir} \phi'_{jr})$$

Z_{ij} : 剩餘剛性(residual stiffness)

$$(\sum_{r=N+l+1}^{\infty} \phi''_{ir} \phi''_{jr})$$

l : 對象最低固有모우드

式(2.7)에 있어서 未味數, 즉 모우드特性値는 A_{ijr} , Ω_r , ζ_r , Y_{ij} 및 Z_{ij} 이다. 여기서 A_{ijr} , Y_{ij} 및 Z_{ij} 은 線形項이고, Ω_r 과 ζ_r 은 非線形項이다. 만약에 非線形項인 Ω_r 과 ζ_r 이 어떠한 方法으로 求해 設다고 하면 A_{ijr} , Y_{ij} , Z_{ij} 은 實驗複素라이언스와 式(2.7)과의 自乘誤差函數를 各各의 線形項으로 偏分하여 計算하면 求할수 있다. 그러나, Ω_r 과 ζ_r 은 自乘誤差函數를 이들이 項으로 偏分하여 計算하면 非線形으로 되어 求할수가 없다. 따라서 이들을 테일러1次展開를 利用하여 線形近似하고, 適當한 初期値를 代入하여 反復計算에 의해 값을 改善해 가는 數值解析에 의존할 수 밖에 없다.

이 計算過程을 簡單히 설명하면 다음과 같다.

Y_{ij} 과 Z_{ij} 은 一般的으로 複素數로 되며, 固有모우드의 數을 N 이라고 하면 未知數는 $(3N+4)$ 個로 된다. 먼저 Ω_r , ζ_r 의 初期値를 適當히 定하여 偏分計算하면 A_{ijr} , Y_{ij} , Z_{ij} 이 求하여 진다. 이 計算에 의해 $(3N+4)$ 個의 初期値 γ_{hs} 가 求하여 지며, 初期初의 一次增分量을 $\Delta\gamma_h$ 과 하면 새로운 모우드特性値의 初期値 γ_h ,

$$\gamma_h = \gamma_{hs} + \Delta\gamma_h \quad (2.8)$$

式(2.7)을 $\Delta\gamma_h$ 에 關해서 테일러展開하고, 1次項까지 取하면,

$$H(\omega_i, \gamma_h) \doteq H(\omega_i, \gamma_{hs}) + \sum_{h=1}^{3N+4} \{\partial H(\omega_i, \gamma_{hs}) / \partial \gamma_h\} \cdot \Delta\gamma_h = H_{Ri} + j H_{Ii} \quad (2.9)$$

H_{Ri} : $H(\omega_i, \gamma_h)$ 의 實數部

H_{Ii} : $H(\omega_i, \gamma_h)$ 의 虛數部

M 個의 角振動數 $\omega_i (i=1, M)$ 에 대해서, 實驗에 의해서 求해진 콤플라이언스 $G(\omega_i)$ 와 式(2.9)의 自乘誤差 E 를 求해, $\Delta\gamma_h$ 로 偏分한후 이 結果를 零으로 놓고 計算하면 $\Delta\gamma_h$ 가 求하여 진다.

$$E = \sum_{i=1}^M \{(G_{Ri} - H_{Ri})^2 + (G_{Ii} - H_{Ii})^2\} \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \Delta\gamma_h} = 2 \sum_{i=1}^M \left\{ \frac{\partial H_{Ri}}{\partial \Delta\gamma_h} (H_{Ri} - G_{Ri}) + \frac{\partial H_{Ii}}{\partial \Delta\gamma_h} (H_{Ii} - G_{Ii}) \right\} = 0 \quad (2.11)$$

G_{Ri} : $G(\omega_i)$ 의 實數部

G_{Ii} : $G(\omega_i)$ 의 虛數部

式(2.11)에서 求해진 $\Delta\gamma_h$ 를 式(2.9)에 代入하고, 式(2.10)의 自乘誤差가 충분히 작아질때 까지 反復計算하면 모우드特性值 γ_h 를 求할 수 있다.

2.2 任意點의 加振에 의한 表面振動速度

構造物의 周波數應答函數를 測定함에 있어, 加振點을 固定하고 應答點을 順次移動시키거나, 應答點을 固定하고 加振點을 順次移動하면서 測定하면, 周波數應答函數의 行列은 1例 또는 1行 밖에 求할 수 없다. 任意點의 加振에 의한 表面振動速度를 求하기 위해서는 周波數應答函數 全行列의 값을 求할 必要가 있다.

式(2.7)에서 加振點과 應答點이 同一場所인 경우 $A_{jir}, Y_{jir}, Z_{jir}$ 은

$$\begin{aligned} A_{jir} &= \phi_{jr} \phi_{jr} / m_r \\ Y_{jir} &= \phi'_{jr} \phi'_{jr} \\ Z_{jir} &= \phi''_{jr} \phi''_{jr} \end{aligned} \quad (2.12)$$

振動모우드의 基準化에 있어서의 모우드質量 m_r 을 1로 해도 一般性이 상실되지 않으므로, 振動모우드벡터 ϕ_{jr} 과 ϕ_{ir} 은 式(2.6)과 (2.12)로부터 다음과 같이 求할 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi_{jr} &= \sqrt{A_{jir}}, \quad \phi'_{jr} = \sqrt{Y_{jir}}, \quad \phi''_{jr} = \sqrt{Z_{jir}} \\ \phi_{ir} &= A_{jir} / \phi_{jr}, \quad \phi'_{ir} = Y_{jir} / \phi'_{jr} \\ \phi''_{ir} &= Z_{jir} / \phi''_{jr} \end{aligned} \quad (2.13)$$

實驗모우드解析에 의해서 求해진 모우드特性值와 式(2.13)을 式(2.7)에 代入하면 全體의 周波數應答函數를 求할수 있고, 任意點의 加振에 따른 表面振動速度 $\{V\}$ 는 다음과 같이 된다.

$$\{V\} = j\omega [H] \{F\} \quad (2.14)$$

$$\{V\} = \{V_1, V_2, \dots, V_L\}^T$$

$$[H] = [Y] + \sum_{r=1}^{N+L} \frac{\{\Phi_{Lr}\} \{\Phi_{Lr}\}^T}{(\Omega_p^2 - \omega^2) + j(2\zeta_r \Omega_r \omega)} + [Z]$$

$$[Y] = \{\Phi'_{Lr}\} \cdot \{\Phi'_{Lr}\}^T$$

$$[Z] = \{\Phi''_{Lr}\} \cdot \{\Phi''_{Lr}\}^T$$

$$\{\Phi_{Lr}\} = \{\phi_{1r}, \phi_{2r}, \dots, \phi_{Lr}\}$$

$$\{\Phi'_{Lr}\} = \{\phi'_{1r}, \dots, \phi'_{Lr}\}$$

$$\{\Phi''_{Lr}\} = \{\phi''_{1r}, \phi''_{2r}, \dots, \phi''_{Lr}\}$$

$$\{F\} = \{F_1, F_2, \dots, F_m\}^T$$

式(2.14)의 모우드特性值是 2.1節의 計算結果이므로, 이들 값을 代入하면 $[H]$ 가 求해지고, 任意點의 加振스펙트럼을 측정하여 式(2.14)에 代入하면 表面振動速度 $\{V\}$ 의 振動과 位相角을 求할수 있다. $\{V\}$ 의 位相角은 振動모우드의 影響을 考慮해서 放射音을 豫測할 때에 利用된다.

2.3 固體傳播에 의한 音場解析

2.3.1 一般音壓式에 의한 音場解析

無限平板의 表面振動速度를 利用해서 放射音을 豫測하는 積分方程式은, 1896年 Rayleigh에 의해서 定式化되었다.¹⁰⁾ 이 방법은 平板의 振動面을 多數의 要素로 分割하고, 各要素의 振動速度에 의해서 發生되는 音壓을 振動面全體에 必하여 積分하여 放射音을 算出하는 手法를 말한다.

피스톤音源에 의해서 發生되는 空間內의 A 點에서의 放射音壓을 P_A 라고 하면,

$$P_A = \frac{j\omega\rho}{2\pi} v \iint_s \frac{\exp(-jkr)}{r} ds \quad (2.15)$$

- k : 波數(wave number = c/ω)
- c : 音速,
- ω : 角振動數
- v : 피스톤音源의 速度

여기서, 構造物表面에 有限個의 피스톤音源이 存在한다고 하면, 各피스톤音源의 速度分布에 따른 空間内の A 點에서의 放射音壓 P_A' 는 式(2.15)의 重疊에 의해 다음과 같이 된다.

$$P_A' = \sum_{m=1}^M P_A = \frac{j\omega\rho}{2\pi} \sum_{m=1}^M v_m \iint_{S_m} \frac{\exp(-jkr_m)}{r_m} dS_m \quad (2.16)$$

- M : 피스톤音源의 數
- v_m : 各피스톤音源의 速度
- r_m : 各피스톤音源과 受音點까지의 距離
- S_m : 各피스톤音源의 面積
- ρ : 空氣의 密度

2.3.2 境界要素法에 의한 音場解析

一般構造物의 放射音豫測에 有限要素法¹¹⁾과 境界要素法¹²⁻¹⁶⁾에 의한 解法이 檢討 되어 지고 있다. 有限要素法은 解析空間全體를 要素로 分割해서 近似計算을 行하기 때문에 計算費用과 計算機 記憶容量의 兩面에 대해 커다란 制約을 받는다. 이러한 이유때문에 近年 境界要素法에 의한 音場解析이 활발히 研究檢討되어 지고 있다. 이 방법은 Helmholtz 積分方程式을 基礎로 하고, Green關係를 適用함으로써 要素分割은 空間(3次元)에서 表面(2次元)으로 處理可能하여 入力데이터의 作成 및 計算時間이 大幅短縮되는 利點이 있다.

다음에 境界要素法에 의한 音場解析의 理論에 대해서 檢討한다.

그림2에서와 같이 任意的 形狀을 갖는 3次元 構造物이 無限의 等方性理想氣缸에 存在한다고 한다. 이때에 構造物이 調和振動으로 加振되는 경우, 氣體의 音場은 式(2.17)이 Helmholtz方程式으로 支配되어진다.¹⁴⁾

$$\nabla^2\phi + k^2\phi = 0 \quad (2.17)$$

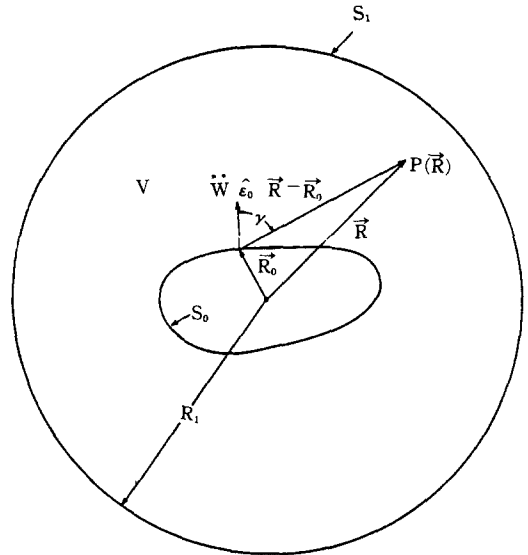


그림 2. 概念圖

- ∇ : Laplace演算子
- ϕ : 速度 Potential
- k : 波長定數(c/ω)
- ω : 角振動數
- c : 音速

速度 Potential과 音壓(P), 粒子速度(v)와의 關係는 다음과 같다.

$$P = \rho \frac{\partial\phi}{\partial t} = j\omega\rho\phi$$

$$v = -\frac{\partial\phi}{\partial n} \quad (2.18)$$

여기서 $j = \sqrt{-1}$, ρ 는 空氣의 密度, v 는 要素表面에 대한 法線方向의 粒子速度, n 은 法線벡터이다.

式(2.17)은 構造物表面의 速度만 考慮한 音場解析이며, 表面音壓은 考慮할 수 없다.

表面速度와 表面音壓을 함께 考慮하기 위해서는 Green函數를 利用한 式(2.19)의 Inhomogeneous Helmholtz 方程式을 解析해야 한다.

$$(\nabla^2 + k^2)g(r) = -\delta(r) \quad (2.19)$$

- $\delta(r)$: 3次元 Dirac delta 函數
- g : green 函數

또한, 表面S로 둘러 싸여진 積體V에 대한 積分은, Green의 定理로부터 面積S의 積分 즉, Helmholtz 積分方積式으로 유도할 수 있다.

$$\int_V (\phi \nabla^2 g - g \nabla^2 \phi) dV = - \int_S \left(\phi \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) ds \quad (2.20)$$

式(2.20)의 左邊에 式(2.17) 및 式(2.19)를 代入하면,

$$\int_V (\phi \nabla^2 g - g \nabla^2 \phi) dV = \int_V [\phi \{-k^2 g - \delta(r)\} + g k^2 \phi] dV = - \int_V \phi \delta(r) dV \quad (2.21)$$

Dirac delta 函數는 積體V로 積分할 경우 다음과 같은 값을 갖는다.

$$\int_V \phi \delta(r) dV = C(R) \phi(R) \quad (2.22)$$

- $C(R) = 1$: R이 V의 外部에 있을 경우
- $C(R) = 1/2$: R이 V의 境界面에 있을 경우
- $C(R) = 0$: R이 V의 内部에 있을 경우

式(2.22)를 式(2.20)에 代入하면,

$$C(R) \phi(R) = \int_{S_1+S_0} \left\{ \phi(R_0) \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial \phi(R_0)}{\partial n} \right\} ds \quad (2.23)$$

式(2.23)의 基本解 g , 즉 Green 函數는 $\exp(-ikr)/4\pi r$ 로 되며, 이 값을 式(2.23)에 代入하면,

$$C(R) \phi(R) = - \frac{1}{4\pi} \int_{S_1+S_0} \phi(R_0) \frac{e^{-ikr}}{r} \left(\frac{1}{r} + ik \right) \times \frac{\partial r}{\partial n} ds + \frac{1}{4\pi} \int_{S_1+S_0} \frac{e^{-ikr}}{r} v_n(R_0) ds \quad (2.24)$$

여기서, S_1 表面까지의 距離 R_1 을 $R_1 \rightarrow \infty$ 로 境界條件을 取하고, 式(2.18)을 式(2.24)에 代入하면,

$$C(R)P(R) = - \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} P(R_0) \frac{e^{-ikr}}{r} \left(\frac{1}{r} + ik \right)$$

$$\times \frac{\partial r}{\partial n} ds_0 + \frac{i\omega\rho}{4\pi} \int_{S_0} \frac{e^{-ikr}}{r} v_n(R_0) ds_0 \quad (2.25)$$

任意空間에서의 音壓 $P(R)$ 을 計算하기 위해서는 構造物表面의 音壓 $P(R_0)$ 와 表面速度 $v_n(R_0)$ 을 求해야만 한다. 여기서, 表面速度는 2.2節의 手法에 의해 算出되며, 表面音壓 $P(R_0)$ 는 다음의 計算過程에 의해 求할수 있다.

먼저, 構造物의 表面 S_0 을 N 分割하고 각각의 要素에 대해 表面音壓과 表面速度가 一定하다고 하면, 構造物表面의 任意點 r_i 에서의 音壓 $P(r_i)$ 은 式(2.22)와 式(2.25)에 의해 다음과 같이 된다.

$$P(r_i) = \sum_{j=1}^N \{ P(r_j) D_{ij} + v(r_j) M_{ij} \} \quad (2.26)$$

$$D_{ij} = - \frac{1}{2\pi} \int_{S_0} \frac{\exp(-ikr_{ij})}{r_{ij}} \left(\frac{1}{r_{ij}} + ik \right) \frac{\partial r_{ij}}{\partial n} ds_0$$

$$M_{ij} = \frac{j\rho\omega}{2\pi} \int_{S_0} \frac{\exp(-ikr_{ij})}{r_{ij}} ds_0$$

여기서, D_{ij} 는 j 要素의 音壓이 i 要素의 音壓에 미치는 影響을 나타내는 二重音源係數(dipole coefficient)이고, M_{ij} 는 j 要素의 表面速度가 i 要素의 音壓에 미치는 影響을 나타내는 單音源係數(monopole coefficient)이다. r_{ij} 는 要素 i 와 要素 j 의 中心點 間의 距離이다.

따라서 式(2.26)을 各要素에 대해 展開하여 全體要素의 表面音壓 $\{P\}$ 을 求하면,

$$\{P\} = [A]^{-1} \{B\} \quad (2.27)$$

$$[A] = [A_{ij}] = [\delta_{ij} - D_{ij}]$$

$$[B] = [M_{ij}] \{v_j\}^T$$

δ : kronecker delta

式(2.27)에서 어떤 周波數와 物體内部의 假想閉空間의 固有值가 一致하면 $[A]$ 의 行列式이 零이 되어 數值的으로 解를 求하는 것이 困難하게 된다. 이 問題點을 回避하기 위해 Schenck¹²⁾는 物體内部의 點을 利用하여 計算하는 方法을 提案하였다.

式(2.22)와 式(2.25)에 의해 物體内部의 音壓은 零으로 되어 式(2.26)은,

$$P(\tau_j) = 0 = \sum_{j=1}^N \{P(\tau_j)D_{ij} + v(\tau_j)M_{ij}\} \quad (2.28)$$

式(2.26)과 式(2.28)을 連立하고 最小自乘法을 利用하여 計算하면 表面音壓이 求하여지며, 이 結果를 式(2.25)에 代入하면 任意空間에서의 音壓計算이 可能하게 된다.

2.4 表面振動모우드의 影響을 考慮한 放射音 計算法

式(2.15) 또는 式(2.25)를 利用하여 放射音을 計算할 경우, 計算上 必要한 表面振動速度는 一般의 音源의 振動速度를 自乘平均한 값을 取하고 있다. 그러나, 自乘平均한 表面振動速度를 利用하여 放射音을 計算하면 表面의 (1,1) 振動모우드 以下에서는 實測値와 別 차이가 없지만 그 以上의 振動모우드에서는 固有振動數를 中心으로 하여 計算値가 實測値보다 크게 되는 경우가 많다. 이 原因은 表面의 振動모우드를 考慮하지 않고 計算한 結果로 생각된다. 즉, 自乘平均한 振動速度를 利用할 경우, 振動모우드의 골(sink)도 산(source)과 같이 音源이 된다. 實際는 振動모우드의 산에서 放射된 音은 골에서 放射된 音과의 位相差를 考慮하여 合成算出 해야하며, 이 影響은 無視할 수 없으나, 大部分의 論文에는 이 影響을 考慮하지 않고 있다.

各要素의 피스톤音源에 대한 振動모우드를 周波數別로 求하는 方法은 簡單하지 않다. 有限要素法에 의한 計算이 考慮될 수 있으나, 實際의 構造物에 適用하여 表面振動速度의 位相差를 求하고 이 結果로 放射音까지 豫測하는 것은 現實의 所以로 可能性이 없다.

本論文에서는 實驗모우드解析을 利用하여 任意點 加振에 따른 各要素의 表面振動速度와 位相差를 周波數別로 求하는 手法을 提案한다.

2.2 節의 式(2.14)에 있어서 콤플라이언스 $[H]$ 는 各 周波數에 대한 複素數值이며, 이 結果와 任意點의 加振力스펙트럼을 利用하여 各要素의 表面振動速度를 計算하면 이들의 값도 複素數로 된다. 이것은 各 周波數에 따른 振動모

우드의 位相角과 加振力스펙트럼에 대한 振動速度를 갖는다.

따라서 이 複素表面振動速度를 式(2.16) 또는 式(2.27)에 代入하면 簡單하게 振動모우드의 影響을 考慮한 放射音 算出이 可能하게 된다.

3. 實驗裝置 및 實驗方法

周邊固定長方形平板의 周波數應答函數를 實驗의 所以로 求하기 위해 加振은 Impact hammer (BK8202)로, 應答은 加速度計 (BK4393, 2.2g)로 測定했다. 兩信號는 增幅器(BK2635)를 通하여 2Ch. FFT (BK2032)로 轉送하여, 周波數應答函數를 求한다. 計算機 (HP9000시리즈 320)는 測定管理 및 測定한 周波數應答函數를 메모리에 貯藏한다. 全點의 測定이 끝나면 이들의 데이터를 端末機(NEC PC9801VM)을 通하여 大型計算機(日立 M-680H)로 轉送하고, 筆者가 開發한 電算프로그램을 利用하여 모우드特性値를 計算한다. 實測한 周波數應答函數와 計算한 모우드特性値로 부터 再現한 周波數應答函數를 플롯타 (HP7550A)로 圖示하여 計算의 妥當性을 檢討한다.

固體傳播音은 Impact hammer 加振時의 音壓레벨을 直徑 1/2"의 콘덴사마이 크로폰(BK4165, AMP BK2639)으로 測定하였다.

周邊固定長方形平板의 周波數應答函 및 固體傳播音 測定을 위한 實驗裝置配置를 그림 3에

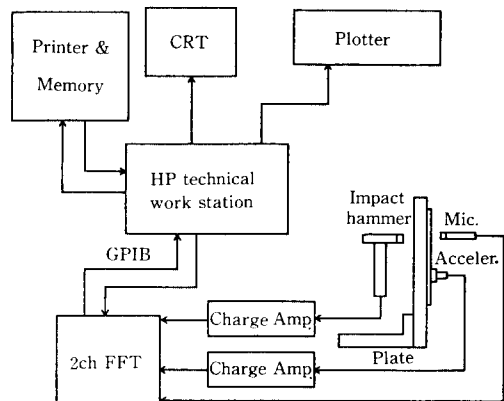


그림 3. 實驗裝置配置圖

보인다.

周邊固定長方形平板은 치수 $202.5 \times 372 \times 3mm$ 의 鐵板(SS41)이 18mm의 鐵板틀에 M8의 볼트 50개로 固定되어 있다.

周波數應答函數의 測定은 그림 4에서와 같이 (3,4)點에 加速度計를 왁스로 接着하고, 平板裏面의 70點을 Impact hammer로 順番대로 加振하여 얻었다. 測定周波數範圍는 1Hz~1.6KHz로 했으며, 加振力과 應答의 相關關係를 확인하기 위해 Coherence值를 參照하면서 1點에 대해 4회 加振하여 測定된 周波數應答函數를 平均하였다.

周波數應答函數는 對象周波數範圍를 考慮하여 Accelerance로 定했다. Impact hammer 加振力에는 Transient 函數를, 應答에는 指數函數를 Weight로 使用했다. Accelerance의 周波數間隔은 2Hz이다.

固體傳播音은 (4,5)點을 Impact hammer로 加振하여 (3,4), (6,3)點의 音壓을, (6,3)點을 加振하여 (4,5)點의 音壓레벨을 表面上 20mm 空間에서 測定했다. 이때에 測定音壓레벨과 計算音壓레벨을 比較하기 위해 加振力스펙트럼도

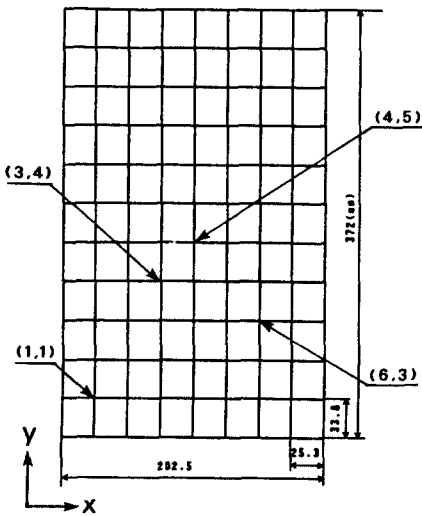


그림 4. 周邊固定長方形平板의 座標

同時에 測定했다. 測定平均回數는 4회로 定했다.

그림 5, 6에 周波數應答函數와 固體傳播音의 測定模樣을 보인다. 實際의 加振은 裏面에서 行하였다.

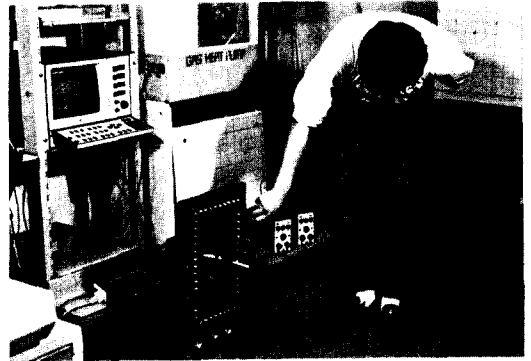


그림 5. 周波數應答函數의 測定模樣

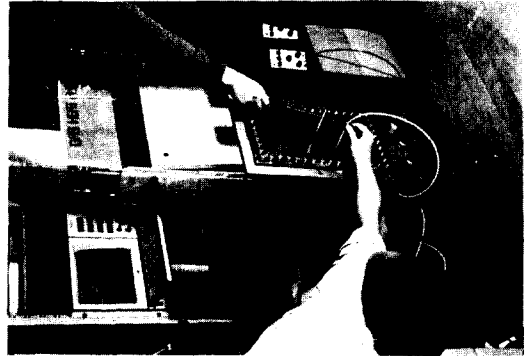


그림 6. 固體傳播音의 測定模樣

4. 計算手法의 吟味

本章에서는 周邊固定長方形平板에 대해 2章의 手法에 의해서 計算된 周波數應答函數와 固體傳播音을 3章의 實驗方法으로 測定된 값들과 比較檢討하여 計算法의 妥當性을 確認한다.

모우드特性值 計算에 使用된 固有모우드數는 測定한 周波數應答函數를 參照하여 11個로 하였다. 一般的으로 振動振幅의 谷部分의 精度를 向上시키기 위해 測定된 周波數應答函數에 Weight를 건위 偏分方復法을 利用하여 모우드特性值를 算出하고 있으나, 이 경우 Weight函數는 全周

波數範圍에 대해서 一律적으로 作用하게 되므로, 振動應答의 觀點으로 부터 重要な 山頂部에서 誤差가 크게 될 可能性이 있다. 따라서 本論文에서는 Weight函數를 利用하지 않았다.

式(2.7)의 非聯形項인 固有振動數와 減衰係數의 初期値는 實驗 Accelerance를 參考하여 全測定點에 대해 同一値를 利用하였다.

또한, 應答點이 固有모우드의 節點近邊에 있는 경우, 이 自由度에 대한 모우드特性値는 發散하기 쉬우며, 發散된 값을 그대로 利用하여 偏分反復을 繼續하면 全體의 모우드特性値가 發散할 可能性이 있다. 따라서, 本論文에서는 偏分反復에 의해 새로 算出된 固有振動數가 初期値의 1.3倍以上 또는 0.7倍以下로 된 경우에는, 이 振動모우드의 固有振動數와 減衰係數를 初期値 값으로 하고 振動振幅과 關係된 A_{ij} 을 상당히 작은 값을 주어 計算하였다.

反復計算은 式(2.10)의 自乘誤差 E 가 次的 條件을 滿足할때 까지 繼續한다.

$$E_{n-1} \geq 0.99E_n \quad (4.1)$$

여기서, n 은 反復回數이며, E_{n+1} 이 E_n 보다 크게 된 경우, 즉 發散하기 시작하면 수속할 可能性보다 發散할 可能性이 높기 때문에 計算時間上 E_n 時의 모우드特性値를 計算結果로 하였다.

計算된 모우드特性値로 부터 再現한 Accelerance와 實測値를 그림 7, 8에 보인다. 456Hz가 (1,1)振動모우드 이므로 400Hz부터 圖示하였다.

그림9의 計算에 의해 求라진 一部の 振動모우드를 나타낸다.

그림 7, 8에서의 같이 計算値와 測定値가 상당히 좋은 一致를 보이고 있어 本論文에서 開發한 電算프로그램의 妥當性을 確認할 수 있었다.

計算되어진 모우드特性値를 式(2.14)에 代入하면, 平板全體의 周波數應答函數를 求할 수 있고, 이 結果와 任意點의 加振時 測定한 加振力 스펙트럼으로부터 各 要素의 表面振動速度가 計算된다.

먼저, 式(2.16)의 一般音壓方程式과 式(2.25)의 境界要素法에, 一般적으로 利用되고 있는 自乘平均한 表面振動速度를 代入하여 任意點加振에

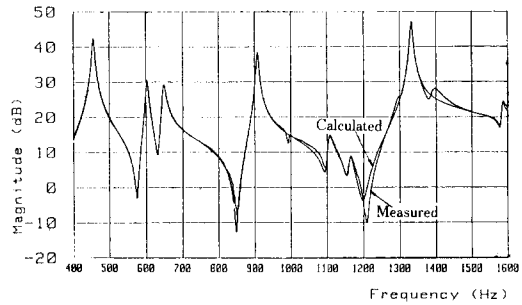


그림 7. Accelerance의 計算値와 實驗値 (加振點(4,5), 應答點(3,4))

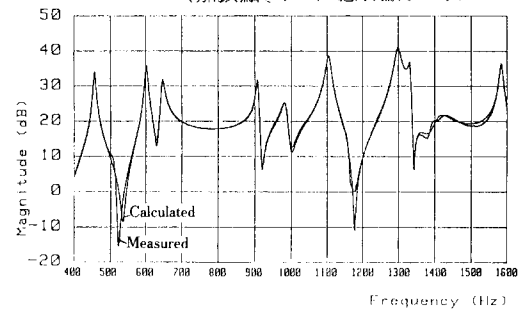


그림 8. Accelerance의 計算値와 實驗値 (加振點(6,3), 應答點(3,4))

따른 固體傳播音을 豫測하고 實測値와 對比하였다. 그림10에 加振點(4,5), 測定點(6,3)인 경우의, 그림11에 加振點(6,3), 測定點(4,5)인 경우의 固體傳播音을 一般音壓方程式을 利用하여 表面振動速度를 自乘平均値로 計算한 結果이다. 그림10에서는 특히 908Hz의 (1,3)振動모우드에서, 그림11은 특히 605Hz의 (1,2)振動모우드, 1105Hz의 (2,1)振動모우드, 1300Hz의 (2,2)振動모우드에서 誤差가 크다. 이 경우의 共通의인 事項은 測定點이 振動모우드의 節點에 상당한다는 것이다 (그림9 參照).

또한 그림10에서 456Hz의 (1,1)振動모우드, 648Hz의 (1,2)振動모우드에서, 그림11에서는 456Hz, 908Hz의 (1,3)振動모우드에서 實測値와 잘 一致하고 있다. 이 경우의 共通의인 事項은 測定點이 振動모우드의 節點에서 상당히 떨어져 있다는 것이다(그림9 參照). 456Hz는 (1,1)振動모우드이므로 어느 測定點에서도 實測値와 잘 一致하며, 908Hz에서의 그림10과 그림11은 같은 計算式을 利用했음에도 불구하고 誤差面에서 상당한 차이가 있다.

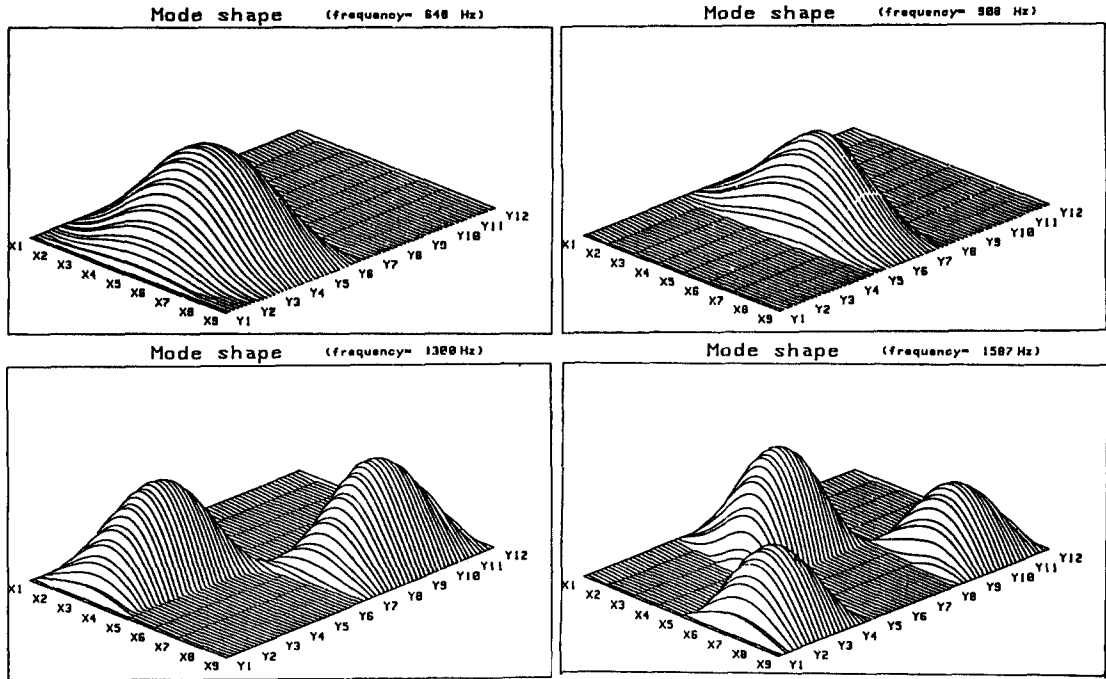


그림 9. 周邊固定長方形平板에 대한 振動모우드의 一部

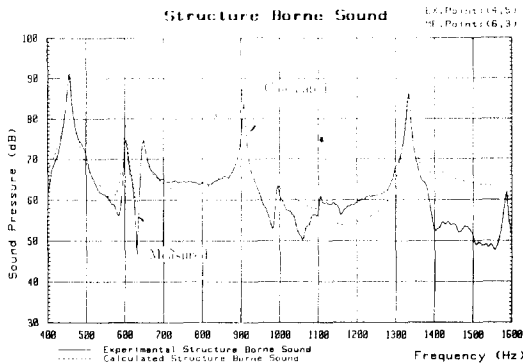


그림 10. 固體傳播音의 計算値와 實驗値
 {一般音壓方程式, 自乘平均振動速度,
 加振點(4,5), 測定點(6,3)}

境界要素法을 利用하여 計算한 結果도 上記와 같다. 이 原因은 表面振動모우드의 影響은 無視한 結果로 結論지을 수 있다.

表面振動모우드의 影響을 考慮하기 위하여, 筆者가 2.4節에서 提案한 複素表面振動速度를 利用하여 計算하고 實驗値와 對比한 結果를 그림 12, 그림 13에 보인다. 그림 12는 그림 10과, 그림 13은 그림 11의 加振點, 測定點에 대한 것이다.

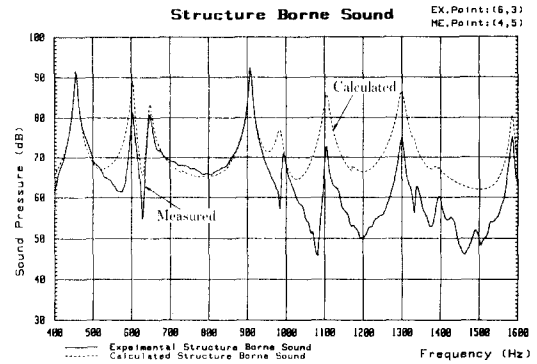


그림 11. 固體傳播音의 計算値와 實驗値
 {一般音壓方程式, 自乘平均振動速度,
 加振點(6,3), 測定點(4,5)}

이들의 結果를 檢討하면, 그림 12, 13에서는 그림 10, 11에서 問題로 되었던 節點近方의 周波數에서는 값이 상당히 개선되어졌으나 測定點이 節點에 있는 周波數에서는 計算値가 實驗値보다 작다. 특히 그림 13과 같이 測定點이 平板의 中央에 있는 경우에는, 測定點이 振動모우드의 節點에 있는 경우가 많으므로 더욱 이러한 現象이 發生된다.

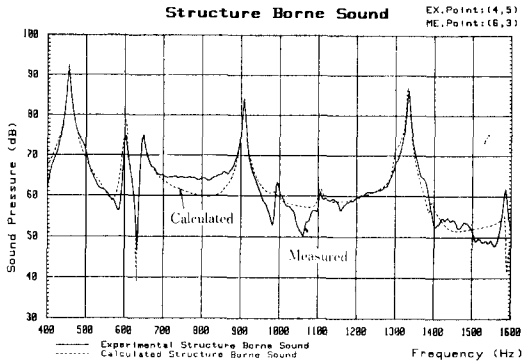


그림 12. 固體傳播音의 計算値와 實驗値
 {一般音壓方程式, 複素振動速度,
 加振點(4, 5), 測定點(6, 3)}

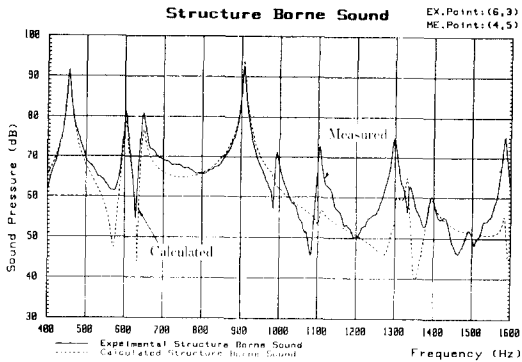


그림 13. 固體傳播音의 計算値와 實驗値
 {一般音壓方程式, 複素振動速度,
 加振點(6, 3), 測定點(4, 5)}

이 原因을 例들들어 說明하면, 振動모우드가 理想的인 (2,2)振動모우드라고 하면 中央點이 節點으로 되고, 그點의 上部空間에서 放射音을 計算하였다고 하면, 音壓은 零으로 된다. 그러나 實際의 경우에는 이러한 結果를 期待할 수 없다. 音響放射効率測定의 結果를 參考 하더라도 理論의으로는 Coincidence周波數以下에서는 零이지만, 實際로는 周波數가 增加함에 따라 音響放射効率이 增加되어 지는 것을 알수 있다.¹⁰⁾ 따라서, 그림 13과 같이 測定點이 振動모우드의 節點에 位置하고 測定周波數範圍가 Coincidence 周波數以下인 경우에는 高周波數領域으로 갈수록 이러한 現象이 두드러지게 나타난다.

境界要素法에 의하여 計算한 경우에는 一般音壓方程式으로 計算한 結果보다 약간 計算音壓이 增加하나 上記와 비슷한 結果를 얻었다. 境界要

素法으로 計算한 音壓이 약간 상승한 理由는 平板의 振動모우드가 理論的인 形象를 갖고 있지 않기 때문에 表面音壓에 의한 成分의 補正效果로 思料된다.

따라서, 本論文에서는 振動모우드의 (+)部分과 (-)部分만에 의한 音壓을 求하고, 이 값들을 利用하여 修正係數를 求하는 方法을 檢討하였다.

各周波數에 대한 振動모우드의 (+)部分의 音壓을 $P_+(\omega)$, (-)部分의 音壓을 $P_-(\omega)$ 라 하고, 兩者의 값을 比較하여 $P_+(\omega)$ 가 $P_-(\omega)$ 보다 크다고 할 경우, 修正係數 $CF(\omega)$ 를 다음과 같이 提案한다.

$$CF(\omega) = 1 - \{P_-(\omega)/P_+(\omega)\} \quad (4.2)$$

이때 測定點의 音壓 $P(\omega)$ 는

$$P(\omega) = P_+(\omega) - P_-(\omega) \cdot CF(\omega) \quad (4.3)$$

式(4.3)은 $P_+(\omega)$ 와 $P_-(\omega)$ 가 같다면 測定點의 音壓은 $P_+(\omega)$ 가 되는 것을 의미한다.

式(4.3)을 利用하여 一般音壓式으로 計算한 結果를 그림 14, 15에, 境界要素法으로 計算한 結果를 그림 16, 17에 보인다.

이들의 結果를 그림 12, 13과 比較하여 보면 測定點이 節點으로 부터 떨어진 周波數에 대해서는 $CF(\omega)$ 를 考慮한 것과 하지 않은 것이 별로 差가 없어 實用上 問題가 없으며, 앞에서 問題가 되었던 測定點이 節點上에 있는 周波數에

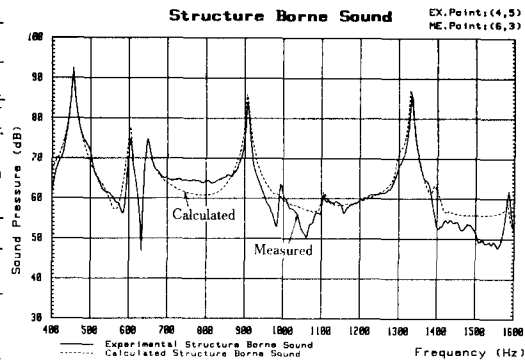


그림 14. 固體傳播音의 計算値와 實驗値
 {一般音壓方程式, 複素振動速度 $CF(\omega)$,
 加振點, (4, 5), 測定點(6, 3)}

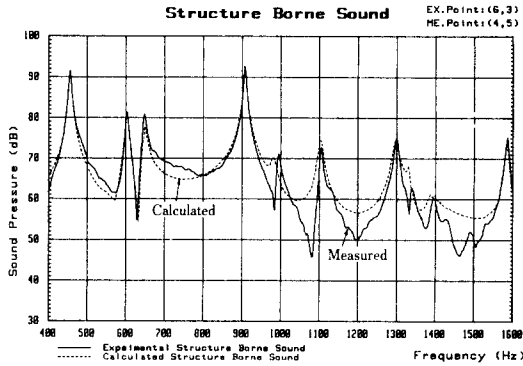


그림15. 固體傳播音의 計算値와 實驗値
 {一般音壓方程式, 複素振動速度, $CF(\omega)$,
 加振點(6, 3), 測定點(4, 5)}

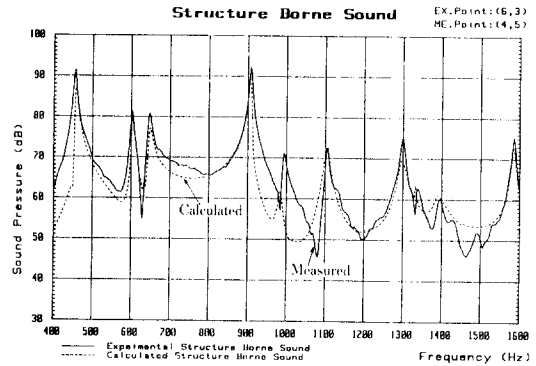


그림17. 固體傳播音의 計算値와 實驗値
 {境界要素法 複素振動速度, $CF(\omega)$,
 加振點(6, 3), 測定點(4, 5)}

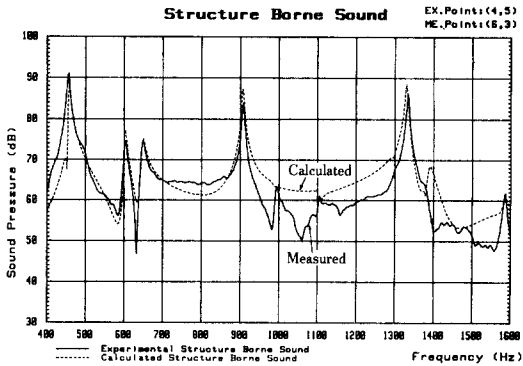


그림16. 固體傳播音의 計算値와 實驗値
 {境界要素法, 複素振動速度, $CF(\omega)$,
 加振點(4, 5), 測定點(6, 3)}

대해서는 計算値가 實測値에 近接한 양호한 結果를 얻었다. 또한 反共振周波數近方에서도 $CF(\omega)$ 를 考慮한 것이 實測値에 接近하는 結果를 얻었다.

境界要素法으로 計算한 結果는 一般音壓方程式으로 計算한 結果보다 精度가 떨어지나, 이 原因으로 計算過程의 複雜化에 따른 計算誤差의 累積으로 思料된다.

그러나, 一般構造物의 경우에는 回折音의 影響을 考慮하여 計算하여야 하나, 一般音壓方程式으로는 特別한 경우를 除外하고는 計算이 困難하기 때문에 境界要素法에 의한 音場解析法의 精度向上이 期待되고 있다.

5. 結 論

本論文에서는 遮音構造物의 放射音을 固體傳播音과 空氣傳播音으로 定量分離하기 위한 切段階로써 周邊固定長方形平板의 任意點加振에 의한 固體傳播音 豫測手法에 대하여 論하였다.

本論文의 論點을 要約하면 다음과 같다.

1). 構造物의 振動特性을 把握하기 위하여 實驗모우드解析의 計測시스템과, 比例粘性減衰系의 單點加振多自由度偏分反復法에 대한 實驗모우드 해석의 電算프로그램을 開發하고, 周邊固定長方形平板에 適用하여 상당히 良好한 結果를 얻었다.

2). 1)의 結果를 利用하여 構造物의 任意點 加振에 따른 表面振動速度를 豫測하는 手法을 開發하였다.

3). 一般音壓方程式과 境界要素法을 利用하여 2)에서 算出한 表面振動速度로부터 放射音을 豫測하는 理論의 背景을 檢討하고 이에 대한 電算 프로그램을 開發하였다.

4). 實驗모우드解析에 의해 算出된 各周波數에 대한 複素表面振動速度의 振動과 位相角을 利用하여 振動모우드의 影響을 考慮한 音壓計算法을 開發하였으며, 이를 周邊固定長方形平板에 適用한 結果良好한 結果를 얻었다.

5). 1)~4)의 手法에 의해 實用上 問題가 없는 精度로 固體傳播音의 豫測이 可能함을 確認하였다.

参考文献

- 1) 大久保信行, 機械のモーダルアナリシス, 中央大學出版部, 1981.
- 2) 長松昭男, モード解析, 培風館, 1985.
- 3) 日本機械學編, モード解析の基礎と應用, 丸善, 1986.
- 4) Edwin D. J., Modal Testing: Theory and Practice, Research Studies Press LTD., 1984.
- 5) Cawley P., The Reduction of Bias Error in Transfer Function Estimates Using FFT Based Analyzers, ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, Vol. 106, No. 29, Jan. 1984, pp. 29-35.
- 6) 白井証明, 周波數應答關數の記測方法, 日本機械學會, 第617回講習會, 1986, pp.55-67.
- 7) Brown D.L. et al, Parameter Estimation Techniques for Modal Analysis, SAE, No. 790221, 1979, pp.828-846.
- 8) Rost B. et al, A Comparison of Least Squares and Total Least Squares for Multiple Input Estimation of Frequency Response Functions, ASME Paper No. 85-DET-105, 1985, 6pp.
- 9) Klosterman A.L., On the Experimental Determination and Use of Modal Representation of Dynamic Characteristics, Ph. D. Dissertation, Univ of Cincinnati, 1971
- 10) Cremer L., Structure Borne Sound, Springer, 1973.
- 11) Craggs A., An Acoustic Finite Element Approach for studying Boundary Flexibility & Sound Transmisson Between Irregular Enclosures, J. Sound & Vib.,30(3), 1973, pp. 343-357.
- 12) Schenck H. A., Improved Integral Formulation for Acoustic Problems, J. Acoust. Soc. Am., 41(1), 1968, pp.41-58.
- 13) Koopmann G.H. et al., Method for Computing the Sound Power of Machines Based on the Helmholtz Integral, J. Acoust. Soc. Am., 71(1), 1982, pp.78-87.
- 14) Unger M.C. et al., Sound Structures and Their Interaction, MIT Press, 1972.
- 15) Seybert A.F. et al., The use of CHIEF to Obtain Unique Solutions for Acoustic Radiation Using Boundary Integral Equations J. Acoust. Soc. Am., 81(5), 1987, pp.1299-1306.
- 16) Jiang J.K. et al., On the Applications of the Boundary Element Method to Acoustical Field Studies of Vibrating Structures, ASME J. of Vib. Acoust. Stress & Reliability in Design, Vol. 108, 1986, pp. 454-461.