경영과학
5권 1호
1988. 9

單一品目 動的 롯트量決定에 대한 理論的 考察과 應用
(Single-prodect Dynamic Lot-sizing : Review and Extension)

金 炯 郁 *
金 相 午 **
玄 在 鎬 ***

ABSTRACT

In this study, We reviewed the solution methods(for the heuristic and optimization methods) for the single-item dynamic lot-sizing problem, and improved the efficiency(speed and optimality) of the conventional heuristic method by utilizing the inventory decomposition property.

The inventory decomposition property decomposes the given original problem into several independent subproblems without violating the optimality conditions. Then we solve each decomposed subproblems by using the conventional heuristics such as LTC, LUC, Silver-Meal etc.

For testing the efficiency of the proposed decomposition method, we adopted the data sets given in Kaimann, Berry and Silver-Meal. The computational results show that the suggested problem solving framework results in some promising effects on the computation time and the degree of optimality.

1. 序　論

롯트量決定問題(lot sizing problem)는 MRP시스템의 資材所要量計劃과 관련하여 지금까지 많은 硏究가 진행되고 있는 분야라고 할 수 있다. 旣存의 MRP시스템은 資材所要量計劃課程에서 下位品目도 上位品目과 동등하게 評價하여 資材所要量을 계산하고 있는데, 이는 기본으로 2가지 문제점을 내포하고 있다. 첫째, 製品構造(BOM structure)를 고려하지 않고 각각의 품목에 대한 롯트량을 경정함으로써 각 품목에 대해서는 最適解가 될 수 있으나 全體問題의 最適解라고는 볼 수 없다는 점이다. 이러한 문제를 해결하기 위하여 최근 製品構造를 감안한 多製品(multi-level, multi-prodect) 롯트량결정기법에 대한 연구가 진행되고는 있으나 所要時間의 제약 등으로 인하여 실무에 적용할 수 있는 유효한 기법은 제시되지 못하고 있다. 둘째, 品目數가 많아질 경우 자재소요량을 계산하는데 필요한 所要時間이 너무 크다는 점이다[1]. 이러한 問題點에서 롯트量決定解法의

* 弘益大學校 經營大學 經營學科
** 弘益大學校 經營大學 經營學科
*** 韓國科學技術院 經營科學科

효율성에 따라 MRP의 효율성이 좌우된다고 할 수 있으며 롯트量決定解法의 효율성은 最適化程度와 解를 구하는데 소요되는 時間에 의해서 좌우된다고 할 수 있다.

本 研究는 單一品目 動的 롯트量決定過程에서 最適化程度를 높이면서 소요시간을 줄이고자 하는데 그 目的을 두고 있다.

單一品目의 롯트량결정문제는 최근까지 APICS[2]를 중심으로 실무차원에서 最適化程度를 조금 희생하면서 이해하기 쉽고 소요시간이 빠른 휴리스틱(heuristic)방법에 대한 연구가 많이 진행되어 왔다고 볼 수 있다. 이들 휴리스틱기법들을 보면 FOQ(fixed order quantity), FRP(fixed period requirements), EOQ(economic order quantity), POQ (period order quantity), LFL(lot for lot), LUC (least unit cost), LTC(least total cost), PPB(part-period balancing), S-M(Silver-Meal)技法 등이 있다. 이들 휴리스틱기법들은 既存의 MRP시스템과 관련되어야 함에 따라 생산능력에 제약이 있는 경우는 고려하지 않고 있다.

최소비용결정원칙의 관점에서 지금까지는 Wagner-Whitin앨고리즘(W-W algorithm)이 가장 효과적인 기법으로 最適解(optimal solution)를 보장하나 이 기법은 理論構造의 복잡성과 롯트量計算時 所要時間(Run time, CPU time)이 他技法(LTC, LUC, S-M 등)에 비해 길다는 단점이 있어 실제 適用力은 좀 떨어지고 있는 것으로 지적되고 있다. 따라서 실무적으로는 理論構造가 간단하고 롯트量決定時 所要時間이 짧은 LTC, LUC, S-M 기법이 많이 추천되고 있다.

그러나 이러한 기법들은 수요(또는 생산) 및 제품의 특성과 企業與件에 관계없이 計劃期間의 期間初(first period)부터 一率的으로 롯트량을 계산함으로써 많은 제품과 再計劃(rescheduling)의 實際狀況下에서는 費用發生의 중요한 요인이 되고 있다고 할 수 있다. 또한 多品目問題(multi-item problem)의 앨고리즘중 副問題解法(subproblem solution)으로 단일품목앨고리즘의 효율성이 요구되고 있다.

이러한 관점에서 本 硏究는 既存技法을 區間分割에 적용시켜 最適化程度를 높이고 所要時間을 줄일 수 있는 새로운 앨고리즘을 제시하고자 한다.

本 論文의 구조는, 제 2 장에서 단일품목의 動的 롯트量決定問題에 대한 既存研究들을 最適解保障方法과 휴리스틱방법으로 구분하여 간단히 고찰하고, 제 3 장에서는 最適化條件을 이용하여 주어진 문제를 작은 期間의 問題(subproblem)들로 분할한 후[3] 既存技法의 適用過程에 대해 논의한다. 끝으로 제 4 장과 제 5 장에서는 計算結果 및 分析, 그리고 結論을 제시한다.

2. 既存研究의 理論的 考察

2.1. 最適解를 保障하는 방법

動的 롯트量決定模型(dynamic lot-sizing model : DLSM)은 單一品目(single-item)과 多品目(multi-item)으로 분류되고 이들은 또한 생산능력 제약이 있는 경우(capacitated case)와 없는 경우(uncapacitated case)로 구분된다.

생산능력제약이 없는 單一品目 롯트량결정문제는 기본적으로 아래와 같이 混合整數計劃模型(MIP model)으로 모형화시킬 수 있다.

$$\text{(P)} \quad \text{Min} \quad \sum_{t=1}^{N} (S_t \cdot \delta(X_t) + h_t \cdot I_t) \tag{1}$$

$$\text{s. t.} \quad I_{t-1} + x_t - I_t = d_t \quad t = 1, 2, 3, \cdots\cdots, N \tag{2}$$

$$\delta(X_t) = \begin{cases} 1, & X_t > 0 \\ 0, & X_t = 0 \end{cases} \quad t = 1, 2, 3, \cdots\cdots, N \tag{3}$$

1) D會社의 경우 再生法(regenration)으로 所要量을 계산하는데 24時間이 소요되고 있다.

2) American Production and Inventory Control Society

3) 以下 "區間分割"이라고 정한다.

$X_t \ge 0,\ \ I_t \ge 0$
$\qquad\qquad\qquad t=1,2,3,\cdots\cdots,N \qquad (4)$
$I_0=0,\ \ I_N=0$

단,

N : 意思決定計劃期間

I_t : t期末의 재고량

d_t : t期의 수요량

X_t : t期의 생산량(또는 주문량)

S_t : t期의 생산준비비용(또는 주문비용)

h_t : t期의 단위재고유지비용

위의 模型에서 함수의 형태는 볼록함수(convex function)이며, 式(2), (3), (4)로 구성되는 可能解領域(feasible region)은 閉볼록集合(closed convex set)임을 나타내므로 최적해는 可能解領域의 꼭지점(extreme point)에 존재함을 알 수 있다(Wagner-Whitin[30], Zangwill[33, 34, 35]). 따라서 최적해를 찾기 위해서는 문제(P)의 可能解領域에서 꼭지점의 특성을 찾아내어 이들 꼭지점만을 찾아가면 된다.

생산능력제약이 없는 單一品目 롯트량결정문제는 1958年 Wagner와 Whitin[30]이 처음 動的計劃法(dynamic programming)으로 모형화하고 解法($O(T^2)$)을 제시한 후 많은 연구가 진행되었으며, Wagner와 Whitin은 生産能力制約이 없는 單一品目 롯트량결정문제의 꼭지점 특성을 아래의 〈定理 1〉로 정리하였으며, 앨고리즘의 代案(forward approach)으로 아래 式(5)를 제시하였다.

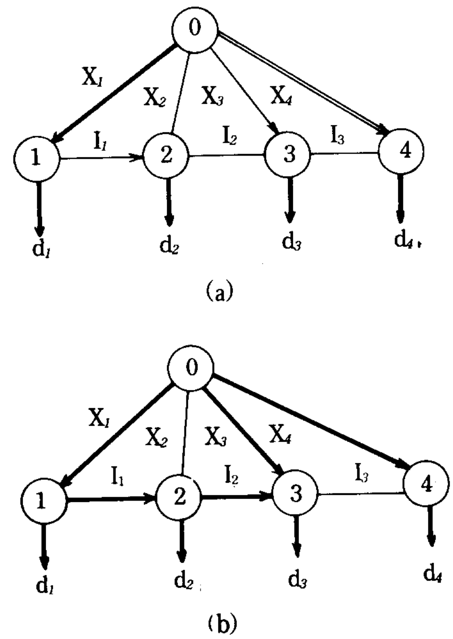
〈定理 1 ; Wagner-Whitin[30]〉 최적해는 모든 기간 t에 있어 $I_{t-1} \cdot X_t=0$를 만족한다.

$$F(t)=\mathrm{Min}\begin{bmatrix}\mathop{\mathrm{Min}}_{1\le j<t}[S_j+\sum_{h=j}^{t-1}\sum_{k=h+1}^{t} i_h\cdot d_k]+F(j-1) \\ S_t+F(t-1)\end{bmatrix}$$

$$F(1)=S_1,\ F(0)=0 \qquad (5)$$

단, F(t)는 기간 1~ 기간 t까지의 最少費用

Zabel[32]은 Wagner-Whitin이 제시한 모형을 생산비용이 期間에 따라서 變動하는 경우의 모형으로 확장시켰으며, Zangwill[33, 34, 35]은 부족비용이 존재하는 모형으로 확장시켰다. Zangwill[33, 34, 35]은 문제(P)를 넷트웍으로 나타내고 꼭지점은 〈그림 1〉과 같이 Aborescence Tree로 나타낼 수 있음을 증명하였다. 즉, 各 期間에서의 需要量(d_t)은 生産量(X_t) 또는 移越在庫量(I_{t-1}) 중 어느 하나로서만 充足된다는 것이다.



〈그림 1〉 Aborescence Tree case(a) and Not Aborescence Tree case(b)

〈定理 2 ; Zangwill[33, 34, 35]〉 문제(P)를 시작점 S ($\sum_{t=1}^{T} d_t$) 와 T개 끝점($d_1, d_2 \ldots, d_T$)으로 구성되는 넷트웍문제로 나타냈다고 하자. 이 넷트웍문제의 꼭지점은 Aborescence Tree로 나타낼 수 있고, 또 어떤 解를 Aborescence Tree로 나타낼 수 있다면 그 解는 꼭지점에 있다.

Wagner & Whitin은 動的 計劃法(dynamic programming)으로 문제(P)를 해결하면서 區間分割條件을 아래의 〈定理 3〉으로 나타내었다.

〈定理 3 ; Wagner-Whitin〔30〕〉 어떤 기간 t에서 $I_t=0$이면 기간 1, 2, . . . ,t의 문제를 풀었을 때의 解는 기간 t 이후의 데이타에 영향을 받지 않는다. 즉, 原問題는 기간 1, 2, . . . ,t의 문제와 기간 t+1, . . . ,T의 문제로 분할될 수 있다.

旣存의 연구에서는 위의 〈定理 3〉을 활용하기는 하였으나, 狀態變數(statevariable)를 나타내는 정도에 그치고 있다. 즉, I=0인 기간은 직접 解를 구해보지 않고서는 알 수 없으므로 위의 定理가 충분히 활용되지 않았다. 그러나 Peterson & Silver〔27〕는 〈定理 3〉을 좀더 보편화시켜 문제를 풀기 전에 I=0을 구하는 區間分割條件을 〈定理 4〉로 나타내었다.

〈定理 4 ; Peterson-Silver〔27, p.309〕〉 특정기간 t에서의 需要量 d_t가 S/H보다 크든지 같을 때는, 기간 t에서 $X_t>0$, $I_{t-1}=0$가 되어 문제를 작은 區間으로 分割할 수 있다. 여기서 S와 H는 각각 생산비용(setup cost)과 재고비용을 나타낸다.

앞의 式(4)에서 $X_t \leq C_t$와 $I_t \leq R_t$라는 제약식이 첨가되는 模型을 생각할 수 있는데 이와 같이 생산능력 또는 재고량에 제약이 있는 경우의 꼭지점(extreme points)특성에 대한 硏究는 Florian & Klein〔14〕, Love〔23〕, Baker et al.〔3〕등을 들 수 있으며 이들의 硏究結果는 다음의 定理에 나타나 있다.

〈定理 5 ; Florian-Klein〔14〕〉 $I_t=0$인 연속적인 2期間사이에서 많아야 1期間을 제외한 모든기간에서 $X_t=0$이거나 $X_t=C_t$이다(단, C_t ; 最大生産能力).

Florian과 Klein은 〈定理 5〉를 이용하여 生産能力이 一定한 경우에 대한 $0(T^4)$앨고리즘을 개발하였다. Baker et al.〔3〕는 생산능력제약문제의 最適解에 관한 꼭지점의 특성을 아래의 〈定理 6〉으로 정리하였다.

〈定理 6 ; Baker et al.〔31〕〉 最適解는 모든 期間 t에 있어 $I_{t-1} \cdot (C_t-X_t) \cdot X_t=0$를 만족한다.

Lambert & Luss〔21〕는 생산능력이 시간에 따라 正數倍로 증가하는 모형에 대하여, Lambrecht & Vanderveken〔22〕, Baker et al.〔3〕은 생산능력이 기간에 따라 변동하는 모형에 대하여 기법을 제시하였다. 그리고 Love〔23〕는 재고량에 제약이 존재하는 경우에 대한 모형과 기법을 다루었다. Florian, Lenstra & Rinooy Kan〔13〕은 이들 문제에 대한 計算上의 難易度(computational complexity)를 정리하였으며, 특히 기간에 따라 변동하는 생산능력제약이 존재하는 問題는 NP-hard문제로서, 그 解를 효과적으로 구할 수 있는 해법이 존재하기 힘들다는 것을 증명하였다. 또한 Bitran & Yanasse〔5〕는 비용과 生産能力構造에 따라 各 模型의 해법은 Polynominal time algorithm을 적용할 수 있는 경우와 그렇지 못한 경우(NP-hard, NP-hard complete)로 분류할 수 있음을 증명하였다. Aras & Swanson〔1〕은 單一財原(single resource)에서 롯트量決定과 連續的인 意思決定(sequencing decision)을 통합한 새로운 휴리스틱기법을 개발하였고 능력제한을 生産回數(setup time)로 계산하였다.

최근, 70년대 후반부터 대두하기 시작한 JIP(Just In Time), 日本式在庫管理, ZI(Zero-Inventory), KANBAN시스템 등에 대한 수리적인 模型化硏究가 진행되고 있는데 대표적인 연구로써 Zangwill〔36〕을 들 수 있다. Zangwill〔36〕은 單一品目動的 롯트량결정문제에서 生産費用(setup cost)이 감소될 때의 효과를 분석하였는데, 모든 期間에서 一定量의 생산비용(stationary setup cost)을 감소시킬 수 있다면 限界收益率增加(increasing marginal rate of return)을 나타내고(그러나 기존의 경제학에서는 資本投資가 限界收益率減少임을 나타내고 있는데 유의)在庫維持費用도 감소시킬 수 있으나, 非一定量의 生産費用(noinstationary setup cost)이 감소될 경우는 總費用이 증가할 수도 있음을 예로 보여 주고 있다. 또한 Zangwill〔36〕은 生産費減少量을 매개변수(paraneter)로 하는 Parametric앨고리즘을 제시하였다.

위의 모든 硏究들은 매개변수가 固定되어 있다고 가정하고 最適解를 구하는데 실질적으로 매

개변수를 정확히 豫測할 수 없음으로 해서 얻어진 해가 최적해가 아닐 수 있다는 약점이 있다. 이러한 약점을 補完하기 위하여 최근 Parameteric 혹은 Sensitivity 分析(analysis)이 진행되고 있는데, 대표적인 硏究로써 Lee[17], Richter[28]를 들 수 있다. Lee[17]는 특정기간의 생산비용, 재고유지비용 혹은 수요량에 대해서 현재의 最適解가 계속 최적해로 남아 있을 수 있는 범위를 제시하였으며, Richter[28]는 생산비용과 재고유지비용이 모든 기간에서 一定할 때 현재의 최적해가 계속 최적해로 남아 있을 수 있는 범위를 생산비용과 재고유지비용의 比率로 나타내었다.

2.2. 휴리스틱 方法

휴리스틱 方法은 일반적으로 한정된 계획기간(finite planning horizon)내의 이산적 수요패턴에 적용할 수 있는 롯트량결정기법으로 FOQ, FPR, EOQ, POQ, LFL, LUC, LTC, PPB, S-M기법 등 여러가지 기법이 개발되어 있으며 Orlicky[26], Peterson & Silver[27]에 의해 자세히 소개되었다.

이들 휴리스틱은 각각의 技法이 갖는 狀況適應的 특수성때문에 어느 기법이 더욱 좋다고는 一率的으로 말할 수 없으나 Kaimann[18]은 生産費用과 在庫維持費用의 比較變化 및 分散計數의 변화에 의한 比較分析을 행하였고, Berry[4]는 Kaimann의 標本資料를 이용하여 EOQ, POQ, PPB技法을 비교하여 PPB技法이 가장 좋음을 보였다.

LUC技法은 單位個數當 生産費用과 在庫維持費用의 합인 單位費用(unit cost)을 최소화하는 生産量을 경제적 롯트로 결정하는 기법으로 아래 式(6)에 의해 C(t+1)>C(t)인 경우중 가장 적은 기간 t를 선택하여 t기간까지의 수요량의 합을 롯트량으로 한다.

$$C(t)=\{S_t+h\sum_{i=i_c}^{t}(i-i_c)\cdot d_i\}/\sum_{i=i_c}^{t}d_i \quad (6)$$

More[25]는 LUC技法과 동일하게 EOQ모형에 논리의 근거를 두고서 단위개수당 生産費用과 在庫維持費用이 같아 지는 기간에서 그 기간까지의 수요량을 경제적 롯트로 결정하는 LTC技法을 개발하였다. LTC技法은 아래의 式(7) 및 式(8)과 같은 EPP(Economic Part Period)와 PP(Part period)의 槪念을 도입하여 |EPP-PP|가 최소가 되는 기간을 구하여 그 기간까지의 累積需要量을 롯트량으로 결정한다.

$$EPP=S/h \quad (7)$$

$$PP=\sum_{i=i_c}^{t}(i-i_c)\cdot d_i \quad (8)$$

生産期間(또는 發注期間)은 |EPP-PP|가 최소가 되는 다음 기간이 되며, 만약 기간 t와 기간 (t+1)에서의 |EPP-PP|가 동일한 값이면 (t+1)기간까지의 누적수요량을 롯트량으로 한다.

Dematteis & Mendoza[11]는 LTC의 롯트량 계산과정에서 非合理的인 過程을 피하기 위해 "Look ahead"와 "Lok back"이라 불리우는 調整過程을 적용시켜 LTC技法을 개선시킨 PPB기법을 개발하였다. 그리고 Silver & Meal[29]은 기간에 따라 변화하는 수요에 대해 EOQ槪念을 수정하여 S-M(Silver-Meal)휴리스틱을 개발하였다. S-M기법은 期間에 따라 변화하는 需要에 대해 期間別 總費用이 最少가 되는 期間까지의 需要量의 합을 롯트로 결정하는 기법이다. 즉, 롯트량은 期間別 總費用 C(t)가 아래의 式(9)에서 C(t′+1)>C(t′)의 경우중 가장 작은 기간(t′)을 선택하여 t′까지의 수요량의 합으로 결정한다.

$$C(t)=\{S+h\sum_{i=i_c}^{t}(i-i_c)\cdot d_i\}/t \quad (9)$$

Groff[16]는 生産費用과 在庫維持費用의 限界費用(marginal cost)개념을 이용한 한계비용분석기법을 제시하였고, Karni[19, 20]는 계획기간의

全體所要量(total requirement)을 期間別(1, 2, ..., N)로 나누어 均一生産量의 어떤 계열에 의해 롯트량을 결정하는 UOQ(Uniform Order Quantity)기법과 MPG(Maximun Part-Period Gain)技法을 제시하였다. Boe〔7〕는 UOQ技法보다 總費用이 절감되고 적용이 간편한 IOQ(Incremental Order Quantity)技法을 제시하였다. 그리고 Mitra et al.〔24〕는 旣存의 EOQ技法과 LTC技法을 수정하여 EOQ-II기법(또는 수정 EOQ기법)과 LTC-II기법(또는 수정 LTC기법)을 제시한 후 Kaimann〔18〕과 Berry〔4〕가 사용한 標本資料를 이용하여 總在庫費用의 감소효과를 보여 주었다. 이와 같이 휴리스틱기법들은 MRP시스템과 관련하여 實務次元에서 APICS를 중심으로 1980년을 前後하여 많은 硏究가 이루어지고 있다. 최근 Bahl & Zionts〔2〕는 롯트량결정문제를 固定費 要素包含問題(fixed-charge problem)로 해석하여 여기에 割當技法을 적용하는 새로운 휴리스틱접근방법을 제시하고 있다.

3. 旣存 앨고리즘의 擴張

本 硏究에서는 旣存의 最適化에 대한 理論硏究에 휴리스틱(heuristic)방법을 통합하여 最適化 程度와 계산속도의 효율성을 동시에 높이고자 하는 생각에서 진행되었다고 할 수 있다. 앨고리즘의 基本槪念은 문제를 작은 副問題들로 분할한 다음 휴리스틱기법들을 적용하는 방법이다.

3. 1. 副問題로의 分割

本 硏究에서는 Peterson & Silver(27)의 수요량과 비용의 관계를 式(10)과 같이 경제적 部分生産量(또는 注文量) EPQ(Economic Part Quantity)로 정의한다.

$$EPQ(t) = S_t / h_{t-1} \tag{10}$$

단, S_t : t 期의 生産準備費用(또는 注文費用)

h_{t-1} : t－1 期의 單位在庫維持費用

式(10)을 이용하여 문제를 풀기전에 I＝0인 기간을 찾아 내어 計劃期間을 분할하여 獨立된 각각의 副問題(Subproblem)로 다룸으로써 해를 구하는데 소요되는 시간을 줄일 수 있는 방법을 제시하고자 한다.

式(10)의 EPQ(t)는 기간 t의 需要量 d_t를 調達할 때 기간 t에서 생산할 것인지 아니면 재고로 보관할 것인지를 판단하는 기준치로 사용한다. 즉, 수요량 d_t가 EPQ(t)보다 크거나 같으면 기간 t는 固定生産期間으로 결정된다. 따라서 EPQ(t)는 生産準備費와 (t-1)期에서 재고로 移越될 때의 在庫維持費用이 동일하게 되는 量(qualtity)을 나타내는 것으로 이와 비슷한 개념이 이미 LTC기법과 PPB기법에서 EPP(Economic Part Pariod)로 정의되긴 하였으나 조금 다른 의미를 가지고 있다.

위에서 제시한 式(10)은 재고비용에 대한 생산준비비용의 比率이 작으면 작을 수록, 또 수용량이 크면 클수록 더 효과적으로 區間을 分割할 수 있음을 나타낸다. 특히 MRP시스템의 경우 上位레벨에서 下位레벨로 내려 올수록 수요가 뭉치는 現像(lump demand case)이 나타나므로 區間分割의 효과를 크게 볼 수 있으리라 생각한다.

〈定理 7〉 式(10)에 의해 분할된 副問題(subproblem)에서 區間間隔이 2보다 작거나 같을 경우의 生産指標(δ_t)는 原問題의 最適 生産指標(δ_t^*) 와 같다.

證明 : 區間間隔이 1인 경우는 式(10)에서 $d_t \geq S_t/h_{t-1}$이므로 $d_t \cdot h_{t-1} \geq S_t$이다. 따라서 區間間隔이 1인 경우 固定生産期間이 되어 최적해에서도 生産指標는 변함이 없다. 그리고 區間間隔이 2인 경우 즉, 생산지표 (δ_t, δ_{t+1})＝(1, 0)인 경우는 式(10)에서 기간(t＋1)은 $d_{t+1} \leq S_{t+1}/h_t$이므로 $d_{t+1} \cdot h_t \leq S_{t+1}$이다. 따라서 (t＋1)期의 수요량 d_{t+1}은 t期에서 생산하는 방법이 最適이다. 즉, t期에서 생산하는 방법이 (t＋1)期에서 생산하는 경우보다 ($d_{t+1} \cdot h_t - S_{t+1}$)만큼의 비용절감을 기대할 수 있으므로 최적해에도 生産指標는 변하지 않는다.

따라서 〈定理 7〉을 이용하면 區間의 길이가 3

期間以上인 경우 즉, $(t'-t)\geq 3$인 경우만 풀면 되므로 소요시간을 크게 단축시킬 수 있음을 알 수 있고, 또한 區間別 롯트量計算은 順次處理가 아닌 並行處理가 가능하다.

3. 2. 앨고리즘

本 節에서는 앞서 제시한 區間分割이 어떻게 旣存技法과 통합되는 가를 제시하고자 한다.

앨고리즘은 크게 2단계 즉, 구간분할단계, 부문제(subproblem)해결단계로 구성할 수 있다. 제시된 區間分割을 이용하여 작은 문제(subproblem)로 분할하면 이 작은 문제는 旣存의 기법을 이용하여 롯트량을 결정한다.

〈단계 1〉 初期化(initialization) : 각 기간에 대해 EPQ(t)를 계산한다.

〈단계 2〉 固定生産期間의 설정 : 각 기간에 대해서 $d_t \geq$ EPQ(t)이면 生産指標 $\delta(t)=1$로 정한다.

〈단계 3〉 副問題(subproblem)의 구성 : 단계2에서 얻어진 固定生産期間을 이용하여 副問題를 구성한다.

〈단계 4〉 각각의 副問題를 旣存의 기법으로 푼다.

단계 1, 2, 3은 區間分割段階라고 볼 수 있으며, 단계3의 副問題는 단계2에서 生産指標가 $(\delta_t, \delta_{t+1}, \delta_{t+2})=(1, 0, 0)$일때만 構成되며 나머지 (1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1)인 경우는 〈定理 7〉에 의해 次期 副問題의 構成으로 넘어 간다. 단계 4는 副問題(subproblem)의 해결단계로 이때 旣存의 W-W앨고리즘, LTC기법, LUC기법, S-M기법을 적용하여 해결한다.

4. 計算結果 및 分析

앞서 제시한 區間分割의 效率性을 분석하기 위하여 旣存의 기법(W-W, LTC, LUC, S-M 등)만을 이용하는 경우와 區間分割과 旣存의 기법을 함께 이용하는 경우에 대하여 所要時間과 最適化程度를 기준으로 比較檢討하고자 한다.

資料는 客觀性을 유지하기 위하여 Kaimann (18), Berry(4). Silver-Meal(29) 등에 의해 제시된 바 있는 4가지 수요형태 및 비용데이타를 이용하였다.

〈表 2〉 標本問題의 수요데이타

期	수요데이타			
	第1形態	第2形態	第3形態	第4形態
1	92	80	50	10
2	92	100	80	10
3	92	125	180	15
4	92	100	80	20
5	92	50	0	70
6	92	50	0	180
7	92	100	180	250
8	92	125	150	270
9	92	125	10	230
10	92	100	100	40
11	92	50	180	0
12	93	100	95	10
計	1,105	1,105	1,105	1,105
標準偏差	0	27.0	66.1	130.0
分散係數	0	0.293	0.718	1.410

한편 標本問題의 費用資料는 〈表3〉에 제시된 바와 같으며 表에서 보듯이 일반적으로 生産準備費가 클수록 EOQ가 크다고 하는 傳統的 在庫理論이 그대로 적용됨을 알 수가 있다.

〈表 3〉 標本問題의 비용데이타

EOQ/期平均需要	EOQ	生産準備費 ($)	在庫維持費 ($/個・期)
0.73	67	48	2
1.00	92	92	2
1.14	105	120	2
1.50	138	206	2
1.82	166	300	2

〈表 2〉의 수요데이타에 비용데이타를 添加할 경우 標本資料는 총 20개로, 이들 20개 標本資料를 처리하기 위해 本 研究에서는 모든 기법을 BASIC言語로 프로그래밍(programming)하였으며, 각 프로그램은 16Bit-XT(personal computer)互換機種에서 실행시켰다.

〈表 4〉~〈表 8〉은 區間分割을 이용했을 때 旣存의 기법만을 이용한 경우 보다 費用節減效果가 어느 정도인 가를 나타낸 것으로 表의 각 수치는 구간롯트량決定時 적용된 旣存技法에 의한 총비용과 區間分割과 旣存技法을 함께 이용했을 때의 총비용과의 비율로 本 앨고리즘(區間分割+旣存技法)의 總費用減少퍼센트(decrease percentage)를 나타낸 것이다.

〈表 4〉 生産準備費 $S_t = \$48$ 適用時

총비용의 감소비율(單位 : %)

需要形態＼適用技法	第 1 形態	第 2 形態	第 3 形態	第 4 形態
區間分割 +LTC	0 ＊	0 ＊	0 ＊	7.63 ＊
區間分割 +LUC	0 ＊	0 ＊	28.48 ＊	0
區間分割 +S-M	0 ＊	0 ＊	0 ＊	0

• 區間分割+LTC(LUC, S-M)는 區間롯트量計算時 LTC(LUC, S-M)기법을 적용한 경우이며 ＊는 最適解(optimal solution)이다.

• 費用減少比率=100＊{(旣存技法의 총비용)-(區間分割+旣存技法의 총비용)}/(旣存技法의 總費用)

〈表 5〉 生産準備費 $S_t = \$92$ 適用時

총비용의 감소비율(單位 : %)

需要形態＼適用技法	第 1 形態	第 2 形態	第 3 形態	第 4 形態
區間分割 +LTC	0 ＊	1.43 ＊	13.82 ＊	5.08
區間分割 +LUC	0 ＊	0 ＊	17.51 ＊	5.02
區間分割 +S-M	0 ＊	0 ＊	0 ＊	0

• 區間分割+LTC(LUC, S-M)는 區間롯트量計算時 LTC(LUC, S-M)기법을 적용한 경우이며 ＊는 最適解(optimal solution)이다.

• 費用減少比率=100＊{(旣存技法의 총비용)-(區間分割+旣存技法의 총비용)}/(旣存技法의 總費用)

〈表 6〉 生産準備費 $S_t = \$120$ 適用時

총비용의 감소비율(單位 : %)

需要形態＼適用技法	第 1 形態	第 2 形態	第 3 形態	第 4 形態
區間分割 +LTC	21.14 ＊	19.54 ＊	12.00 ＊	1.85
區間分割 +LUC	0 ＊	6.67 ＊	15.91 ＊	1.69
區間分割 +S-M	0 ＊	0 ＊	0 ＊	0

• 區間分割+LTC(LUC, S-M)는 區間롯트量計算時 LTC(LUC, S-M)기법을 적용한 경우이며 ＊는 最適解(optimal solution)이다.

• 費用減少比率=100＊{(旣存技法의 총비용)-(區間分割+旣存技法의 총비용)}/(旣存技法의 總費用)

〈表 7〉 生産準備費 $S_t = \$206$ 適用時

총비용의 감소비율(單位 : %)

需要形態＼適用技法	第 1 形態	第 2 形態	第 3 形態	第 4 形態
區間分割 +LTC	0 ＊	1.84	13.43 ＊	8.90 ＊
區間分割 +LUC	0 ＊	0 ＊	0.80	8.39
區間分割 +S-M	0 ＊	0	0 ＊	0

• 區間分割+LTC(LUC, S-M)는 區間롯트量計算時 LTC(LUC, S-M)기법을 적용한 경우이며 ＊는 最適解(optimal solution)이다.

• 費用減少比率=100＊{(旣存技法의 총비용)-(區間分割+旣存技法의 총비용)}/(旣存技法의 總費用)

〈表 8〉 生産準備費 $S_t = \$300$ 適用時

총비용의 감소비율(單位 : %)

需要形態＼適用技法	第 1 形態	第 2 形態	第 3 形態	第 4 形態
區間分割 +LTC	0 ＊	0 ＊	3.19	12.30 ＊
區間分割 +LUC	0 ＊	0	6.44	0
區間分割 +S-M	0 ＊	0 ＊	0.85 ＊	0

• 區間分割+LTC(LUC, S-M)는 區間롯트量計算時 LTC(LUC, S-M)기법을 적용한 경우이며 ＊는 最適解(optimal solution)이다.

• 費用減少比率=100＊{(旣存技法의 총비용)-(區間分割+旣存技法의 총비용)}/(旣存技法의 總費用)

〈表 4〉~〈表 8〉에서 區間分割에 W-W앨고리즘을 적용한 결과는 모두 최적해를 보장하므로 비교하지 않았다. 그리고 區間分割에 LTC, LUC, S-

M 기법을 적용했을 때는 총 60개의 표본자료중 23개(약 38%)의 표본자료에서 비용이 감소되었고, 비용감소는 평균 9.30%로 이를 각 기법별로 분류하면 〈表 9〉와 같다.

〈表 9〉 本 앨고리즘에 의한 비용감소효과

適用技法 \ 分類	總標本數	費用減少 標本數	費用減少標 中 最適解	既存技法에 의한最適解	區間分割에 의한最適解
區間分割 +LTC	20개	13개(65%)	9개	7개(35%)	16개(80%)
區間分割 +LUC	20개	9개(45%)	4개	8개(40%)	12개(60%)
區間分割 +S-M	20개	1개(5%)	1개	13개(65%)	14개(70%)
合　計	60개	23개(38%)	14개	28개(47%)	43개(72%)

〈表9〉에서 알수 있듯이 區間分割에 적용된 모든 기법에서 비용감소효과가 있고, 이들 비용감소표본자료중 최적해를 보장한 경우도 表에서와 같이 9개, 4개, 1개로 상당히 많다.

따라서 旣存技法에 의한 최적해표본수가 7개, 8개, 13개로 평균 47%인데 반해 區間分割에 의한 최적해는 16개, 12개, 14개로 평균 72%의 최적해를 보장하고 있다. 특히 最適解數에서 旣存技法과 逆順의 關係가 있고 旣存技法에 의한 최적해를 제외한 모든 표본자료에서 비용감소효과가 있음을 알 수 있다.

이상에서 旣存의 휴리스틱기법에 區間分割을 適合適用할 경우 最適化程度가 좋아짐을 알 수 있다.

〈表 10〉~〈表 14〉는 區間分割技法을 이용한 경우와 이용하지 않는 경우에 대한 所要時間差異를 나타낸 것이다.

각 表의 실행시간은 PC의 Timer 기능을 이용하여 (1/1000)秒에서 반올림하여 (1/100)秒까지 측정하였으며 10회의 反復實行時間을 평균한 것이다.

〈表 10〉 (區間分割+W-W)와 W-W앨고리즘의 實行時間比較(單位 : 秒)

生産準備費($) \ 需要形態	第1形態	第2形態	第3形態	第4形態	需要形態別 時間合計	合計時間 差異	時間增減率 (%)
48	0.95 / 0.91	0.95 / 0.91	1.84 / 1.27	1.68 / 1.58	5.42 / 4.67	−0.75	−13.84
92	0.95 / 0.91	0.95 / 0.91	1.84 / 1.27	2.77 / 2.72	6.51 / 5.81	−0.70	−10.75
120	0.95 / 0.91	1.46 / 1.27	1.84 / 1.27	2.49 / 2.43	6.74 / 5.88	−0.86	−12.76
206	2.16 / 2.42	2.60 / 2.60	2.67 / 1.99	2.82 / 3.04	10.25 / 10.05	−0.20	−1.95
300	2.16 / 2.48	2.85 / 3.17	2.68 / 2.00	2.82 / 3.04	10.51 / 10.64	+0.13	+1.24
生産準備費別 時間合計	7.17 / 7.58	8.81 / 8.86	10.87 / 7.80	12.58 / 12.81	39.43 / 37.05	−2.38	−6.04
合計時間差異	+0.41	+0.05	−3.07	+0.23	−2.38		
時間增減率(%)	+5.72	+0.57	−28.24	+1.83	−6.04		

• * \ ** 에서 *의 數値는 旣存技法의 소요시간이고 **의 數値는 本 앨고리즘의 소요이다.
• 合計時間差異=(**의 時間合計)−(*의 時間合計)
• 時間增減率=(合計時間差異)/(旣存技法의 合計時間)×100

〈表 11〉 (區間分割+LTC)와 LTC기법의 實行時間比較(單位 : 秒)

需要形態 生産準備費($)	第 1 形態	第 2 形態	第 3 形態	第 4 形態	需要形態別 時間 合計	合計時間 差 異	時間增減率 (%)
48	1.53 0.91	1.53 0.91	1.36 1.04	1.28 1.19	5.70 4.05	−1.65	−28.95
92	1.53 0.91	1.39 0.91	1.21 1.04	1.25 1.25	5.38 4.11	−1.27	−23.61
120	1.19 0.91	1.26 1.12	1.21 1.04	1.22 1.21	4.88 4.28	−0.60	−12.30
206	1.21 1.47	1.21 1.35	1.15 1.18	1.13 1.21	4.70 5.21	+0.51	+10.85
300	1.21 1.48	1.22 1.47	1.14 1.15	1.08 1.21	4.65 5.31	+0.66	+14.19
生産準備費別 時 間 合 計	6.67 5.68	6.61 5.76	6.07 5.45	5.96 6.07	25.31 22.96	−2.35	−9.28
合計時間差異	−0.99	−0.85	−0.62	+0.11	−2.35		
時間增減率(%)	−14.84	−12.86	−10.21	+1.85	−9.28		

- * * * 에서 * 의 數値는 既存技法의 소요시간이고 * * 의 數値는 本 앨고리즘의 소요이다.
- 合計時間差異 = (* * 의 時間合計) − (* 의 時間合計)
- 時間增減率 = (合計時間差異)/(既存技法의 合計時間) × 100

〈表 12〉(區間分割+LUC)와 LUC기법의 實行時間比較(單位 : 秒)

需要形態 生産準備費($)	第1形態	第2形態	第3形態	第4形態	需要形態別 時間 合計	合計時間 差 異	時間增減率 (%)
48	1.59 0.91	1.59 0.91	1.46 1.12	1.45 1.36	6.09 4.30	−1.79	−29.39
92	1.59 0.91	1.59 0.91	1.46 1.01	1.40 1.43	6.04 4.26	−1.78	−29.47
120	1.59 0.91	1.51 1.17	1.41 1.12	1.41 1.43	5.92 4.63	−1.29	−21.79
206	1.31 1.64	1.43 1.53	1.42 1.22	1.30 1.43	5.46 6.07	+0.36	+6.59
300	1.32 1.63	1.32 1.65	1.36 1.36	1.32 1.43	5.32 5.82	+0.75	+14.10
生産準備費別 時 間 合 計	7.40 6.00	7.44 6.17	7.11 5.83	6.88 7.08	28.83 25.08	−3.75	−13.01
合計時間差異	−1.40	−1.27	−1.28	+0.20	−3.75		
時間增減率(%)	−18.92	−17.07	−18.00	+2.91	−13.01		

• * ** 에서 *의 數値는 既存技法의 소요시간이고 **의 數値는 本 앨고리즘의 소요이다.
• 合計時間差異=(**의 時間合計)−(*의 時間合計)
• 時間增減率=(合計時間差異)/(既存技法의 合計時間)×100

〈表 13〉(區間分割+S-M)와 S-M기법의 實行時間比較(單位 : 秒)

需要形態 生産準備費($)	第1形態	第2形態	第3形態	第4形態	需要形態別 時間 合計	合計時間 差 異	時間增減率 (%)
48	1.30 0.91	1.31 0.91	1.26 1.04	1.25 1.21	5.12 4.07	−1.05	−20.51
92	1.31 0.91	1.31 0.91	1.26 1.05	1.24 1.21	5.12 4.08	−1.04	−20.31
120	1.30 0.91	1.27 1.06	1.26 1.05	1.21 1.21	5.04 4.23	−0.81	−16.07
206	1.21 1.35	1.21 1.26	1.21 1.16	1.20 1.25	4.83 5.02	+0.19	+3.93
300	1.21 1.36	1.21 1.32	1.19 1.15	1.20 1.25	4.81 5.08	+0.27	+5.61
生産準備費別 時 間 合 計	6.33 5.44	6.31 5.46	6.18 5.45	6.10 6.13	24.92 22.48	−2.44	−9.79
合計時間差異	−0.89	−0.85	−0.73	+0.08	−2.44		
時間增減率(%)	−14.06	−13.47	−11.81	+1.31	−9.79		

• * ** 에서 *의 數値는 既存技法의 소요시간이고 **의 數値는 本 앨고리즘의 소요이다.
• 合計時間差異=(**의 時間合計)−(*의 時間合計)
• 時間增減率=(合計時間差異)/(既存技法의 合計時間)×100

表에서 알수 있듯이 20개 표본자료를 4가지 旣存技法으로 처리할 때 W-W앨고리즘이 39.43秒로 가장 많이 소요되었고, LTC기법이 25.3秒, LUC기법이 28.89秒, S-M기법이 24.92秒로 S-M기법이 가장 적게 소요되었다.

앞서 제시한 區間分割을 적용한 경우의 계산결과도 總時間에서 W-W앨고리즘이 37.05秒, LTC기법이 22.96秒, LUC기법이 25.08秒, S-M기법이 22.48秒가 소요되어 역시 W-W앨고리즘이 가장 많은 시간이 소요되고 S-M기법이 가장 적게 소요되다.

區間分割에 의해 절약되는 總時間은 W-W앨고리즘이 2.38秒(6.0%), LTC기법이 2.35秒(9.28%), LUC기법이 3.75秒(13.01%), S-M기법이 2.44秒(9.79%)로 모든 기법에서 처리시간이 절약되었음을 알 수 있다.

本 앨고리즘의 실행시간을 첫째, 生産準備費側面(각 表의 列別 時間差異)에서 보면 生産準備費(S_i)가 $120이하에서는 실행시간이 旣存技法에 비해 모두 감소되고, $206이상(〈表 10〉은 $206 제외)에서는 오히려 本 앨고리즘의 실행시간이 증가되고 있다. 이는 區間分割의 효과가 존재하지 않음으로 해서 나타난 現像이라 볼 수 있다.

둘째, 需要側面(각 表의 列別 時間差異)에서 보면 第4形態에서 오히려 제시된 앨고리즘의 처리시간이 증가되었고, 〈表 10〉에서는 第 1, 2 形態의 수요에서도 처리시간이 증가되었으나 나머지 수요형태에서는 모두 감소되었다.

이와 같이 수요형태와 생산비의 관계에서 固定生産期間이 존재하고 수요가 lump할수록 本 앨고리즘의 실행시간이 감소됨을 알 수 있다.

5. 結　　論

本 研究에서는 생산능력에 제약이 없는 單一品目 動的 롯트결정문제에 있어서 주어진 문제를 독립된 각각의 작은 副問題(subproblem)들로 분
區間分割技法의 효과는 재고비용에 대한 生産準備費用의 비율이 크면 클수록, 그리고 수요가 할함으로써 소요시간을 줄일 수 있을 방법을 제시하였다.

주어진 문제를 분할하는 과정에서 最適化條件을 그대로 이용함으로써 W-W앨고리즘과 함께 이용할 경우 최적해를 구하는데 아무런 영향도 주지 않았으며, 또한 기타 휴리스틱기법과 함께 이용할 경우 소요시간도 적게 나타났다.

本 研究에서는 最適化條件을 고려하여 區間을 분할하였지만 企業與件上(단골 고객의 주문, 현찰주문, 假決算後 등) 혹은 製品特性上(季節賞品, 食品加工品 등) 특정기간에 반드시 생산(또는 주문)을 해야 하는 경우 이를 고려하여 區間을 分割할 수 있어 實務 適用上 많은 장점도 갖고 있다고 볼 수 있다.
뭉쳐 있을 수록(lumpy demand) 더 큰 효과를 발휘할 수 있다. 특히 MRP시스템에서는 上位레벨의 品目에서 下位레벨의 品目으로 내려갈수록 수요형태가 lumpy하게 되므로 區間分割의 효과가 매우 크리라 느껴진다.

오늘날 企業의 여러 狀況은 매우 예측하기가 힘들며 특히 需要 및 費用등은 미래에의 不確實性이 강하게 작용하는 要素들로써 앞으로 이들의 不確實性을 고려한 롯트量決定研究가 필요할 것으로 본다. 또한 MRP시스템은 그 특성상 多段階에 걸쳐 있을 뿐더러 管理效率의 제고를 통해 生産準備費를 저하시키고 가능한 한 在庫를 보유하지 않을 것을 원칙으로 하므로 이에 대한 補完研究도 뒤따라야 할 것이다. 뿐만 아니라 本 研究에서 논한 롯트量 決定問題는 生産能力計劃問題와는 별도로 다룬 내용이며 生産能力制約의 문제와 결부된 模型研究를 통해 더욱 그 現實性이 증가될 수 있을 것이다.

參考文獻

1. Aras, D.A. and L.A. Swanson, "A Lot Sizing and Sequencing Algorithm for Dynamic Demands upon a Single Facility," *Journal of Operations Management,* 2, 1982. pp.177-185.
2. Bahl, H.L. and S. Zionts, "Lot Sizing as a Fixed-Charge Problem," *Production and Inventory Management,* 1st Qtr., 1986, pp.1-11.
3. Baker, K.R., P. Dixon, M.J. Magasine and E.A. Silver, "An Algorithm for the Dynamic Lot-size Problem with Time-Varying Production Capacity Constraints," *Management Science,* 24(16), 1978, pp. 1710-1720.
4. Berry, W.L., "Lot Sizing Procedures for Requirements Planning System ; A Framework for Analysis," *Production and Inventory Management,* 13(2), 1972, pp.19-34.
5. Bitran, G.R. and H.H. Yanasse, "Computational Complexity of the Capacitated Lot Sizing Problem," *Management Science,* 28(10), 1982, pp.1174-1186.
6. Bodt, M.D., L.F. Gelders and L.V. Wassenhove, "Lot Sizing under Dynamic Demand Conditions ; A Review," *Engineering Costs and Production Economics,* 8, 1984, pp.165-187.
7. Boe, W.J. and C. Yilmaz, "The Incremental Order Quantity," *Production and Inventory Mangement,* 2nd Qtr., 1981, pp.94-100
8. Chalmet, L.G., M.D. Bldt and L.V. Wassenhove, "The Effect of Engineering Changes and Demand Uncertainty on MRP Lot Sizing ; A Case Study," *International Journal of Production Research,* 23(2), 1985, pp.233-251.
9. Collier, D.A., "The Interaction of Single-Stage Lot-Sizing Models in A Material Requirements Planning systems," *Production and Inventory Management,* 4th Qtr., 1980. pp.11-20.
10. Cpim, W.B. and C. Yilmaz, "The Incremental Order Quantity," *Production and Inventory Management,* 2nd Qtr., 1983, pp.94-100.
11. Dematteis, J.J. and A.G. Mendoza, "An Economic Lot Sizing Technique," *IBM System Journal,* 7(1), 1968, pp.31-39.
12. Freeland, J.R. and J.L. Colley, "A Simple Heuristic Method for Lot Sizing in a Time-Phased Reorder System," *Production and Inventory Management,* 1st Qtr., 1982, pp.15-22.
13. Florian, M., J.K. Lenstra and A.H.G. Rinooy Kan, "Deterministic Production Planning ; Algorithms and Complexity," *Management Science,* 26(7), 1980, pp.669-679.
14. Florian, M. and M. Klein, "Deterministic Production Planning with Concave Costs and Capacity Constraints." *Management Science,* 18(1), 1971, pp.12-20.
15. Gaiter, N., A Near-Optimal Lot-Sizing model for Material Requirements Planning Systems," *Production and Inventory Management,* 1st Qtr., 1981. pp.75-89.
16. Groff, G.K., "A Lot Sizing Rule for Time-Phased Component Demand," ; *Production and Inventory Management,* 1st Qtr., 1979, pp.47-53.

17. In-Soo Lee, "Sensitivity Analysis for Production Planning Problem with Back-logging," *Journal of Korean Operations Research Society,* 12(2), 1987(to appear).

18. Kaimann, R.A., "EOQ vs Dynamic Programming Which One to use for Inventory Odering," *Production and Inventory Management,* 10(4), 1969, pp.66-74.

19. Karni, R., "A Uniform Order Quantity(UOQ) Lot Sizing Technique for Varying Demand Rates," *Production and Inventory Management,* 3rd Qtr., 1980, pp.29-36.

20. ________, "Maximun Part-Period Gain(MPG)-A Lot Sizing Procedure for Unconstrainted Requirements Planning systems," *Production and Inventory Management,* 2nd Qrt., 1981, pp.91-98.

21. Lambert, A. and H. Luss, "Production Planning With Time Dependent Capacity Bounds," *European Journal of Operational Research,* 9, 1982, pp.275-280.

22. Lambrecht, M. and J. Vanderveken, "A Facilities in Series Capacity Constrained Dynamic Lot-Size Model," *Europpean Journal of Operational Research,* 2, 1978, pp.132-136.

23. Love, S.F., "Bounded Production and Inventory Models with Piecewise Concave Costs," *Managenent Science,* 20(3), 1973, pp.313-318.

24. Mitra, A., J.F. Cox, J.H. Blackstone and R.R. Jesse, "A Re-examination of Lot Sizing Procedures for Requirements Planning Systems : Some Modified Rules," *International Journal of Production Research,* 21(4), 1983, pp.471-478.

25. More, S.M., "MRP and The Least Total Cost Method of Lot-Sizing," *Production and Inventory Management,* 2nd Qtr., 1974, pp.47-55.

26. Orlicky, J., *Material Requirements Planning,* McGraw-Hill Inc., 1975.

27. Peterson, R and E.A., Silver, *Decision Systems for Inventory Management and Production Planning,* John Wiley and Sons Inc., 1979.

28. Richter, K., "Stabillity of the Constant Cost Dynamic Lot Size Model," *European Journal of Operational Research,* 31, 1987, pp.61-65.

29. Silver, E.A., and H.C. Meal, "A Heuristic for Selecting Lot Size Quantities for the Case of Deterministic Time-Varying Rate and Discrete Opportunities for Replacement," *Production and Inventory Management,* 14(2), 1973, pp.64-74.

30. Wagner, H.M. and T.M. Whitin, "Dynamic Version of the Economic Lot Size Model," *Management Science,* 15(1), 1958, pp.89-94.

31. Willians, J.F., "A Dominance Relation in Dynamic Lot Sizing," *Management Science,* 21(10), 1975, pp.1206-1209.

32. Zabel, E., "Some Generalizations of an Inventory Planning Horizon Theorem," *Management Science,* 10(3), 1964, pp.465-471.

33. Zangwill, W.I., "A Deterministic Multi-period Production Scheduling Model With Backlogging," *Management Science,* 13(1), 1966, pp.105-119.

34. _______, "Minimum Concave Cost Flows in Certain Networks," *Management Science,* 14(7), 1968, pp.429-450.

35. _______, "A Backlogging Model and a Multi-Echelon Model of a Dynamic Economic Lot Size Production System : A Network Approach," *Management Science*, 15(9), 1969, pp.516-527.
36 _______, "From EOQ toward ZI," *Management Science*, 33(10), 1987, pp.1209-1223.