

半徑荷重을 받는 缺陷 볼베어링의 振動解析에 關한 研究
 (第2報 : 接觸荷重 및 外輪의 彈性變位量 計算)

金 永 柱* · 全 孝 重**

A Study on the Vibration Analysis of Multi-components Damaged Ball
 Bearing under Radial Load

(Part II ; Theoretical Calculation of the Contact Load and Elastic
 Displacement of the Outer-race)

Y. J. Kim, H. J. Jeon

Abstract

With the Hertzian contact theory, it is possible to determine the bearing load distributing pattern among the balls and rollers and also variations of the load-displacement relationships for rolling elements contacting raceways according to bearing clearance, load distribution, contact forces and dimensions of bearing components (i.e diameter of raceway and rolling elements), etc.

In this paper the calculation theories of contact load and normal approach between two raceways under radial load are reviewed, and compared these calculation results with those of experimental results.

A new calculation theory for elastic displacement of outer-race of ball bearing under radial load is developed by authors by application of energy method, which is independent on the effects of roughness, bending or eccentricity of bearing with driving shaft, and is effective in measuring the location of its defect.

記 號 說 明

a : 外輪의 斷面中心 半徑(mm)
 $a(t)$: 볼베어링 振動函數
 A : 外輪의 斷面積(mm²)

$[A_0]$: 볼 사이角으로 構成된 行列
 C_a : 볼과 內외륜 사이의 間隙(mm)
 d, D_b : 볼 直徑(mm)
 d_0 : 最大缺陷振幅(mm)
 $d(t)$: 缺陷振動 函數

* 正會員, 韓國機械研究所

** 正會員, 韓國海洋大學

D, D_m : 볼베어링 핏치圓 直徑(mm)
 D_1, D_2, D_3 : 內輪, 齒, 外輪 直徑(mm)
 $e(t)$: 衝擊消滅函數
 E : 縱彈性係數(kg/mm²)
 f_c : 케이지 回轉周波數(Hz)
 f_d : 缺陷周波數(Hz)
 f_g : 推力에 의한 接觸變位量(mm)
 f_s : 軸回轉周波數(Hz)
 I : 外輪斷面 2次모우멘트(mm⁴)
 K_i : 內輪과 볼사이의 靜的 接觸剛性係數(kg/mm^{1.5})
 K_o : 볼과 外輪 사이의 靜的 接觸剛性係數(kg/mm^{1.5})
 K_m : 合成 剛性係數(kgmm^{1.5})
 K_l : 롤러베어링의 靜的 接觸剛性係數(kg/mm^{1.5})
 K_s : 볼의 靜的 接觸剛性係數(kg/mm^{1.5})
 l : 롤러의 길이(mm)
 L : 全體推力(kg)
 L_o : 補助變數 τ 에 의한 變數
 M : 外輪 測定點에서의 彎曲모우멘트(kg-mm)
 n : 볼베어링의 荷重-變位 指數
 N : 外輪斷面의 引張力(kg)
 P : 接觸荷重(kg)
 q_o, P_{max} : 最大 接觸荷重(kg)
 P_L : 軸方向 接觸荷重(kg)
 P_Q : 半徑方向 接觸荷重(kg)
 $q(t)$: 接觸荷重函數
 Q : 全半徑力(kg)
 R_R : 球溝의 曲率半徑(mm)
 S, \bar{S} : 外輪의 圓弧길이(mm)
 T : 外輪 測定點에서의 剪斷力(kg)
 $T_{di}, T_{db}, T_{do}, T_{dc}$: 볼베어링의 缺陷周期(sec)
 T_s : 軸의 回轉周期(sec)
 u, \bar{u} : 外輪의 半徑方向 變位量(mm)
 $u(t)$: 缺陷振動函數
 v, \bar{v} : 外輪의 接線方向 變位量(mm)
 z : 外輪의 斷面中心軸에서의 任意點까지의 길이(mm)

Z : 볼數
 Z_o : Winkler 無次元 數
 α : 볼 사이의 角(deg.)
 β : 荷重의 接觸角(deg.)
 δ : 接觸變位量(μ m)
 δ_i, δ_b : 롤러 및 볼의 接觸變位量(μ m)
 δ_i, δ_o : 內輪 및 外輪의 볼과의 接近量(μ m)
 δ_{max} : 最大 軸心 移動量 또는 外輪 變位量(μ m)
 ε : 荷重分布率, 또는 外輪 圓弧의 微小 變形率
 θ : 測定點 移動角(deg.)
 λ : 볼과 球溝 齒수로 定해지는 無次元 數
 ν_o : 포아손 比
 τ : 베어링 齒수에 따른 補助變數
 φ, ψ : 接觸荷重 移動角(deg.)
 θ_d, ψ_d : 缺陷位置角(deg.)
 ψ_i : 接觸荷重 最大分布角(deg.)

1. 概 要

缺陷을 갖는 볼베어링의 振動解析을 위한 接觸荷重과 彈性變位量計算은 大部分 Hertz의 接觸理論에 根據를 두고 있는데 荷重計算理論으로는 Stribeck, Harris, White 등이 베어링間隙과 荷重分布率의 影響을 考慮한 半徑荷重計算式을 提示하고 있으며 Stellrect는 推力 또는 半徑力의 合成力과 高速回轉時의 遠心力에 대해서 言及하고 있다.

볼베어링의 彈性變位計算理論으로는 半徑荷重을 받는 境遇 볼베어링의 構成要素인 內輪, 볼, 外輪의 齒수들로 부터 算定되는 靜的 剛性係數를 利用한 內輪과 外輪의 接觸變形에 따른 軸心 移動量 計算式이 Stellrect, Timoshenko, Palmgren, Tamura 등에 의해 提案되고 있으며, Perret, Meldau, Harris등은 볼과 內外輪 사이의 間隙과 外部 荷重點 上部에서의 最大變位量 關係로 부터 誘導된 볼 移動에 따른 接觸變位量 計算式을 들 수 있다. 그러나 軸心の 上下移動

량을 對象으로 하고있는 이들의 變位量計算理論들은 回轉機械가 運轉中에 測定이 困難하고 특히 內輪回轉時 驅動軸의 表面거칠기, 軸心彎曲等에 크게 影響을 받아 計算値와 實測値의 誤差修正이 要求되고 있다.

이를 위해 본 研究에서는 缺陷 볼베어링 振動解析에 變位測定裝置가 많이 利用되고 있음을 勘案하여 베어링 外輪의 半徑方向 荷重에 의한 變位量計算式을 誘導하여, 이것의 計算値와 實測値를 比較하고, 많은 學者들에 의해 提示된 理論들의 計算結果를 함께 檢討코자 한다.

2. 缺陷 볼베어링의 振動特性

볼베어링은 外力에 의한 볼과 內外輪 相互接觸力 때문에 볼이 內外輪의 球路를 荷重領域 내 通過할 때 振動을 發生시키고 베어링을 構成하는 要素部品에 缺陷이 存在할 때 獨特한 振動波形과 周波數를 갖는다. 이들은 굴림表面에 龜裂, 離脫, 磨滅이나 潤滑油에 不純物이 混入될 때 接觸荷重分布는 不均一하게 되고 軸心不良, 볼과 內外輪의 精度不良은 베어링 振動을 增加시키며 要素部品 損傷을 促進시키고 있다. 볼베어링의 構造나 運轉條件에 따라 內輪 驅動의 境遇 外輪 驅動시 보다 內輪損傷이 적고 荷重보다는 回轉速度에 크게 影響을 받으며 損傷發生率은 볼, 外輪, 內輪, 케이지順으로 나타나고 있다.¹⁾

無缺陷 베어링에서도 볼通過에 의한 振動은 荷重이 커질수록 레벨이 Hertz의 接觸理論에 따라 增加되고 Palmgren이 提示한 缺陷周波數가 衝擊波로 나타난다.²⁾ 이때의 測定信號가 變位波形일때는 靜的波形과 動的波形이 거의 類似하며 1개의 缺陷을 갖는 境遇 實測値와 計算値의 缺陷周波數는 잘 一致하여 損傷診斷이 容易하지만 여러개의 缺陷要素가 複合될때는 여러가지 信號處理技法이 必要하게 된다. 缺陷베어링의 振動加速度信號에는 缺陷크기나 位置에 따른 純粹한 缺陷衝擊 이외에 荷重變動, 베어링 間隙, 軸心變動, 構造物의 共振, 測定點에서의 減衰 및 傳達特性要素들이 包含되어 있어 缺陷周波數, 缺

陷크기 및 位置 等の 計算이 어렵다.

以上으로 볼베어링의 損傷診斷을 위해 加速度信號 보다는 變位信號의 利用이 比較的 信號處理過程이 簡單하고 複雜하게 重疊된 雜音信號를 排除할 수 있어 보다 正確한 缺陷周波數 分析이나 損傷位置의 豫測이 可能하다.

缺陷베어링의 振動特性을 알아보기 위해 Fig. 2.1에 보이는 바와같이 不均一한 半徑荷重 Q 를 받는 볼베어링이 荷重方向 垂直 中心線에서 測定角 θ 인 곳에 1개의 缺陷을 갖는 境遇, 振動 레벨이 圓周方向缺陷幅의 $\frac{6}{5}$ 乘에 比例하고, 周期가 T_d 인 缺陷衝擊 $d(t)$ 를 發生한다.⁵⁾

$$d(t) = d_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k T_d) \quad (2.1)$$

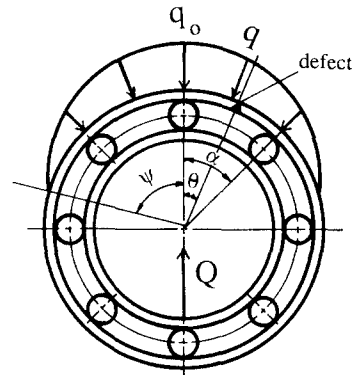


Fig. 2.1. Distribution of load and location

여기서 d_0 는 最大缺陷振幅, $\delta(t - k T_d)$ 는 單位缺陷衝擊函數이다. 여기서, 缺陷베어링의 振動變位 $u(t)$ 는, 式(2.1)의 缺陷衝擊 $d(t)$, 接觸荷重函數 $q(t)$ 및 베어링 支持狀態, 구동축의 彎曲 등의 影響을 받는 볼 通過 周波數 f_c 의 彈性變位波로 나타나는 振動函數 $a(t)$ 에 의해

$$u(t) = d(t) \cdot q(t) \cdot a(t) \quad (2.2)$$

이며 驅動軸의 回轉速度($2\pi f_s$)가 低速으로 缺陷幅이 클 때에는 상기 缺陷衝擊 $d(t)$ 에 衝擊消滅函數 $e(t)$ 의 影響을 考慮해야 하므로

$$u(t) = [d(t) \cdot e(t)] \cdot q(t) \cdot a(t) \quad (2.3)$$

여기서 荷重函數 $q(t)$ 는 Stribeck 理論으로 부터

$$q(t) = q_0 \left[1 - \frac{1}{2\varepsilon} \{ 1 - \cos(2\pi f_s t) \} \right]^n \quad (2.4)$$

로 되며, q_0 는 荷重方向 垂直下의 最大接觸荷重, ε 는 荷重分布率 ($0 \leq \varepsilon \leq 1$), n 는 볼베어링 荷重—變位 指數(볼 $\frac{3}{2}$, 롤러 $\frac{10}{9}$) 이고 振動函數 $a(t)$, 消滅函數 $e(t)$ 는 各各

$$a(t) = a_0 \cos(2\pi f_s t) \quad (2.5)$$

$$e(t) = \begin{cases} e^{-\frac{t}{T_e}}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

여기서

- a_0 : 外輪의 最大彈性變位量
- Z : 볼수
- f_s : 케이지 回轉周波數
- T_e : 系의 消滅時定數

한편 缺陷衝擊波 $d(t)$ 의 缺陷周期 T_d 는 볼베어링의 缺陷位置에 따라 다르며 內輪, 볼, 外輪 및 케이지에 대하여 각각 $T_{di}, T_{db}, T_{do}, T_{dc}$ 라 하고 베어링의 볼 및 핏치圓의 直徑을 d, D 라 하면,

$$\begin{aligned} T_{di} &= \frac{2}{Z(1+\frac{d}{D})} \cdot \frac{1}{f_s} \\ T_{db} &= \left(\frac{D}{d}\right) \cdot \frac{1}{1-(\frac{d}{D})^2} \cdot \frac{1}{f_s} \\ T_{do} &= \frac{2}{Z(1-\frac{d}{D})} \cdot \frac{1}{f_s} \\ T_{dc} &= \frac{2}{1-\frac{d}{D}} \cdot \frac{1}{f_s} \end{aligned} \quad (2.7)$$

따라서 外輪에 缺陷 1個를 갖는 볼베어링의 時系列 振動波形은 Fig. 2·2에 보이는 바와 같으며, 軸回轉周期 T_s 는 식(2·7)의 T_{dc} 에 볼數 Z 를 곱하여 求할 수 있다. 베어링의 볼과 內外輪 사이의 間隙이나 外輪과 하우징 사이의 間隙이 없고 驅動軸의 彎曲, 回轉體 不平衡等의 荷重變動이 작을때는 볼通過에 의한 振動레벨 $q(t) \cdot a(t)$ 는 每 周期마다의 最大振幅이 均一하게 된다.

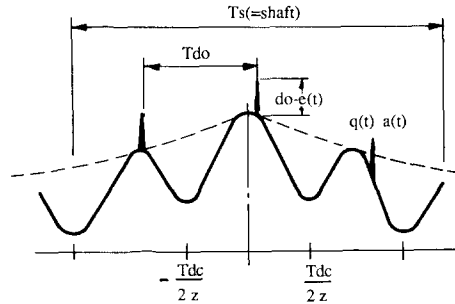


Fig. 2.2. Vibration response under radial load

3. 接觸荷重 計算理論

回轉機械의 靜的重量이나 不平衡力, 遠心力 등의 變動荷重을 받는 볼베어링은 荷重方向에 따라 半徑荷重, 推力을 받거나 이들의 合成荷重을 받으므로 接觸荷重 計算을 行할때 베어링 種類, 荷重分布率, 接觸角을 考慮해야 한다. 이들의 計算方法은 Hertz의 接觸理論을 利用하여 Strelrecht, Stribeck, Harris 등이 誘導하였다. 잉골러 베어링이나 스러스트 베어링을 除外한 大部分의 볼 또는 롤러베어링은 半徑荷重을 받고 있으므로 이에 對한 經驗式을 紹介하면 Fig. 3·1에서 半徑外力 Q , 볼 사이각 α , 移動角 ψ , 外輪變位量 δ , 볼과 內外輪 사이의 間隙 C_s 일 때 外力 Q 는

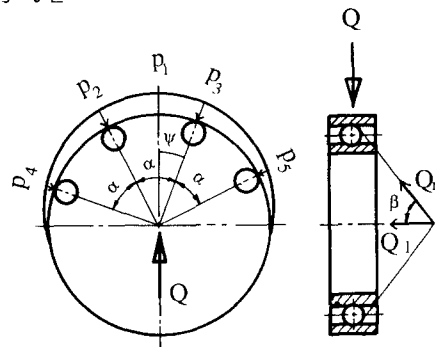


Fig. 3.1. Load distribution

$$\begin{aligned} Q &= P_1 \cos \psi + P_2 \cos(\alpha - \psi) + P_3 \cos(\alpha + \psi) + P_4 \cos(2\alpha - \psi) + P_5 \cos(2\alpha + \psi) + \dots \\ &= \frac{P_1}{\cos^{3/2} \psi} \left\{ \cos^{5/2} \psi + \cos^{5/2}(\alpha - \psi) + \cos^{5/2}(\alpha + \psi) + \dots \right\} \quad (3.1) \end{aligned}$$

이때 볼수 $Z=8\sim 20$ 이고 볼의 回轉角 $\psi=0$ 이므로 使用해도 荷重計算에 큰 誤差가 없다.

면 半徑荷重 Q 와 最大接觸荷重 P_{max} 의 關係는 식(3.1)로 부터

$$\text{볼베어링 } Q = \frac{Z}{4.37} P_{max}, \quad (3.2)$$

$$\text{롤러베어링 } Q = \frac{Z}{4.08} P_{max},$$

여기서 荷重接觸角 β 와 間隙 C_d 가 考慮되는 경우에는 上記式으로 부터,

$$P_{max} = \frac{5Q}{Z \cos \beta} \quad (\text{볼베어링}) \quad (3.3)$$

$$P_{max} = \frac{4.6Q}{Z \cos \beta} \quad (\text{롤러베어링})$$

한편 荷重分布狀態에 따른 接觸荷重計算의 一般式은 Harris理論으로 부터,

$$P = P_{max} \left\{ 1 - \frac{1}{2\varepsilon} (1 - \cos \psi) \right\}^n \quad (3.4)$$

여기서

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{C_d}{2\delta_{max}} \right) \quad (3.5)$$

δ_{max} : 最大軸心移動量

Fig. 2·1에서 接觸荷重에 대한 垂直成分의 合이 外力과 平衡을 이룬다고 생각하면 外力의 크기는,

$$Q = \sum_{\psi=0}^{\psi=\pm\pi} P \cos \psi \quad (3.6)$$

이므로 볼베어링의 荷重側 最上部 볼이 ψ 만큼 回轉하고 外力으로 순수半徑荷重만 存在하면, $\varepsilon=0.5$ 일 때 P 는 식(3.2), (3.3) 및 (3.4)로 부터,

$$\begin{aligned} \text{볼, } P &= \frac{4.37Q}{Z} \cos^{3/2} \psi \\ \text{롤러, } P &= \frac{4.08Q}{Z} \cos^{10/9} \psi \end{aligned} \quad (3.7)$$

그러나, 間隙 C_d 가 극히 작은 경우에는 接觸荷重計算 一般式을⁵⁾

$$\begin{aligned} \text{볼, } P &= \frac{5Q}{Z} \cos^{3/2} \psi \\ \text{러, } P &= \frac{4.6Q}{Z} \cos^{10/9} \psi \end{aligned} \quad (3.8)$$

4. 볼베어링의 接觸荷重에 의한 變位計算

接觸荷重에 의한 變位計算理論으로는, 베어링 軸心移動量(內外輪 接近量) 計算法과 에너지法을 利用한 外輪의 彈性變位量 計算法이 있다. 前者는 Stellrecht, Timoshenko, Palmgren, Harris 등이 開發하였고 White, Tamura 등에 의해 比較檢討 되었으며, 後者는 外輪의 振動變位信號가 靜의 彈性變位曲線과 類似함을 考慮하여 靜의 荷重移動에 따른 彈性變位量 計算으로서 本論文에서 처음 誘導된 方法이다.

(1) 軸心移動量

接觸荷重에 따른 變位量 關係는 變位量 δ , 荷重 P 일 때

$$\delta \propto P^{1/n}, \quad \left(\text{볼 } n = \frac{3}{2}, \text{ 롤러 } n = \frac{10}{9} \right) \quad (4.1)$$

Stellrecht, Tamura 등이 제시한 볼과 內外輪 사이의 彈性接觸에 의한 軸心變位量은¹⁾,

$$\delta = \delta_i + \delta_o \quad (4.2)$$

$$\delta_i = L_o \left(\frac{1-\nu_o^2}{E} P \right)^{2/3} \left(\frac{1}{D_2} + \frac{1}{D_1} \right)^{1/3} \quad (4.3)$$

$$\delta_o = L_o \left(\frac{1-\nu_o^2}{E} P \right)^{2/3} \left(\frac{1}{D_2} - \frac{1}{D_3} \right)^{1/3} \quad (4.4)$$

여기서

δ : 軸心變位量

δ_i : 內輪과 볼사이의 接近量

δ_o : 볼과 外輪사이의 接近量

L_o : 베어링 軸心에 의해 定해지는 變數

ν_o : 포아손비

D_1, D_2, D_3 : 內輪, 볼, 外輪의 直徑

이와 類似한 方法으로 球溝의 曲率半徑을 考慮하면⁷⁾

$$\delta_i = L_o \left(\frac{1-\nu_o^2}{E} P \right)^{2/3} \left(\frac{\lambda_i}{1+\lambda_i} D_2 \right)^{1/3} \quad (4.5)$$

$$\delta_0 = L_0 \left(\frac{1 - \nu_0^2}{E} P \right)^{2/3} \left(\frac{\lambda_0}{1 + \lambda_0} D_2 \right)^{1/3} \quad (4.6)$$

여기서 內輪과 外輪의 球溝 曲率半徑을 R_{Ri} , R_{R0} 라 할 때

$$\lambda_i = \frac{R_{Ri}}{D_2} - 1$$

$$\lambda_0 = \frac{R_{R0}}{D_2} - 1 \quad (4.7)$$

變數 L_0 는 補助變數 τ 와 $\frac{2K}{\pi\mu}$ 의 函數이고 이들 關係는 Fig. 4.1에 보인다. K 는 接觸剛性係數

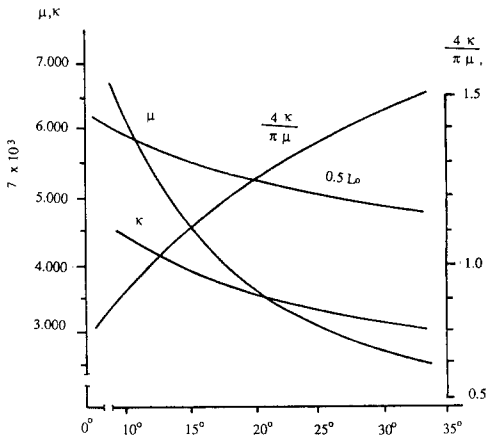


Fig. 4.1. τ - L_0 diagram

$$\cos \tau = \frac{\frac{2}{D_1} + \frac{1}{R_{Ri}}}{\frac{5}{D_2} + \frac{2}{D_1} - \frac{1}{R_{Ri}}}, \text{ 혹은}$$

$$\frac{-\frac{2}{D_3} + \frac{1}{R_{R0}}}{\frac{4}{D_2} - \frac{2}{D_3} - \frac{1}{R_{R0}}} \quad (4.8)$$

$$L_0 = 1.5^{2/3} \frac{2K}{\pi\mu} \left(\frac{2}{1 - \cos \tau} \right)^{1/3} \quad (4.9)$$

Timoshenko [8]는 Stellrecht의 計算式을 簡素化하여

$$\delta_i = 1.55 \left(\frac{P^2}{E^2} \cdot \frac{D_1 + D_2}{D_1 D_2} \right)^{1/3} \quad (4.10)$$

$$\delta_0 = 1.55 \left(\frac{P^2}{E^2} \cdot \frac{D_3 - D_2}{D_3 D_2} \right)^{1/3} \quad (4.11)$$

이와 類似한 方法으로 Palmgren⁴⁾에 의해 이들 關係式을 最大接觸荷重 P_m 와 볼 또는 물러

의 直徑 D_2 , 길이 L 의 크기로 나타내면

$$\text{볼베어링 } \delta_b = 2 \times 10^{-4} \left(\frac{P_m^2}{D_2} \right)^{1/3} \quad (4.12)$$

$$\text{물러베어링 } \delta_l = 6 \times 10^{-4} \left(\frac{P_m^{0.9}}{L^{0.8}} \right) \quad (4.13)$$

(2) 接角荷重 移動에 따른 軸心變位量

Perret, Meldau, Harris 등은 볼과 內外輪 사이의 間隙 C_d 를 갖는 볼베어링이 接觸荷重 P 를 回轉角 ψ 만큼 移動할때 軸心變位量을 計算하는 理論을 提示하였다. Fig. 4.2에서 軸心變位 δ_ψ 는,

$$\delta_\psi = \delta_{max} \cos \psi - \frac{C_d}{2} \quad (4.14)$$

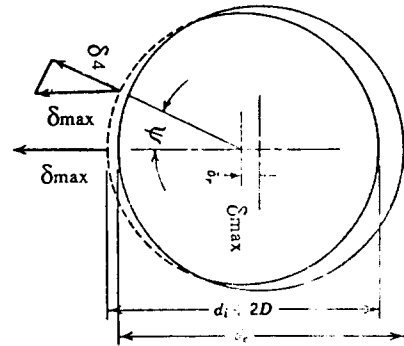


Fig. 4.2 Bearing rings

여기서 δ_{max} 는 最大軸心變位量을 말하며 이것의 全半徑力 Q 와의 關係는 Hertz理論에서

$$P_{max} = K_n (\delta_{max})^n \quad (4.15)$$

여기서 靜的接觸剛性係數 K_n 은, 內輪과 볼, 볼과 外輪 사이의 剛性係數를 각각 K_i, K_0 라 하면

$$K_n = \left\{ \frac{1}{\left(\frac{1}{K_i}\right)^{1/n} + \left(\frac{1}{K_0}\right)^{1/n}} \right\}^n \quad (4.16)$$

이므로 이들 關係로부터 볼 回轉角 ψ 일 때의 軸心變位量은 다음과 같다.⁵⁾

$$\delta = \left(\frac{P_{max}}{K_n} \right)^{1/n} \cos \psi - \frac{C_d}{2} \quad (4.17)$$

(3) 에너지法을 利用한 外輪의 接觸變位量

Fig. 4.3에서와 같이 堅固한 베어링 하우징에

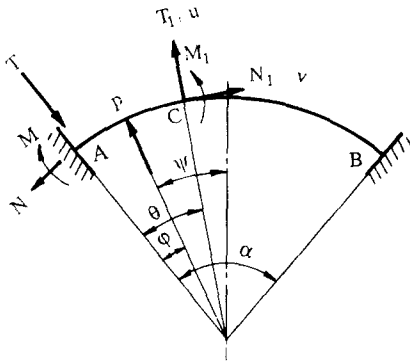


Fig. 4.3 Calculation model of outer-race deformation

돌러싼인 外輪이 圓弧 AB에서만 露出된 境遇 A 점에서 接觸荷重의 回轉角이 φ , 測定點 C의 移動角이 θ 이므로 이곳의 垂直, 水平方向變位量이 u, v 이고 純粹引張力, 모우멘트, 剪斷力을 A點에서 N_1, M_1, T_1 이고 變位測定點 C에서 N, M, T 라 할 때 (附錄 1 參照)

$$\begin{aligned} N &= \frac{EA}{a} \{(u+v, \theta) + Z_0(u+u, \theta^2)\} \\ M &= EA Z_0 (u+u, \theta^2) \\ T &= \frac{M, \theta}{a} \end{aligned} \quad (4.18)$$

여기서 Z_0 는 Winkler의 無次元整數이고 A點과 C點의 剪斷力, 引張力, 偶力들의 關係는,

$$\begin{aligned} T &= T_1 \cos \theta + N_1 \sin \theta - P \cos(\theta - \varphi) \times H(\theta - \varphi) \\ N &= -T_1 \sin \theta + N_1 \cos \theta + P \sin(\theta - \varphi) \times H(\theta - \varphi) \\ M &= M_1 + T_1 a + N_1 a(1 - \cos \theta) - Pa \times \sin(\theta - \varphi) H(\theta - \varphi) \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$H(\theta - \varphi) = \begin{cases} 0, & |\theta - \varphi| > \frac{\alpha}{2} \\ 1, & |\theta - \varphi| \leq \frac{\alpha}{2} \end{cases} \quad (4.20)$$

그런데 圓形링의 斷面中心圓의 半徑 a , 斷面中心線에서 任意點까지의 距離 z 일 때 $a \gg z$ 이면 $Z_0 \approx \frac{I}{Aa^2}$ 이므로 上記 式(4.18)을 要約하면,

$$N = \frac{EA}{a} (u+v, \theta)$$

$$M = -\frac{EI}{a^2} u, \theta^2 \quad (4.21)$$

따라서 式(4.19)와 式(4.21)의 關係로 부터 C 점의 u, v 를 求하면

$$\begin{aligned} -\frac{EI}{a^2} u, \theta &= (M_1 + N_1 a) \theta - T_1 a \cos \theta - N_1 a \times \sin \theta + pa \{ \cos(\theta - \varphi) - 1 \} H(\theta - \varphi) + C_1 \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} -\frac{EI}{a^2} u &= (M_1 + N_1 a) \frac{\theta^2}{2} - T_1 a \sin \theta + N_1 a \times \cos \theta + pa \{ \sin(\theta - \varphi) - (\theta - \varphi) \} H(\theta - \varphi) + C_1 \theta + C_2 \end{aligned} \quad (4.23)$$

여기서 圓弧 AB의 兩端 支持點 A, B는 固定 되어 있으므로 $\theta=0$ 일 때 $u, u, \theta=0$ 이고 式(4.22), (4.23)은

$$\begin{aligned} -T_1 a + C_1 &= 0, \quad C_1 = T_1 a \\ N_1 a + C_2 &= 0, \quad C_2 = -N_1 a \end{aligned} \quad (4.24)$$

따라서 半徑方向 變位量 u 는 式(4.24)를 式(4.23)에 代入하면,

$$\begin{aligned} u &= -\frac{a^2}{EI} \left[(M_1 + N_1 a) \frac{\theta^2}{2} - T_1 a \sin \theta + N_1 a \cos \theta + pa \{ \sin(\theta - \varphi) - (\theta - \varphi) \} H(\theta - \varphi) \right. \\ &\quad \left. + T_1 a \theta - N_1 a \right] = -\frac{a^2}{EI} \left[M_1 \frac{\theta^2}{2} + N_1 a \left(\frac{\theta^2}{2} - 1 + \cos \theta \right) + T_1 a (\theta - \sin \theta) + Fa \{ \sin(\theta - \varphi) - (\theta - \varphi) \} H(\theta - \varphi) \right] \end{aligned} \quad (4.25)$$

같은 方法으로 接線方向 變位量 v 는 式(4.19) 및 (4.25)를 式(4.21)에 代入하여

$$\begin{aligned} v, \theta &= -u + \frac{a}{EA} N = \frac{a^2}{EI} \left[(M_1 + N_1 a) \frac{\theta^2}{2} + T_1 a \theta - N_1 a - T_1 a \sin \theta + N_1 a \cos \theta - pa \{ \sin(\theta - \varphi) - (\theta - \varphi) \} H(\theta - \varphi) \right. \\ &\quad \left. + \frac{a}{EA} \{ -T_1 \sin \theta + N_1 \cos \theta + p \sin(\theta - \varphi) \} H(\theta - \varphi) \right] \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} v &= \frac{a^2}{EI} \left[(M_1 + N_1 a) \frac{\theta^3}{6} - T_1 a \frac{\theta^2}{2} - N_1 a \theta + T_1 a \times \cos \theta + N_1 a \sin \theta - pa \{ 1 - \cos(\theta - \varphi) - \frac{1}{2} (\theta - \varphi)^2 \} H(\theta - \varphi) \right] + \frac{a}{EA} [T_1 \cos \theta + N_1 \times \end{aligned}$$

$$\sin \theta + p \{1 - \cos(\theta - \varphi)\} H(\theta - \varphi) + C_3 \quad (4.27)$$

여기서 $\theta = 0$ 일 때 $v = 0$ 이므로

$$\frac{a^2}{EI} T_1 a + \frac{a}{EA} T_1 + C_3 = 0$$

$$C_3 = -\frac{a^2}{EI} T_1 a - \frac{a}{EA} T_1 \quad (4.28)$$

이것을 式(4.27)에 代入하면

$$v = \frac{a^2}{EI} \left[M_1 \frac{\theta^3}{6} + N_1 a \left(\frac{\theta^3}{6} - \theta + \sin \theta \right) + T_1 a \times \left(\frac{\theta^2}{2} + \cos \theta - 1 \right) + Pa \{1 - \cos(\theta - \varphi)\} - \frac{1}{2} \times (\theta - \varphi)^2 \right] H(\theta - \varphi) \quad (4.29)$$

이로부터 $\theta = \alpha$ 일 때 $u, u, \theta, v = 0$ 이므로 式(4.22) (4.24), (4.29)에서

$$M_1 \frac{\alpha^2}{2} + N_1 a \left(\frac{\alpha^2}{2} - 1 + \cos \alpha \right) + T_1 a (\alpha - \sin \alpha) = Pa (\alpha - \varphi) - \sin(\alpha - \varphi)$$

$$M_1 \alpha + N_1 a (\alpha - \sin \alpha) + T_1 a (1 - \cos \alpha) = Pa \{1 - \cos(\alpha - \varphi)\}$$

$$M_1 \frac{\alpha^3}{6} + N_1 a \left(\frac{\alpha^3}{6} - \alpha + \sin \alpha \right) + T_1 a \left(\frac{\alpha^2}{2} - \cos \alpha - 1 \right) + \frac{I}{Aa^2} (N_1 a \sin \alpha + T_1 a (\cos \alpha - 1)) = -Pa \left[\left\{ (1 - \cos(\alpha - \varphi)) \right\} - \frac{1}{2} (\alpha - \varphi)^2 \right] - \frac{I}{Aa^2} \cdot Pa \{1 - \cos(\alpha - \varphi)\} \quad (4.30)$$

여기서 $\lambda \leq \frac{I}{Aa^2} \ll 1$ 이라 하면 윗式은 다음과 같이 行列式으로 바꾸어 쓸 수 있으므로

$$\begin{bmatrix} \frac{\alpha^2}{2} & \left(\frac{\alpha^2}{2} - 1 + \cos \alpha \right) & (\alpha - \sin \alpha) \\ \alpha & (\alpha - \sin \alpha) & (1 - \cos \alpha) \\ \frac{\alpha^3}{6} & \left\{ \frac{\alpha^3}{6} - \alpha + (1 + \lambda) \sin \alpha \right\} & \left\{ \frac{\alpha^2}{2} + (1 + \lambda) (\cos \alpha - 1) \right\} \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ N_1 a \\ T_1 a \end{Bmatrix} = Pa \begin{Bmatrix} (\alpha - \varphi) - \sin(\alpha - \varphi) \\ 1 - \cos(\alpha - \varphi) \\ \frac{1}{2} (\alpha - \varphi)^2 - (1 + \lambda) \{1 - \cos(\alpha - \varphi)\} \end{Bmatrix} \quad (4.31)$$

따라서

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ N_1 a \\ T_1 a \end{Bmatrix} = pa [A_0]^{-1} \begin{Bmatrix} (\alpha - \varphi) - \sin(\alpha - \varphi) \\ 1 - \cos(\alpha - \varphi) \\ \frac{1}{2} (\alpha - \varphi)^2 - (1 + \lambda) \{1 - \cos(\alpha - \varphi)\} \end{Bmatrix} \quad (4.32)$$

여기서

$$[A_0] = \begin{bmatrix} \frac{\alpha^2}{2} & \left(\frac{\alpha^2}{2} - 1 + \cos \alpha \right) & (\alpha - \sin \alpha) \\ \alpha & (\alpha - \sin \alpha) & (1 - \cos \alpha) \\ \frac{\alpha^3}{6} & \left\{ \frac{\alpha^3}{6} - \alpha + (1 + \lambda) \sin \alpha \right\} & \left\{ \frac{\alpha^2}{2} + (1 + \lambda) (\cos \alpha - 1) \right\} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

한편 Fig. 4.3의 計算모형에서 $\theta = \frac{\alpha}{2}$ 인 圓弧角 中心線에서 測定點 C 까지의 移動角 $\psi = \left| \frac{\alpha}{2} - \varphi \right|$ 일때 接觸荷重 P는 ψ 의 函數로 나타낼 수 있고 그 크기는 볼 數 Z, 全半徑力 Q, 接觸角 β 이던 式(3.8)에서

$$\text{볼} \quad P(\psi) = \frac{5Q \cos^{3/2} \psi}{Z \cos \beta}$$

$$\text{롤러} \quad P(\psi) = \frac{4.6Q \cos^{10/9} \psi}{Z} \quad (4.34)$$

이므로 上記 式(4.32)는 볼 및 롤러베어링의 경우

$$\text{볼} : \begin{Bmatrix} M_1 \\ N_1 a \\ T_1 a \end{Bmatrix} = \frac{5Qa}{Z \cos \beta} [A_0]^{-1} \times \cos^{3/2} \psi$$

$$\times \begin{Bmatrix} \left(\frac{\alpha}{2} + \psi \right) - \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \psi \right) \\ 1 - \cos \left(\frac{\alpha}{2} + \psi \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{2} + \psi \right)^2 - (1 + \lambda) \{1 - \cos \left(\frac{\alpha}{2} + \psi \right)\} \end{Bmatrix} \quad (4.35)$$

$$\text{롤러} : \begin{Bmatrix} M_1 \\ N_1 a \\ T_1 a \end{Bmatrix} = \frac{4.6Qa}{Z} [A_0]^{-1} \times \cos^{10/9} \psi$$

$$\times \begin{Bmatrix} \left(\frac{\alpha}{2} + \psi \right) - \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \psi \right) \\ 1 - \cos \left(\frac{\alpha}{2} + \psi \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{2} + \psi \right)^2 - (1 + \lambda) \{1 - \cos \left(\frac{\alpha}{2} + \psi \right)\} \end{Bmatrix} \quad (4.36)$$

따라서 $\theta = \frac{\alpha}{2}$ 인 圓弧 中心線上에 測定선서를 附着하고 荷重이 $\varphi = \frac{\alpha}{2} \pm \psi$ 만큼 이동할 때의 半徑方向과 接線方向의 變位量計算은 위로 부터 求해진 彎曲偶力, 引張力, 剪斷力을 式(4.25)와 式(4.29)에 代入하면 볼베어링의 境遇

$$u = -\frac{a^2}{EI} \left[M_1 \frac{\alpha^2}{8} + N_1 a \left(\frac{\alpha^2}{8} + \cos \frac{\alpha}{2} - 1 \right) + T_1 a \left(\frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \right) + \frac{5Qa}{Z \cos \beta} \cos^{3/2} \psi \times \left\{ \sin \psi - \psi \right\} \right] \quad (4.37)$$

$$v = \frac{a^2}{EI} \left\{ M_1 \frac{\alpha^3}{48} + N_1 a \left(\frac{\alpha^3}{48} - \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \right) - T_1 a \times \left(\frac{\alpha^2}{8} - \cos \frac{\alpha}{2} + 1 \right) + \frac{5Qa}{Z \cos \beta} \cos^{3/2} \psi \times \left(1 - \cos \psi \right) - \frac{\psi^2}{2} \right\} + \frac{a}{EA} \left\{ N_1 \sin \psi + T_1 \times (\cos \psi - 1) + \frac{5Q}{Z \cos \beta} \cos^{3/2} \psi (1 - \cos \psi) \right\} \quad (4.38)$$

이를 利用하여 接觸荷重이 最上部($\psi = 0$)에 있을 때 半徑方向과 接線方向의 變位量은 最大가 되며 이들은

$$u_{\max} = -\frac{a^2}{EI} \left[M_1 \frac{\alpha^2}{8} + N_1 a \left(\frac{\alpha^2}{8} + \cos \frac{\alpha}{2} - 1 \right) + T_1 a \left(\frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \right) \right] \quad (4.39)$$

$$v_{\max} = \frac{a^2}{EI} \left\{ M_1 \frac{\alpha^3}{48} + N_1 a \left(\frac{\alpha^3}{48} - \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \right) - T_1 a \left(\frac{\alpha^2}{8} - \cos \frac{\alpha}{2} + 1 \right) \right\} \quad (4.40)$$

5. 實驗結果

Timoshenko, Palmgren, Harris, Tamura 等이 提示한 軸心 移動量 計算結果를 實驗値와 比較하기 위해 小形精密 베어링인 SKF 16006, NU1006(롤러)과 6206(볼)을 試驗品으로 利用하였으며 이들의 主要치수는 Table 5.1에 보이는 바와 같다.

이들 試驗品은 Fig. 5.1, Fig. 5.2에 보이는 靜的 變位 測定裝置를 利用 하였으며 앞에서 紹介한 變位 計算들의 計算結果와 實驗値를 比較하면 Table 5.2, 5.3 및 Fig. 5.3, Fig. 5.4에 보이는 바와 같다. 이들 結果로 부터 計算된 試驗片의 接觸變位와 荷重關係로 부터 NU1006, 16006, 6206 볼베어링의 剛性係數를 보이면 Fig. 5.5와 같다.

Table 5.1 Dimensions of tested ball bearing

Item	Bearing				
	Symbol	16006	Nu 1006	6206	6208
Number of balls	Z	1	14	9	9
Inner race Dia.	D_1	36.15mm	36.5mm	37.12mm	48.2mm
Ball Dia.	D_2	6.35mm	6.0mm	9.516mm	11.9mm
Outer race Dia.	D_3	48.85mm	48.5mm	55.8mm	63.91mm
Width	B	13.0mm	9.0mm	16.0mm	18.0mm
Outer race mean Dia.	a			29.0mm	33.6mm
Radius of outer race groove	R_{R0}	3.2mm		5.05mm	6.031mm
Radius of inner race groove	R_{Ri}	3.2mm		5.2mm	6.031mm
Sectional area	A			57.5mm ²	82.1mm ²
Sectional moment of inertia	I			40.1mm ⁴	254.8mm ⁴
Contact stiffness	K_p, K_i	4.915 × 10 ⁴ kg/mm ^{1.5}	3.922 × 10 ⁴ kg/mm ^{1.11}	2.631 × 10 ⁴ kg/mm ^{1.5}	4.04 × 10 ⁴ kg/mm ^{1.5}
Sum. of curvature (inner race)	$\sum \rho_i$	0.373mm ⁻¹		0.2762mm ⁻¹	0.247mm ⁻¹
" (outer race)	$\sum \rho_o$	0.276mm ⁻¹		0.1992mm ⁻¹	0.165mm ⁻¹
Dimensionless Coeff. (inner)	δ_i^*	0.416		0.66	0.459
" (outer)	δ_o^*	0.434		0.785	0.407

Table 5.2 Calculation and measured results of ball bearing 16006, NU1006 (Unit: μm)

Specimen	Force (Q, kg)	Timoshenko (δ_{max})	Palmgren (2δ)	Harris (2δ)	White (2δ)	Tamura (δ_{max})	Measured (δ_{max})
16006	98	11.7	11.6	13.6	12.2	18.4	13.0
	196	30.2	19.5	22.5	19.2	24.5	20.1
	298	45.7	26.3	30.0	24.8	32.6	28.9
	392	79.6	32.2	36.6	31.2	39.3	31.5
NU1006	98		2.7	2.8	2.3		2.3
	196		8.1	8.2	7.5		4.5
	294		11.0	11.7	11.4		9.9
	392		13.3	14.7	13.0		12.1

Table 5.3 Calculation results of ball bearing 6206 (Unit: μm)

Specimen	Force (Q, kg)	Timoshenko (δ_{max})	Palmgren (2δ)	Harris (2δ)	Tamura (δ_{max})
6206	74.0	23.1	22.6	16.0	27.9
	122.6	32.1	31.5	22.2	39.0
	170.6	40.1	39.2	27.8	48.6
	218.6	47.3	46.3	32.8	57.3
	266.6	54.0	52.8	37.4	65.4
	314.9	60.3	59.0	41.6	73.0
6208	74.0	21.3	21.0	14.8	25.9
	122.6	29.7	29.2	20.6	36.0
	170.6	37.0	36.4	25.8	44.9
	218.6	43.7	43.0	30.4	52.9
	266.6	49.9	49.0	34.8	60.4
	314.6	55.7	54.8	38.8	67.5
362.6	61.2	60.2	42.6	74.1	

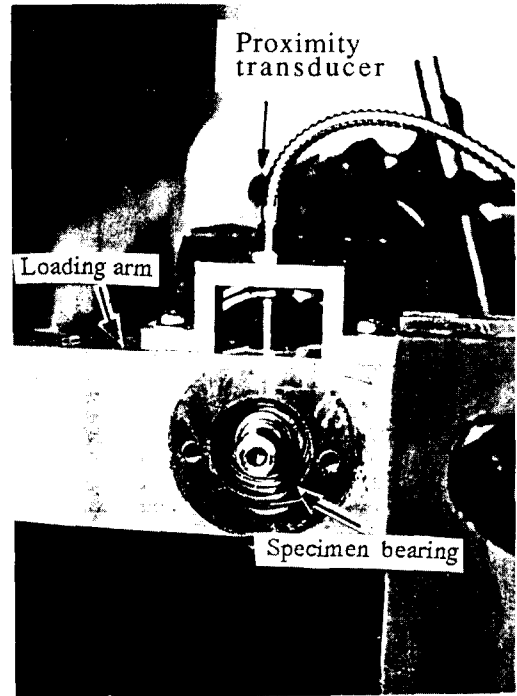


Fig. 5.2 Test rig

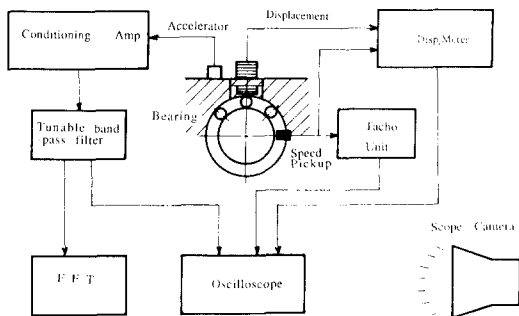


Fig. 5.1 Schematic diagram of measuring equipment

이때 利用된 高感度($12.215\text{mv}/\mu\text{m}$)인 渦流形 非接觸式 變位센서의 性能曲線은 Fig. 5.6에 보이는 바와 같다.

이와는 別途로 上記 여러가지 變位測定 및 計算結果는 軸心移動量을 對象으로 하고 있음을 勘案하여 本 研究에서 提示한 外輪變位量의 計算理論이 適用될 수 있는지를 檢討한 바 外部荷重方向의 垂直線에 接觸荷重과 測定點이 位置할때의 荷重과 最大變位量과의 關係는 Fig. 5.7에 보이는 바와 같고 接觸荷重의 移動角 γ 에 따른 變位計算量과 測定值를 Fig. 5.8에 나타내었다. 여기서 利用한 試驗片은 6206 깊은 홈 볼베

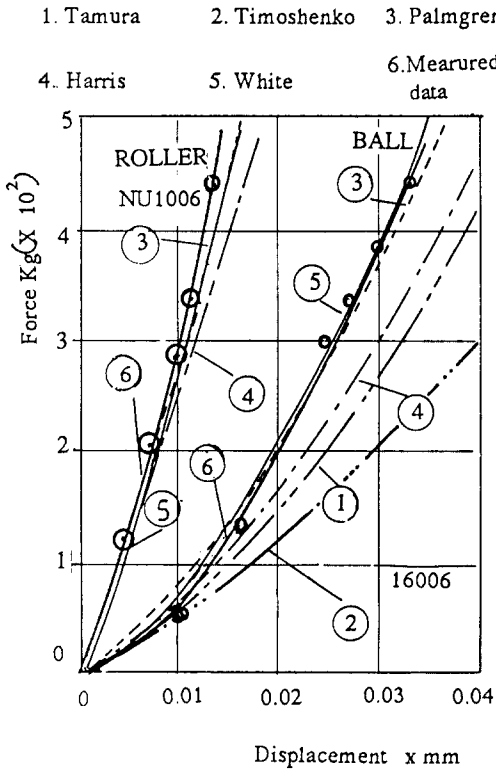


Fig. 5.3 The comparison of force deflection relationship for ball bearings

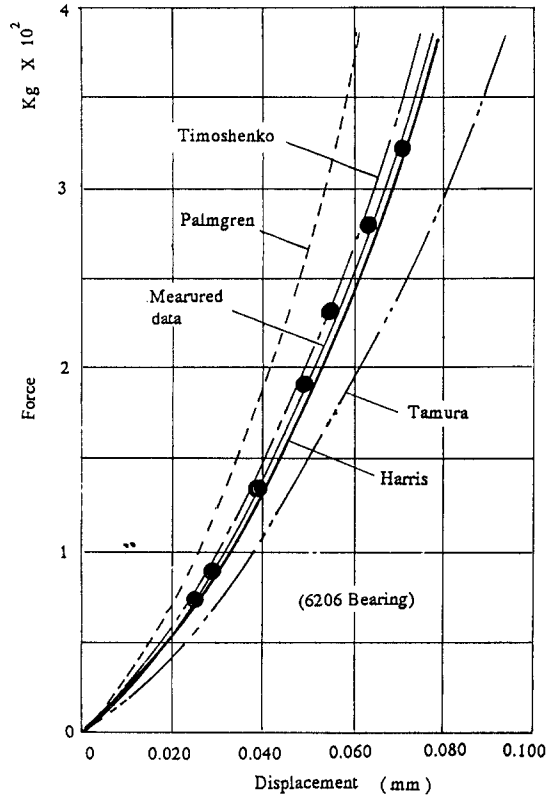


Fig. 5.4 The comparison of force deflection relationship for ball bearing

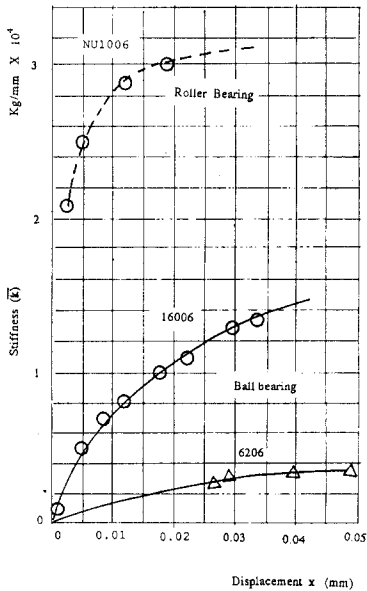


Fig. 5.5 Linearized rolling element bearing stiffness coefficients

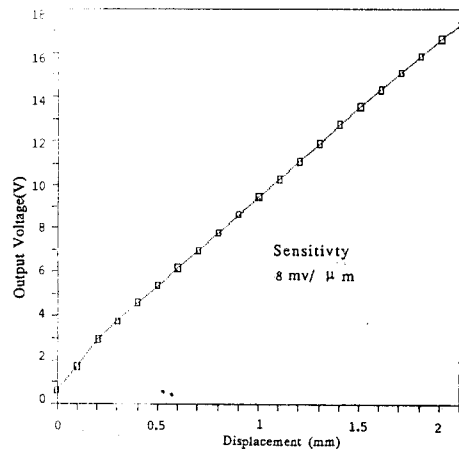


Fig. 5.6 Sensitivity curve for proximity transducer

어링이고 荷重移動에 따른 外輪變位量關係는 半徑力 $Q=74.6\text{kg}$ 인 境遇를 例로 들었다.

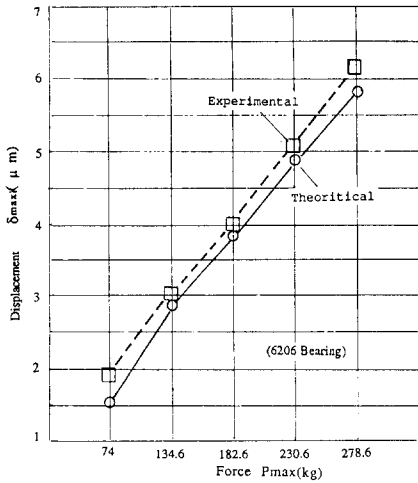


Fig. 5.7 $P_{max} - \delta_{max}$ relationship

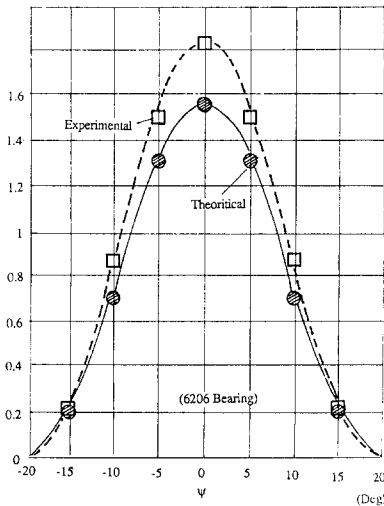


Fig. 5.8 $\psi - \delta$ relationship

6. 結 論

Timoshenko, Palmgren, Harris, White 등이提示한 볼베어링의軸心移動量計算値는點接觸의境遇 Palmgren, White의理論이精密度가 높으며線接觸荷重인境遇 Palmgren, Harris, White理論들은大部分實驗結果와 잘一致하고 있으나 이들 모두理論的計算値가實驗値보다는接觸荷重이 커질수록彈性變位量이增加하는傾向으로 나타나고 있다. 接觸荷重에 따른

變位量으로부터計算된 베어링의剛性係數變化量은 베어링形狀에關係없이荷重이 작을 때 크게 나타났으나漸次荷重이增加될수록變化量이鈍化됨을 알 수 있다. 外輪變位量計算理論으로부터計算된最大荷重別變位量이나一定한半徑力下에서 볼이軌道를 따라公轉할때의變位量들은軸心移動量計算의境遇와는 다르게實驗値가計算値보다多少 크게 나타나고 있으나比較的 잘一致하고 있다. 따라서 이들로부터 얻어진結論을 몇가지로要約하면 아래와 같다.

- 1) 軸心移動量은計算理論에 따라若干씩差異가 있고 볼베어링과 같이接觸狀態가線接觸일 때實驗値와의誤差는 풀러베어링과 같이線接觸일 때보다 크다.
- 2) 볼베어링의接觸剛性係數는 베어링種類에 따라各各 다르고 볼과內外輪사이의接觸面이 어떤範圍以上이 되도록半徑力이 커지면 Hook法則이適用될 수 있다.
- 3) 外輪變位量計算理論은經驗値의導入이必要없고荷重移動角 ψ 의函數로 나타낼 수 있어 베어링의動的振動波形을檢討하는데利用될 수 있다.

參 考 文 獻

- 1) H. Stellrecht, Die Belastbarkeit der Wälzlager, 1928
- 2) H. Jeon, Y. Kim, A Study on the Vibration Analysis of Multi-Components Damaged Ball Bearing under Radial Load, Journal of KMES, Vol.12, No.2, June 1988, 99-109.
- 3) P.D. McFadden, Model for the Vibration Produced by a Single Point Defect in a Rolling Element Bearing, Journal of Sound of Vibration, 1984. 96(1), 69-82.
- 4) M.F. White, Rolling Element Bearing Vibration Transfer Characteristics; Effect of Stiffness, Trans. of ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol.46, Sept. 1979, 677-684.
- 5) H. Kanai, K. Kido, Estimation of the Surface Roughness on the Race by Vibration

- Analysis of Ball Bearings, Proceedings of the ASME 1986 Winter Annual Meeting, Dec. 7-12, 1986, Anaheim, USA.
- 6) T. A. Harris, Rolling Bearing Analysis, Wiley, New York, 1966, 144-156
- 7) 田村英之, 清水活, 玉軸受にもとづく回轉體の振動(第1報, 靜的ばね特性), 日本機械學會論文集, 31卷231號(1965.11), 1617-1929.
- 8) S. P. Timoshenko, The Theory of Elasticity, 3rd ed., Mcgraw Hill(1951), 409-414.
- 9) H. Perret, Elastische Spielschwingungen konstant belasteter Wälzlager, Werkstatt und Betrieb(1950), 354-358.
- 10) E. Meldau, Die Bewegung der Achse von Wälzlagen bei geringen Drehzahlen, Werkstatt und Betrieb (1951), 308-313.
- 11) H. L. Langhaar, Energy Method in Applied Mechanics, John Wiley, NY(1962), 48-49.

附錄 1. 接觸荷重에 의한 圓形링의 引張力, 모우멘트, 剪斷力

볼베어링 外輪의 볼을 통한 接觸荷重에 의한 變位量은, 外輪이 Hook法則에 適用되는 材質이고 堅固한 베어링 支持臺에 固定되어 있을때 이것의 變形前 半徑 a , 斷面積 A , 荷重作用點까지의 각도 ψ , 斷面2차모우멘트 I , 斷面 中心軸에서 任意點까지의 距離 z , 斷面 中心圓에서의 半徑方向, 接線方向의 變位量 및 圓弧길이를 각각 \bar{u} , \bar{v} , \bar{s} 라할때 Fig. 1a에서

$$\int \frac{1}{a+z} dA = \frac{A}{a} (1+Z_0)$$

$$\int \frac{z}{a+z} dA = -Z_0 A$$

$$\int \frac{z^2}{a+z} dA = Z_0 A a$$

$$\int z dA = 0$$

(1)

여기서 Z_0 는 Winkler 無次元常數로 $a \gg z$ 일 때

$$Z_0 = \frac{I}{Aa^2}$$

(2)

이고 斷面2차모우멘트 I 는

$$I = \int z^2 dA$$

(3)

또 Fig. 2a에서 測定點 C 의 外輪表面에서 垂直, 水平方向變位量 u, v 는 $\bar{u} = u$ 이면 이들의 關係式은¹¹⁾

$$v = -z \frac{du}{ds} + \left(1 + \frac{z}{a}\right) \bar{v} = -zu' + \left(1 + \frac{z}{a}\right) \bar{v}$$

(4)

外輪表面에서의 微小圓弧길이 ds 와 斷面中心에서의 微小圓弧길이 \bar{s} 의 關係는

$$ds = \left(1 + \frac{z}{a}\right) d\bar{s}$$

(5)

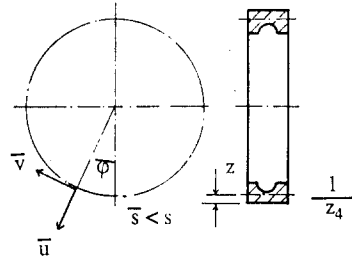


Fig. 1a Circular ring

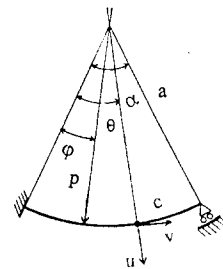


Fig. 2a Calculation model

이므로 圓弧길이 s 에 대한 接線變位量 變化 av 는

$$v' = \frac{dv}{ds} = \frac{dv}{d\bar{s}} \cdot \frac{d\bar{s}}{ds} = \left(\frac{a}{a+z} \right) \frac{dv}{d\bar{s}} = \left(\frac{a}{a+z} \right) \bar{v}' \quad (6)$$

따라서 半徑方向 및 接線方向 變形率 ϵ_u, ϵ_v 는

$$\begin{aligned} \epsilon_u &= \frac{u}{a+z} \\ \epsilon_v &= \frac{av'}{a+z} \end{aligned} \quad (7)$$

이고 이들의 純粹合成變形率 ϵ 는 式(7)로 부터

$$\epsilon = \epsilon_u + \epsilon_v = \frac{u + av'}{a+z} \quad (8)$$

式(6)을 式(8)에 대입하면

$$\epsilon = \bar{v}' + \frac{u - azu''}{a+z} \quad (9)$$

이들 關係式을 利用하여 外輪의 斷面中心에 있는 C點에서의 引張力, 彎曲偶力, 剪斷力 N, M, T 를 구하면

$$\begin{aligned} N &= E \int \epsilon dA = \frac{EA}{a} \{ (u + a\bar{v}') + Z_0 (u + a^2u'') \} \\ M &= E \int z \epsilon dA = -EA Z_0 (u + a^2u'') \\ T &= \frac{dM}{ds} = -EA Z_0 (u' + a^2u''') \end{aligned} \quad (10)$$